

代
数
学

下

依照教育部修正課程標準編輯

復興高級中學
教科書
代數學

甲組用
下冊

虞明復原編
榮方舟改編
廣文行

中華民國二十四年二月初版
 中華民國二十五年五月第二次訂正十一版

 * 版 翻 *
 * 權 印 *
 * 所 必 *
 * 有 究 *

復興高級中學用
 教科書代數學甲組二冊
 (57023B)

下冊實價國幣陸角
 外埠酌加運費貼費

發行所	印刷所	主編兼 行人	改編者	原編者
商務印書館 上海及各埠	商務印書館 上海河南路	王雲五 上海河南路	榮方舟	虞明禮

代數學下冊

目 錄

第二十章 複素數一元二項方程式.....1

168. 複素數	1
169. 複素數之基本運算	1
170. 複素數爲零的定義	2
171. 前節的應用	3
172. 複素數之圖形表示	5
173. 複素數之極坐標式	7
174. 用極坐標式演複素數乘法	10
175. 用極坐標式演複數除法	12
176. 複素數之 n 次冪	14
177. 複素數之 n 次方根	15
178. 二項方程式	18

第二十一章 一元三次或四次方程式20

179. 引論	20
180. 一元三次方程式解法	20
181. 根之性質 判別式	24
182. 四次方程式之通解	26
183. 五次方程式問題	29

第二十二章 一元高次方程式通論31

184. 一元方程式的通形	31
185. 方程式的基本定理	32
186. 根的個數	32
187. 重根	33
188. 根與係數之關係	34
189. 根之對稱式	36
190. 虛根成雙	38
191. 笛卡兒符號律	40
192. 有理整式 $f(x)$ 的微商	42
193. $f(x+h)$ 的展式	43
194. 重根求法	44
195. 樂爾氏定理	46
196. 方程式變易之一	49

197	方程式變易之二	52
198.	方程式變易之三	53
199.	倒數方程式	54
200.	倒數方程式的解法	56
201.	求有理根	60
202.	求無理根忽拿氏法	61
203.	解方程式的普偏步驟	65

第二十三章 行列式68

204.	二級行列式	68
205.	三級行列式	70
206.	高級行列式之需要	74
207.	逆式	75
208.	高級行列式定義	78
209.	n 級行列式特性	80
210.	子行列式	88
211.	爲零的展式	93
212.	n 元 n 個一次方程組的通解	94
213.	一次齊次方程組的略解	99
214.	m 元 n 個一次方程的略解	100

第二十四章 序列 組合 或然率...106

215. 引論.....	106
216. 基本原理	106
217. 序列之定義	108
218. 序列之基本公式	108
219. 可以重複的序列	111
220. n 件不盡相異的序列	113
221. 組合之定義.....	115
222. 組合之基本公式	115
223. 雜例.....	117
224. 或然率之定義.....	121
225. 獨立事件及相倚事件	123
226. 不共立事件.....	125
227. 重複的嘗試	128

第二十五章 數學歸納法130

228. 數學歸納法	130
229. 歸納法必需證兩步	132

第二十六章 二項式定理134

230. 引論.....	134
231. 公項.....	136
232. 係數之關係	137
 第二十七章 極限	140
233. 引論.....	140
234. 極限之定義	140
235. 極限定理一	142
236. 極限定理二	142
237. 不定式	145
238. 不定式之極限.....	146
239. 方程式之有 ∞ 根者	148
 第二十八章 無盡連數級	152
240. 無盡連級數	152
241. 無盡連級數之收斂與發散	154
242. 收斂和發散的審定	154
243. 簡單定理	155
244. 比較審定法 I	157
245. 比較審定法 II.....	158

246. 輔助級數	159
247. 比值審定法	162
248. 間號級數	164
249. 正負項級數	166
250. 冪級數	167
251. 二項級數	170
252. 指數級數	170
253. 對數級數	171
254. 自然對數	173
漢英名詞索引	177
英漢名詞索引	185

代 數 學

下 冊

第 二 十 章

複素數 一元二項方程式

§ 168. 複素數. 凡以加減符號聯結虛實兩數成 $a+bi$ 之形, 此 $a+bi$ 全部視作一數名之曰複素數 (其中, a, b 爲實數, bi 爲虛數)

例如 $2+3i, \sqrt{-2}+\sqrt{7}, 1-\sqrt{3}i$ 皆爲複素數, $\sqrt{-3}+\sqrt{-5}$ 則爲虛數而非複素數.

§ 169. 複素數之基本運算. 學者既習虛數計算法, 對於複素數之基本運算, 已可不言而喻, 茲舉通例如下:

$$\begin{aligned}(1) \quad & (a+bi) + (c+di) \\ &= a+c+bi+di \\ &= (a+c) + (b+d)i.\end{aligned}$$

$$(2) \quad (a+bi) - (c+di)$$

$$= a - c + bi - di$$

$$= (a-c) + (b-d)i.$$

$$(3) \quad (a+bi)(c+di)$$

$$= ac + adi + bci + bdi^2$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

$$(4) \quad (a+bi) \div (c+di)$$

$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$= \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

§ 170. 複素數爲零的定義. 由前 (§123) 所述, 虛數與實數性質根本不同, 故虛實兩數之和決不能相消爲零. 如其爲零, 則必虛實兩數各自爲零, 所以有下之定義:

定義. 凡謂“複素數 $A+Bi=0$ ”即謂“ $A=0, B=0$ ”.

推論. 若 $a+bi=x+yi$, 則 $a=x, b=y$.

〔證〕 因 $a+bi=x+yi$, 故 $a-x+(b-y)i=0$.

依上述定義, 應得 $a-x=0, b-y=0$, 所以 $a=x, b=y$.

〔例〕 解方程式 $3x+2y+(3x-2y+5)i=2-3i$. 其中 x, y 爲實數.

〔解〕 依上之推論應得方程組

$$\begin{cases} 3x+2y=2 \\ 3x-2y+5=-3 \end{cases}$$

解之,得

$$x=-1, y=2\frac{1}{2}.$$

§ 150. 前節的應用. 前節原理,應用頗廣,茲舉兩種於下:

〔第一〕 演複數除法. $\frac{a+bi}{c+di}$ 時,應用前節原理,可

假定 $\frac{a+bi}{c+di}=x+yi$, (x, y 爲待定的實數).

則 $a+bi=(c+di)(x+yi)=(cx-dy)+(dx+cy)i$,

依前節推論得
$$\begin{cases} cx-dy=a \\ dx+cy=b \end{cases}$$

解之,得
$$\begin{cases} x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2} \\ y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

〔第二〕 求複素數 $a+bi$ 的平方根. 假定 $a+bi$ 的平方根是 $x+yi$, (其中 x, y 爲待定的實數),則

$$a+bi=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$$

依前節推論,得
$$\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases}$$

解之,得

$$\begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 + b^2}} \\ y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{a^2 + b^2} - 2a} \end{cases}$$

$$\therefore a+bi \text{ 的平方根是 } \pm \frac{1}{2} \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \pm i \sqrt{2\sqrt{a^2 + b^2} - 2a}.$$

習 題 八 十

1. 解下列各方程式(已知 x, y 各為實數):

(a) $(3x+2y-5)+(5-6x-7y)i=0.$

(b) $y+5x+6yi=x+3i-yi+8.$

(c) $2x+yi+3xi-y=5+6i.$

(d) $(a+bi)(x+yi)=(1+2i)(1+i).$

(e) $x+y+(x^2-y^2)i=5+5i.$

(f) $x+yi=y^2-y+(x^2-x)i.$

2. 仿 § 171 演下列各除法:

(a) $(3+2i) \div (4+i)$

(b) $5i \div (1-2i).$

(c) $10 \div (1+2i) \div (4-3i)$

(d) $a \div (c+di)^2.$

3. 仿 § 171 求下列各數的平方根(勿用公式):

(a) $1+i$

(b) $3-2i$

(c) $1-i$

(d) i

(e) $(1+2i)^3$

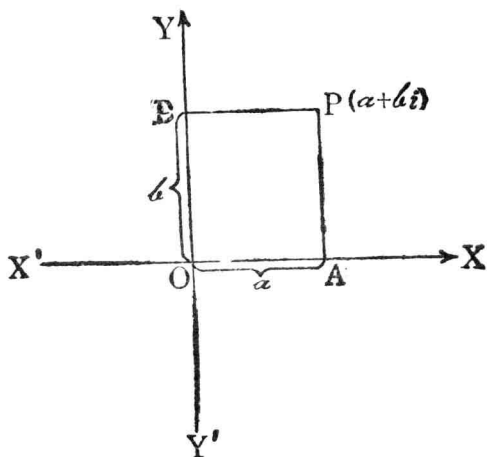
(f) $i^{\frac{1}{2}}$

4. 仿 § 171 求複數 $1+i$ 的立方根,有何困難?

§ 172. 複素數之圖形表示. 任何實數 a 可用直線上之一點表示, 前已言之 (§ 4), 任何複素數 $a+bi$ 可用平面上之一點表之. 茲述其步驟於下:

1. 先在平面上取正交兩直線 XOX' , YOY' , 以交點 O 爲原點, 並以定長 k 爲單位.

2. 次在 XOX' 上, 仿 § 4, 自 O 起量 $OA=a$ 個單位. 又在 YOY' 上自 O 起量 $OB=b$ 個單位, 如 a 爲正值, 沿 $\vec{OX}$ 量; 如 a 爲負值沿 $\vec{OX'}$ 量 (如 b 爲正值, 沿 $\vec{OY}$ 量; 如 b 爲負值, 沿 $\vec{OY'}$ 量).

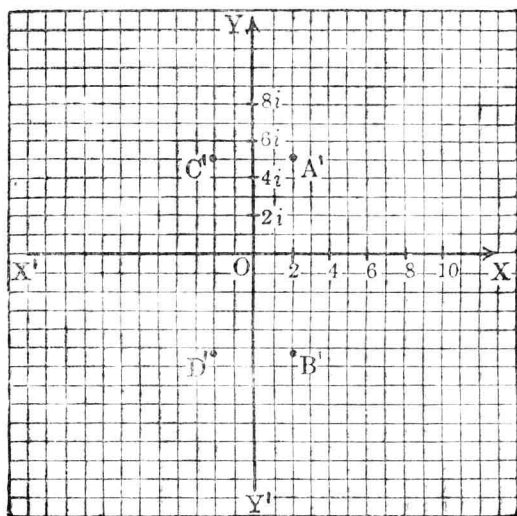


3. 過 A 作 $AP \parallel YOY'$, 過 B 作 $BP \parallel XOX'$, 則 AP , BP 之交點 P 即表複素數 $a+bi$.

此 P 點名曰複素數 $a+bi$ 之圖. XOX' 名曰實數軸, YOY' 名曰虛數軸.

學者注意: 依此法表示複素數, 則數系中每有一複素數, 平面上是否必有唯一之點與之對應? 反之, 平面上每有一點數系中是否必有唯一之複素數與之對應? 故點與複素數是否有一對一之關係? 然則 P 點足以表示複素數否?

例如, 有 $A \equiv 2+5i$, $B \equiv 2-5i$, $C \equiv -2+5i$, $D \equiv -2-5i$ 四複素數, 順次以右圖中 A' , B' , C' , D' 四點表之. 反之,



圖中 A', B', C', D' 四點順次代表 A, B, C, D 四複素數, A 與 A' 二者間有確定之關係, 但舉其一, 便定其他 (B 與 B', C 與 C', D 與 D' 亦然).

習題八十一

1. 作圖表示下列各複素數:

$$(a) 1+5i \quad (b) 5-i \quad (c) -3-4i \quad (d) 2-\sqrt{3}i$$

$$(e) -2+\sqrt{3}i \quad (f) m+ni \quad (g) -m+ni \quad (h) p-qi$$

2. 作圖表示下列各數:

$$(a) -3i \quad (b) \sqrt{5}i \quad (c) -ai \quad (d) +bi$$

$$(e) 1+i \quad (f) a+ai \quad (g) -p \quad (h) 0+0i$$

3. 欲求 $P=a+bi$ 與 $P'=c+di$ 之和, 乃在平面上先求出 P, P' . 次作 $PR \parallel OP'$, 作 $P'R \parallel OP$, 則 $PR, P'R$ 之交點 R , 即表 $P+P'$. 試證其理.

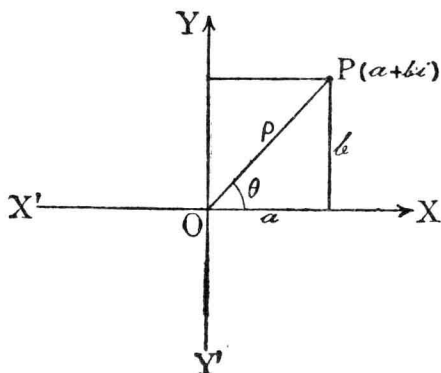
4. 欲求 P 與 P' 之差, 如何仿上題用圖形來表示?

5. 用圖形求下列各題中 P, P' 之和及其差.

$$(a) P=3+2i, P'=2+3i \quad (b) P=3-5i, P'=6-7i.$$

$$(c) P=-5-3i, P'=3+8i. \quad (d) P=-1-i, P'=-3-4i.$$

§ 173. 複素數之極坐標式. 在前節之圖內, 設 $OP = \rho$, $\angle XOP = \theta$, 則得下之公式:



$$(I) \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} & (1) \\ \cos \theta = \frac{a}{\rho} & (2) \\ \sin \theta = \frac{b}{\rho} & (3) \end{cases}$$

於是 $a+bi = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$.

此 $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ 名曰複素數 $a+bi$ 之極坐標式
其中 ρ 名曰 $a+bi$ 之幅模, θ 名曰 $a+bi$ 之軸角.

任何複素數 $a+bi$, 皆可利用公式 (I) [即先求 ρ 使
合 (1), 次求 θ 使合 (2), (3) 兩式], 化之爲極坐標式. 舉
例如下:

[例一] 用極坐標式表 $1-i$.

[解] $\rho = +\sqrt{1+1} = +\sqrt{2}$ (本題 $a=1, b=-1$).