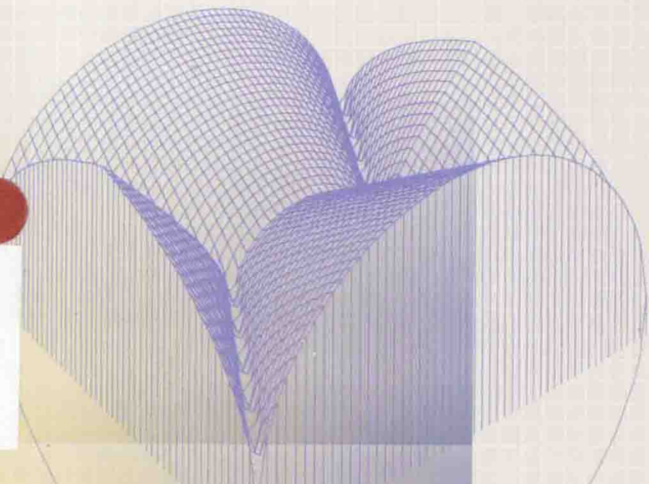
高　等　学　校　教　材

数学分析

Mathematical Analysis　（中册）

南开大学数学科学学院
刘春根　朱少红
李　军　丁龙云　主编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

数学分析

Shuxue Fenxi

（中册）

南开大学数学科学学院

刘春根　朱少红　李　军　丁龙云　主编

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书是南开大学数学科学学院数学分析课程组的老师在多年教学实践的基础上编写而成的。全书分上、中、下三册，介绍数学分析的基本内容。上册主要包括实数与函数、极限、连续函数、导数及其应用、实数理论及其应用、不定积分、定积分及其应用，中册主要包括多元函数的极限与连续、多元函数的微分学、重积分、曲线积分与曲面积分，下册主要包括数项级数、广义积分、一致收敛、幂级数、傅里叶分析、含参变量积分。本书配置了丰富的习题，这些习题分为三个层次。每节之后的“练习”比较容易，是供学习者理解本节知识的一类基本题；每章之后的“习题”分为A、B两组，其中A组题是供学习者理解本章知识的一类题，B组题有一部分是配给本章选学内容的，还有一部分是用来提高能力的，有一定难度。

本书可作为高等学校数学类专业的教材，也可供数学教学和科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析．中册/刘春根等主编．--北京：高等教育出版社，2014.1

ISBN 978-7-04-039055-1

Ⅰ.①数… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第301156号

策划编辑 兰莹莹　责任编辑 兰莹莹　封面设计 赵 阳　版式设计 杜微言
插图绘制 尹 莉　责任校对 窦丽娜　责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	三河市吉祥印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	850mm×1168mm 1/32		http://www.landraco.com.cn
印　　张	9.75	版　　次	2014年1月第1版
字　　数	256千字	印　　次	2014年1月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	14.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有　侵权必究

物 料 号　39055-00

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第十章 多元函数的极限与连续

多元函数是具有多个自变量的函数. 例如, $f(x, y) = x^2 + y^2$是一个二元函数, $f(x, y, z) = xyz$是一个三元函数, 等等. 相对于多元函数, 我们把过去学过的一个自变量的函数$y = f(x)$称为一元函数. 我们学习过一元函数微积分, 对于多元函数, 我们也要介绍其微分与积分等理论. 多元函数微积分与一元函数微积分有许多想法是相似的, 但是多元函数由于其定义域在具有较高维数的空间里, 除了运算的复杂性之外, 由于变化的多样性, 会有一些新的现象产生. 因此在我们学习多元函数微积分时, 既要注意到它与一元函数微积分的联系, 又要注意到它们之间的区别.

10.1 n维欧氏空间

一、n维欧氏空间

众所周知, 实数轴上的点与全体实数一一对应. 坐标平面上的点与所有有序实数对(x, y)一一对应, 空间中的点在建立空间直角坐标系之后与有序三元实数组(x, y, z)一一对应. 一般来说, 把有序n元

实数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$所组成的集合称为n维欧几里得(Euclid)空间, 简称n维**欧氏空间**, 记为$\mathbb{R}^n$, 即

$$\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|\, x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\}.$$

例如, 实数集为$\mathbb{R}^1$, 坐标平面为$\mathbb{R}^2$, 三维空间为$\mathbb{R}^3$.

$\mathbb{R}^n$中一个点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$常常简单记为

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

其中$x_i(i=1,2,\cdots,n)$称为X的第i个分量. 任取$X\in\mathbb{R}^n$, 我们既把它看作$\mathbb{R}^n$中的一个点, 又把它看作以原点$O=(0,0,\cdots,0)$为始点, X为终点的一个向量, 我们按以下法则定义向量的加法和数乘.

(i) 对于任意$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n),Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$X+Y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n).$$

(ii) 对于任意$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$和实数$\lambda$, 定义

$$\lambda X=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n).$$

按上述加法和数乘, 易证$\mathbb{R}^n$成为一个n维实线性空间, $O=(0,0,\cdots,0)$为其零元素. 从这个意义上说, 以后我们不区分$\mathbb{R}^n$中的点和以此点为终点、原点为起点的向量.

在$\mathbb{R}^n$中我们还可以定义向量的内积, 对任意$\mathbb{R}^n$中的两个向量$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, 定义它们的**内积**为

$$X\cdot Y=\langle X,Y\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

易见向量的内积满足

(1) $\langle X,X\rangle\geqslant 0$, 其中等式成立当且仅当$X=O$为零向量;

(2) $\langle X,Y\rangle=\langle Y,X\rangle$;

(3) $\langle X,Y+Z\rangle=\langle X,Y\rangle+\langle X,Z\rangle$;

(4) 对任何$\lambda\in\mathbb{R}$, $\langle\lambda X,Y\rangle=\lambda\langle X,Y\rangle$;

(5) 柯西不等式 $\langle X,Y\rangle^2\leqslant\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle$.

定义一个向量的范数(欧氏范数)$|X|=\sqrt{X\cdot X}$.向量的范数满足

(i) $|X|\geqslant 0$, 其中等式成立当且仅当$X=O$;

(ii) $|\lambda X| = |\lambda| \cdot |X|, \lambda \in \mathbb{R}$;

(iii) 三角不等式: $|X+Y| \leqslant |X| + |Y|$.

(i)与(ii)的证明可直接从定义得到. (iii)的证明要用到柯西不等式

$$\langle X, Y\rangle \leqslant |X| \cdot |Y|,$$

以及

$$\begin{aligned}\langle X+Y, X+Y\rangle &= |X|^2 + |Y|^2 + 2\langle X, Y\rangle \\ &\leqslant |X|^2 + |Y|^2 + 2|X| \cdot |Y| = (|X| + |Y|)^2.\end{aligned}$$

设$|X| \cdot |Y| \neq 0$, 则有唯一$\varphi \in [0, \pi]$, 使得

$$\cos\varphi = \frac{\langle X, Y\rangle}{|X| \cdot |Y|}.$$

这时称φ为向量X, Y的**夹角**.

令$\vec{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \vec{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)$, 则$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$构成$\mathbb{R}^n$的标准正交基: $X = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$, $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j\rangle = \delta_{ij}$, 当$i = j$时, $\delta_{ij} = 1$, 当$i \neq j$ 时, $\delta_{ij} = 0$. 一个线性变换$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$在标准正交基下可以用矩阵表示, 设与线性变换$A$相对应的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \end{pmatrix},$$

定义A的范数为$|A| = \sqrt{\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$, 则由柯西不等式有

$$|AX^{\mathrm{T}}| \leqslant |A| \cdot |X|.$$

称满足条件$\langle AX^{\mathrm{T}}, AY^{\mathrm{T}}\rangle = \langle X, Y\rangle$的线性变换$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$为正交变换, 正交变换把标准正交基变为标准正交基, 它与一个正交矩阵对应. 一个$n \times n$矩阵A为正交矩阵当且仅当$A^{\mathrm{T}}A = E$.

设$X, Y \in \mathbb{R}^n$, 定义这两点之间的**欧氏距离**为

$$d(X, Y) = |X - Y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

可以证明$\mathbb{R}^n$上的欧氏距离$d(X, Y) = |X - Y|$满足所谓距离公理

(i) 正定性: $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, $d(X,Y) \geqslant 0$, 且$d(X,Y)=0$ 的充要条件是 $X=Y$;

(ii) 对称性: $d(X,Y)=d(Y,X), \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$;

(iii) 三角形不等式:

$$d(X,Z) \leqslant d(X,Y)+d(Y,Z), \forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n.$$

事实上, $\mathbb{R}^n$中除了函数$d(X,Y)=|X-Y|$满足上面三个公理之外, 还有很多满足上面这三个公理的函数, 例如,

$$d_1(X,Y)=|X-Y|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|,$$
$$d_2(X,Y)=|X-Y|_\infty=\max\{|x_1-y_1|,\cdots,|x_n-y_n|\}$$

也满足公理(i)–(iii), 并且有

$$\frac{1}{\sqrt{n}}|X-Y|_1 \leqslant |X-Y| \leqslant \sqrt{n}|X-Y|_1, \tag{1}$$
$$|X-Y|_\infty \leqslant |X-Y| \leqslant \sqrt{n}|X-Y|_\infty. \tag{2}$$

$d_1(X,Y)=|X-Y|_1$与$d_2(X,Y)=|X-Y|_\infty$满足公理(i)–(iii), 读者自己完成证明, 不等式(2)的证明也较简单, 由读者自己证明. 下面证明不等式(1). 由柯西不等式, 有

$$|X-Y|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k| \leqslant \sqrt{n}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}.$$

从而

$$\frac{1}{\sqrt{n}}|X-Y|_1 \leqslant |X-Y|.$$

另一方面, 由不等式(2),

$$|X-Y| \leqslant \sqrt{n}|X-Y|_\infty \leqslant \sqrt{n}|X-Y|_1.$$

二、$\mathbb{R}^n$中的点列收敛

定义 1 设$\{X_m\}$是$\mathbb{R}^n$中的无穷点列, $X_0 \in \mathbb{R}^n$, 称点列$\{X_m\}$收敛于X_0 或X_0是点列$\{X_m\}$的极限, 记为 $\lim\limits_{m\to\infty} X_m = X_0$, 如果

$$\lim_{m\to\infty}|X_m-X_0|=0,$$

即任给$\varepsilon > 0$，存在正整数M, 使得当$m > M$时总有

$$|X_m - X_0| < \varepsilon.$$

对于任意实数$r > 0$和$X_0 \in \mathbb{R}^n$, 把$\mathbb{R}^n$中以X_0为中心, r为半径的开球

$$\{X \in \mathbb{R}^n |\, |X - X_0| < r\}$$

称为X_0的半径为r的**邻域**, 记为$B_r(X_0)$或者$B(X_0, r)$, 在忽略半径时, 也称为X_0的邻域, 记为$B(X_0)$. 点列$\{X_m\}$收敛于X_0, 其意义在于: 对于任意的$\varepsilon > 0$, 存在正整数M, 使得$\{X_m\}$中第M点以后的点全部进入$B_\varepsilon(X_0)$.

定理 1 设$X_0 = (x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n})$, $\mathbb{R}^n$中的点列

$$X_m = (x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{mn}), \quad m = 1, 2, 3, \cdots,$$

则$\{X_m\}$收敛到X_0的充分必要条件是$\{X_m\}$的每一个分量数列$\{x_{mi}\}$都收敛到x_{0i}, $i = 1, 2, \cdots, n$.

证 由不等式(2)可知, $\lim\limits_{m\to\infty} |X_m - X_0| = 0$当且仅当$\lim\limits_{m\to\infty} |X_m - X_0|_\infty = 0$. 而后者成立当且仅当$\lim\limits_{m\to\infty} |x_{mi} - x_{0i}| = 0$对于$i = 1, 2, \cdots, n$成立. □

作为定理的推论, 我们容易得到$\mathbb{R}^n$中点列的极限具有下述性质:

性质 1 极限的唯一性, 即$\mathbb{R}^n$中收敛点列的极限只能有一个.

性质 2 在$\mathbb{R}^n$中, 设$\lim\limits_{m\to\infty} X_m = X_0$, $\lim\limits_{m\to\infty} Y_m = Y_0$, α和β 是两个任意实数, 则点列$\{\alpha X_m + \beta Y_m\}$ 收敛, 且

$$\lim_{m\to\infty} (\alpha X_m + \beta Y_m) = \alpha X_0 + \beta Y_0.$$

关于实数列的柯西收敛原理可以推广到$\mathbb{R}^n$中的点列, 首先给出一个定义:

$\mathbb{R}^n$中的点列$\{X_m\}$称为**基本列或柯西列**, 如果任给$\varepsilon > 0$, 存在正整数M, 使得只要$m, l > M$, 就有

$$|X_m - X_l| < \varepsilon.$$

由不等式(2)可以看出, $\mathbb{R}^n$中的点列$\{X_m\}$是基本列的充分必要条件是数列$\{x_{mi}\}$对每一个固定的$i \in \{1, 2, \cdots, n\}$是基本列, 从而我们有下面的结论.

定理 2 (柯西收敛原理) $\mathbb{R}^n$中的点列$\{X_m\}$收敛的充分必要条件是$\{X_m\}$为基本列.

三、开集、闭集、区域

设$A \subseteq \mathbb{R}^n, P \in \mathbb{R}^n$, 现给出以下定义与记号: A在$\mathbb{R}^n$中的余集(补集)(记为A^c或者$\mathbb{R}^n \setminus A$)定义为 $A^c = \{X \in \mathbb{R}^n | \ X \notin A\}$. 一般地, 对于两个集合$A,\ B \subseteq \mathbb{R}^n$, 有$A \setminus B = A \cap B^c = \{X \in \mathbb{R}^n | \ X \in A,\ X \notin B\}$. 设$A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i,\ B = \bigcap\limits_{i \in I} A_i$, 则有下面的德摩根(De Morgan)律:

$$A^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c,\ \ B^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

如果A包含P的一个邻域. 则称P为A的**内点**. 若P是A^c的内点, 则称P为A的**外点**, 如果P既不是A的内点, 也不是A的外点, 即对于P的任意邻域$B(P)$均有$B(P) \cap A \neq \varnothing, B(P) \cap A^c \neq \varnothing$, 则称$P$是$A$的**边界点**. 如果$P$的任一邻域都含有$A$中的点, 则称$P$是$A$的**触点**. 如果$P$的任一邻域都含有$A$中异于$P$的点, 则称$P$是$A$的**聚点**. 若$P$是$A$的聚点, 则$P$的任何邻域内含有$A$中无穷多个点, 从而可以从$A$中构造出一个异于$P$并且收敛于$P$的点列. 因此聚点本质上是一个极限点. A的所有内点组成的集合称为A的**内部**, 记为A°, A的所有外点组成的集合称为A的**外部**. A的所有边界点组成的集合称为A的**边界**, 记为∂A. A的所有触点组成的集合称为A的**闭包**, 记

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

为$\overline{A}$. A的所有聚点组成的集合称为A的**导集**, 记为A'. 显然有以下关系:

(i) $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$, $A^\circ \subseteq A' \subseteq \overline{A}$;

(ii) $\overline{A} = A \cup \partial A = A' \cup \partial A = A^\circ \cup \partial A$;

(iii) $A^\circ = A \setminus \partial A = A' \setminus \partial A = \overline{A} \setminus \partial A$;

(iv) $(A^c)^\circ$是A的外部且$((A^c)^\circ)^c = \overline{A}$, $(\overline{A^c})^c = A^\circ$.

这些关系的证明留给读者. 若$P \in A \setminus A'$, 则存在P的邻域, 使得该邻域内属于A的点仅为 P, 这样的点称为A的**孤立点**. 此外, 易证以下性质:

(a) $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ, \overline{A} \subseteq \overline{B}$;

(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;

(c) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$.

定义 2　设$A \subseteq \mathbb{R}^n$,

(i) 若$A = A^\circ$, 则称A是**开集**;

(ii) 若$A = \overline{A}$, 则称A是**闭集**.

容易看出$A \subseteq \mathbb{R}^n$是开集当且仅当对于任意$X \in A$, 都存在一个正数r, 使得$B_r(X) \subseteq A$. A是闭集当且仅当它的余集A^c是开集. 显然$\mathbb{R}^n$是开集, 所以空集$\varnothing$是闭集, 而$\mathbb{R}^n$也是闭集, 从而$\varnothing$也是开集. 这样, $\mathbb{R}^n$与$\varnothing$是既开且闭的集合.

开集与闭集具有下述性质, 其中性质4由性质3与德摩根律易证, 留给读者作为练习.

性质 3　有限多个开集的交是开集, 任意多个开集的并是开集.

证　首先, 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$都是开集. 任取$X \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$, 则$X \in A_k$, $k = 1, 2, \cdots, n$. 因为A_k是开集, 所以存在$r_k > 0$, 使得$B_{r_k}(X) \subseteq A_k$. 令r=$\min\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$>0, 则$B_r(X)$⊆$B_{r_k}(X)$⊆$A_k$,

$k=1,2,\cdots,n$. 于是$B_r(X)\subseteq\bigcap_{k=1}^{n}A_k$, 由$X\in\bigcap_{k=1}^{n}A_k$的任意性知$\bigcap_{k=1}^{n}A_k$是开集. 这就证明了有限多个开集的交是开集.

其次, 设I是任意指标集, $O_i\ (i\in I)$都是开集. 任取$X\in\bigcup_{i\in I}O_i$, 则存在$i_0\in I$, 使得$X\in O_{i_0}$. 因为O_{i_0}是开集, 所以存在$r_0>0$, 使得$B_{r_0}(X)\subseteq O_{i_0}$. 于是$B_{r_0}(X)\subseteq\bigcup_{i\in I}O_i$, 由$X\in\bigcup_{i\in I}O_i$的任意性知$\bigcup_{i\in I}O_i$是开集. 这就证明了任意多个开集的并是开集. □

性质 4 有限多个闭集的并是闭集, 任意多个闭集的交是闭集.

性质 5 设$A\subseteq\mathbb{R}^n$, A为闭集的充要条件是: 对于A中任意点列$\{X_m\}$, 如果$\lim\limits_{m\to\infty}X_m=X_0$, 则$X_0\in A$.

证 必要性. 反证. 若$X_0\notin A$, 则$X_0\in A^c$. 因为A是闭集, 所以A^c是开集, 从而存在$r>0$, 使得$B_r(X_0)\subseteq A^c$. 又因为$\lim\limits_{m\to\infty}X_m=X_0$, 所以对上述$r>0$, 存在正整数$M$, 使得当$m>M$时有$|X_m-X_0|<r$. 于是当$m>M$时就有$X_m\in B_r(X_0)\subseteq A^c$, 与$X_m\in A$矛盾.

充分性. 任取$X_0\in\overline{A}$, 则X_0是A的触点, 故对任意$r>0$, $B_r(X_0)$都含有A中的点. 对每个正整数m, 任意取定一点$X_m\in B_{\frac{1}{m}}(X_0)$, 则由$|X_m-X_0|<\dfrac{1}{m}(m=1,2,\cdots)$知$\lim\limits_{m\to\infty}X_m=X_0$, 从而$X_0\in A$. 由$X_0$的任意性知$\overline{A}\subseteq A$. 又$A\subseteq\overline{A}$, 故$A=\overline{A}$, 按定义知$A$是闭集. □

注 若A中收敛点列的极限均属于A, 则通常称A为列闭集. 上面性质5说明在$\mathbb{R}^n$中闭与列闭等价.

我们称$D\subseteq\mathbb{R}^n$为**凸集**, 如果对任意$X_1,X_2\in D$, 线段$\{X\in\mathbb{R}^n|X=\lambda X_1+(1-\lambda)X_2,\lambda\in[0,1]\}\subseteq D$, 即凸集是“线段连通集”. 一般地, 如果把这里的线段换成某条连接X_1,X_2的

连续道路, 即对任意$X_1, X_2 \in D$, 存在一条D中的连续道路$\gamma: [0,1] \to D$(即$\gamma(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$中的每个函数$x_i(t)$均是连续的), 使$\gamma(0) = X_1$, $\gamma(1) = X_2$, 这时称集合D是**道路连通集**. 我们把$\mathbb{R}^n$中的道路连通开集称为(开)**区域**, 区域的闭包称为**闭区域**. 利用后面要讲的紧性可以证明：D是区域当且仅当D是折线连通开集, 即D是$\mathbb{R}^n$中的开集, 且对任意$X_1, X_2 \in D$, $X_1 \neq X_2$, 存在一条D中的以X_1为起点以X_2为终点的折线.

四、$\mathbb{R}^n$ 中有界闭集的列紧性与紧性

设$A \subseteq \mathbb{R}^n$, 如果存在$r > 0$, 使得A包含于以O点为中心, r为半径的球内, 则称A为有界集. 显然A为有界集的充要条件是, 存在$M > 0$, 使对任意$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A$均有

$$|x_i| \leqslant M, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

引理 1 (波尔查诺–魏尔斯特拉斯)　*设$\{X_m\}$是$\mathbb{R}^n$中的有界序列, 则它必有收敛的子序列.*

证　不妨设 $n = 2$. 记 $X_m = (x_m, y_m), m = 1, 2, 3, \cdots$. 由于$\{X_m\}$是$\mathbb{R}^2$中的有界序列, 从而$\{x_m\}$是有界实数列. 根据实数列的致密性定理可知$\{x_m\}$有收敛子列 $\{x_{m_k}\}$. 显然 $\{y_{m_k}\}$也是有界实数列, 从而它也存在收敛子序列$\{y_{m_{k_l}}\}$, 此时,$\{x_{m_{k_l}}\}$也收敛. 再用本节中的定理1可知$\{X_{m_{k_l}}\}$是$\mathbb{R}^2$中的收敛点列. □

设$A \subseteq \mathbb{R}^n$, 如果A中任意点列都有收敛于A中的点的子序列, 则称A是**列紧集**.

定理 3　*A是$\mathbb{R}^n$中的列紧集的充要条件是A为有界闭集.*

证　充分性. 设A是有界闭集. 任取A的点列$\{X_m\}$, 由波尔查诺–魏尔斯特拉斯引理可知$\{X_m\}$有在$\mathbb{R}^n$中收敛的子序列$\{X_{m_k}\}$, 记 $X_0 = \lim\limits_{k\to\infty} X_{m_k}$. 由于$A$是闭集, $X_{m_k} \in A, k = 1, 2, 3, \cdots$, 根据前面的性质5可知$X_0 \in A$.

必要性. 如果A不是有界集, 任取$X_1 \in A$. 利用A的无界性可知, 存在$X_2 \in A$, 使得

$$|X_2 - X_1| \geqslant 1.$$

再由A的无界性可知, 存在X_3, 使得

$$|X_3 - X_2| \geqslant 1, \quad |X_3 - X_1| \geqslant 1.$$

依此类推, 用数学归纳法易证, 存在A中的点列$\{X_m\}, m = 1, 2, 3, \cdots$, 使得对于任意$i \neq j$均有

$$|X_i - X_j| \geqslant 1.$$

显然$\{X_m\}$的任何子序列都不是$\mathbb{R}^n$中的基本列. 由柯西收敛原理可知$\{X_m\}$不存在收敛的子序列.

如果A是有界集, 但不是闭集, 则存在$X \in \overline{A}$, 但$X \notin A$. 取正数列$\{r_m\}$, 使得$r_m \to 0 \quad (m \to \infty)$. 由$X \in \overline{A}$, 从而$B(X, r_m) \cap A \neq \varnothing$, 取

$$X_m \in B(X, r_m) \cap A, \quad m = 1, 2, 3, \cdots.$$

显然$\{X_m\}$是A中的点列, 而且$\lim\limits_{m \to \infty} X_m = X \notin A$. 于是$\{X_m\}$也不存在收敛于$A$中点的子序列.

综上两种情况可知, 若A不是有界闭集, 则A不是列紧集. 必要性得证. □

设$A \subseteq \mathbb{R}^n$, I是任意指标集. $\{O_i\}_{i \in I}$称为A的开覆盖, 如果每一个$i \in I$, O_i是$\mathbb{R}^n$中的开集, 而且

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i.$$

如果J是I的子集, 且$\{O_i\}_{i \in J}$也是A的开覆盖, 则称$\{O_i\}_{i \in J}$是开覆盖$\{O_i\}_{i \in I}$的子覆盖, 在此情况下, 当J是I的有限子集时, $\{O_i\}_{i \in J}$称为$\{O_i\}_{i \in I}$的有限子覆盖. 如果A的任一开覆盖都存在有限子覆盖, 则称A是**紧集**.

引理 2 对于$r>0$, 记

$$\Omega(r)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n|\ -r\leqslant x_i\leqslant r,i=1,2,\cdots,n\},$$

则$\Omega(r)$是$\mathbb{R}^n$中的紧集.

为证此引理, 我们先陈述类似于区间套定理的"闭方体套定理", 其证明是区间套定理的直接应用.

引理 3 设$Q_j=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n|\ a_{ji}\leqslant x_i\leqslant b_{ji},i=1,2,\cdots,n\}$, $j\in\mathbb{N}^*$满足条件

(i) $Q_j\supseteq Q_{j+1}$, $\forall j\in\mathbb{N}^*$;

(ii) $\displaystyle\lim_{j\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(b_{ji}-a_{ji})^2=0.$

则存在唯一点$X_0\in\displaystyle\bigcap_{j=1}^{\infty}Q_j$.

对于$\mathbb{R}^n$的子集Q, 我们定义它的**直径**为

$$d(Q)=\sup\{|X-Y|\mid X,Y\in Q\}.$$

这里条件(ii)的意义是Q_j的直径(对角线长)$d(Q_j)$收敛于零.

引理2的证明 我们用反证法, 反设存在$\Omega(r)$的一个开覆盖$\{O_i\}_{i\in I}$不存在有限子覆盖. 由于这个证明与维数没有本质关系, 我们仅对$n=2$证明. 用过对边中点的线段把$Q_1=\Omega(r)$分成四个闭子集, 则存在一个闭子集Q_2, 能被$\{O_i\}_{i\in I}$覆盖但不能被$\{O_i\}_{i\in I}$中的有限个开集覆盖. 用数学归纳法可以证明, 存在这样的集合序列Q_j满足引理3的两个条件, 并且每个集合Q_j能被$\{O_i\}_{i\in I}$覆盖但不能被其中的有限个开集覆盖. 由引理3, 存在唯一点$X_0\in\displaystyle\bigcap_{j=1}^{\infty}Q_j$. 一定存在一个$i_0\in I$, 使得$X_0\in O_{i_0}$, 由于$O_{i_0}$为开集, 存在$\delta>0$, 使得$B_\delta(X_0)\subseteq O_{i_0}$. 由引理3的条件(ii), 存在$j_0$, 使得$(b_{j_01}-a_{j_01})^2+(b_{j_02}-a_{j_02})^2<\delta^2$, 从而有$Q_{j_0}\subseteq B_\delta(X_0)\subseteq O_{i_0}$. 这说明$Q_{j_0}$被一个开集$O_{i_0}$覆盖了, 矛盾. □

定理 4 (海涅–博雷尔) 设$A \subseteq \mathbb{R}^n$, 则A是紧集的充要条件是A为有界闭集.

证 设A是紧集, 可以证明A是列紧集. 否则存在A中的点列$\{X_m\}$, 使得它没有收敛于A中点的子序列, 于是对于每一个$X \in A$, 存在X的一个邻域$B(X)$和自然数$l(X)$, 使得当$m > l(X)$时

$$X_m \notin B(X).$$

显然$\{B(X)\}_{X\in A}$是A的开覆盖, 由A的紧性可知存在A中有限个点$Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$, 使得

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(Y_i).$$

令$l = \max\{l(Y_1), l(Y_2), \cdots, l(Y_k)\}$, 则当$m > l$时

$$X_m \notin A,$$

这与$\{X_m\}$是A中的无穷点列矛盾! 从而A是列紧集, 由定理3可知A是有界闭集.

反之, 设A是有界闭集. 易知存在$r > 0$, 使得$A \subseteq \Omega(r)$, 其中$\Omega(r)$如引理2中所述. 设$\{O_i\}_{i\in I}$是A的开覆盖. 由于A为闭集, 从而A^c是$\mathbb{R}^n$中的开集. 显然$\{O_i\}_{i\in I} \cup \{A^c\}$是$\Omega(r)$的开覆盖. 由$\Omega(r)$的紧性可知存在$I$的有限子集$F$, 使得$\{O_i\}_{i\in F} \cup \{A^c\}$是$\Omega(r)$的开覆盖. 于是$\{O_i\}_{i\in F}$是$A$的开覆盖, 所以$A$是紧集. □

由定理3和定理4可知: 在$\mathbb{R}^n$中有界闭、列紧、紧三者等价.

$\mathbb{R}^n$中有界闭集的列紧性与紧性是十分重要的, 下面给出一个命题的证明说明列紧性与紧性的应用, 同时该命题的结论也是很有用的.

例 1 设A是$\mathbb{R}^n$中的有界闭集, $\{O_i\}_{i\in I}$是A的开覆盖. 则存在$\delta > 0$, 使得$\mathbb{R}^n$中的集合B只要满足

$$B \cap A \neq \varnothing, \quad d(B) = \sup_{X,Y\in B} |X - Y| < \delta,$$

就存在$i \in I$, 使得$B \subseteq O_i$.

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com