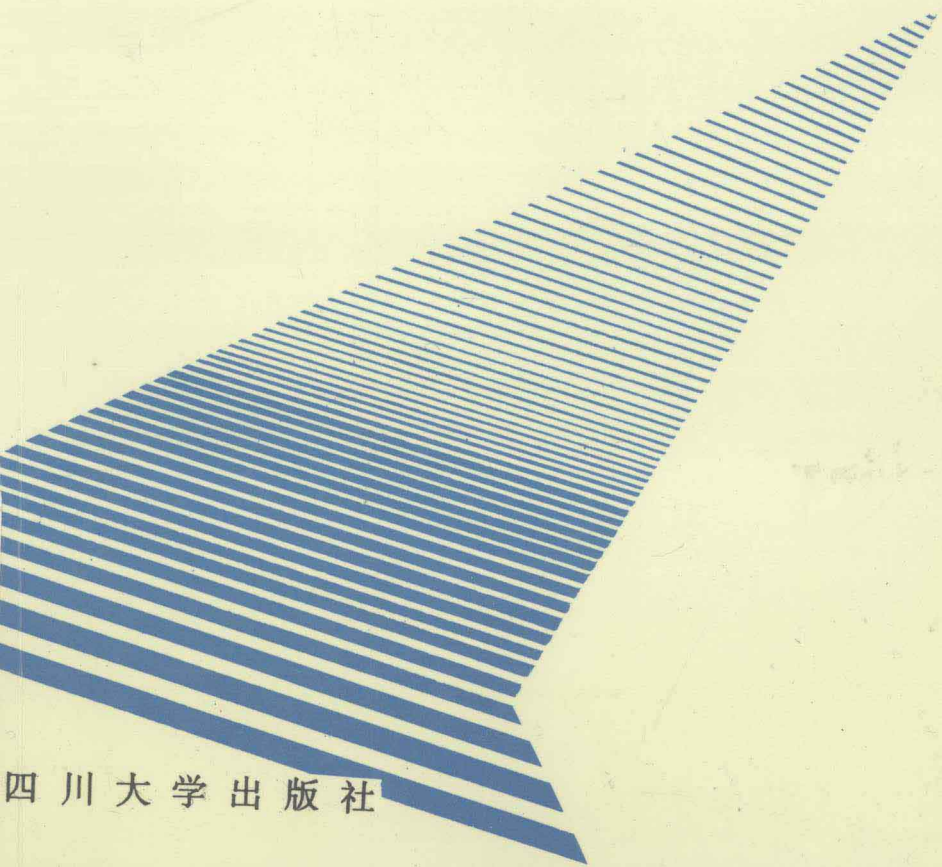


经济数学基础《中》

线性代数

主 编 魏有德
副主编 李文高



四川大学出版社

经济数学基础(中)

线性代数

主 编：魏有德

副主编：李文高

编 者：王继炳 方儒新 钟 波

四川大学出版社

1995年·成都

责任编辑:樊程方 封面设计:冯先洁
技术设计:樊程方 责任印制:李 平

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/魏有德主编. —成都:四川大学出版社,
1993.2(2000.11 重印)

ISBN 7-5614-0737-8

I. 线... II. 魏... III. 线性代数—高等学校—教材
IV. D151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 58635 号

内容提要

本书是《经济数学基础》第二版的中册,内容为线性代数,全书分行列式、矩阵、线性方程组、向量空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型等六章。

第二版是在初版基础上,根据教委新颁“教学大纲”重新编写的。鉴于线性代数在经济领域的广泛应用,新版把重点放在方法和财经应用的论述,而不强调数学理论的完整;取材和编排考虑了经济类专业学生的数学基础,也考虑了本科和专科的差异,便于教,便于学;习题安排了两个层次,节后练习侧重基础知识训练,章末习题则侧重综合训练和提高。

本书可作为高校本科和专科财经类专业的教材,也可作为成人高校同类专业的教材和在职职工自学用书。

书名 经济数学基础(中) 线性代数

主 编 魏有德
出 版 四川大学出版社
地 址 成都市一环路南一段 24 号 (610065)
印 刷 郫县犀浦印刷厂
发 行 四川大学出版社
开 本 850 mm×1 168 mm 1/32
印 张 8.25
字 数 192 千字
版 次 2000 年 2 月第 2 版
印 次 2004 年 7 月第 6 次印刷
印 数 22 001~26 000 册
定 价 12.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科
联系。电 话:85408408/85401670/
85408023 邮 政 编 码:610065

◆本社图书如有印装质量问题,请
寄回印刷厂调换。

◆网址:www.scupress.com.cn

版权所有◆侵权必究

前 言

《经济数学基础》是大学本科、专科财经类专业的必修基础课程,它包括微积分、线性代数、概率与数理统计等内容。

这本《线性代数》是《经济数学基础》的中册,是在四川大学数学系经济数学教研室多年教学的基础上,根据国家教委新颁布的“教学大纲”,并参考初版书有关内容,重新编写而成的。新版书的编写原则是:从第一线实际教学要求出发,教师便于安排组织教学,学生易于接受和自学。本书的特点是:(一)注意保持较大的适应性,使本教材既适用于经济和管理类专业的本科教学,也适用于专科和成人教育的同类专业的教学。各校可按教学大纲的不同要求,选取其中有关部分进行教学。(二)在注意理论的严密性和完整性的同时,侧重于方法和它与实际问题联系的讲授,做到教师好教,学生易学。(三)配备两个层次的练习题,便于教学和因材施教。每节后我们配备了基础知识练习,为教学的基本要求;每章后又配备了一些综合练习题,供教师和学生选用。

全书包括行列式、矩阵、线性方程组、向量空间、矩阵的特征值和特征向量、二次型等六章。按教学计划,本科授完这些内容,约需72学时。专科、函授、夜大及短训班,可选讲第一至第四章,以及第五章的部分内容,约56学时。

本书由魏有德、李文高主编。各章执笔者为:第一章,钟波;第二、三、四章,王继炳;第五、六章,方儒新。

不妥之处,恳请读者批评指正。

编者

1992年12月

目 录

第一章 行列式

§ 1.1 行列式概念	(1)
§ 1.2 行列式的性质	(10)
§ 1.3 行列式按行列展开	(20)
§ 1.4 克莱姆法则	(28)
习题一	(36)

第二章 矩 阵

§ 2.1 矩阵的概念及运算	(39)
§ 2.2 几种特殊的矩阵	(57)
§ 2.3 逆矩阵	(61)
§ 2.4 矩阵的初等变换	(66)
§ 2.5 矩阵的秩	(81)
§ 2.6 分块矩阵	(85)
习题二	(94)

第三章 线性方程组

§ 3.1 消元法解线性方程组	(97)
§ 3.2 n 维向量	(110)
§ 3.3 向量组的秩	(121)
§ 3.4 线性方程组解的结构	(126)

习题三.....	(135)
----------	-------

第四章 向量空间

§ 4.1 向量空间	(138)
§ 4.2 向量的内积	(145)
§ 4.3 正交矩阵与正交变换	(150)
习题四.....	(156)

第五章 矩阵的特征值和特征向量

§ 5.1 矩阵的特征值和特征向量	(158)
§ 5.2 矩阵级数	(178)
§ 5.3 投入产出分析	(190)
习题五.....	(202)

* 第六章 二次型

§ 6.1 二次型与对称矩阵	(204)
§ 6.2 用初等变换化二次型为标准形	(207)
§ 6.3 用正交变换化二次型为标准形	(216)
§ 6.4 二次型的分类	(218)
习题六.....	(228)

练习与习题答案.....	(230)
--------------	-------

第一章 行列式

无论在生产管理活动中,还是在商品流通和交换过程中,许多变量之间的相互关系,在一定程度上可分为线性关系和非线性关系两大类. 线性代数就是研究变量之间的线性关系的一门基础学科. 行列式是研究线性代数的不可缺少的工具. 本章在给出二阶、三阶行列式的基础上,引出 n 阶行列式的概念,讨论行列式的性质,以及行列式的计算方法,最后应用 n 阶行列式解 n 个方程联立的 n 元线性方程组.

§ 1.1 行列式概念

行列式概念可以从解线性方程组引入. 未知量是一次的方程称为线性方程. 两个方程的二元线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 x_1, x_2 为未知量,系数 $a_{ij} (i, j = 1, 2)$ 的第一个脚标 i 表示这个系数处在第 i 个方程,第二个脚标 j 表示这个系数是第 j 个未知量的系数.

由消元法知,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,方程组(1.1)有解:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (1.2)$$

为研究方便,对于(1.2)的分母引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.3)$$

这样规定的记号(1.3)称为**二阶行列式**,其中 a_{ij} 称为此二阶行列式的**元素**,横排称为**行**,竖排称为**列**.根据(1.3)的规定,对(1.2)的分子,我们分别引进记号

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

这里 D_1, D_2 是用常数项 b_1, b_2 分别代替 D 中第一列与第二列元素所得的行列式.于是在 $D \neq 0$ 时,方程组(1.1)的解可用行列式简明地表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad (1.4)$$

例1 用行列式解二元一次方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 13 \\ 6x_1 + 4x_2 = 16 \end{cases}$$

解 先计算三个二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 5 \times 4 - 3 \times 6 = 2,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 16 & 4 \end{vmatrix} = 13 \times 4 - 3 \times 16 = 4,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 6 & 16 \end{vmatrix} = 5 \times 16 - 13 \times 6 = 2.$$

因为 $D \neq 0$,所以方程组有解,其解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{2} = 1.$$

二阶行列式表示的代数和,可用图1.1的**对角线法则**记忆,其

中实线联结两元素的乘积取正号,虚线联结两元素的乘积取负号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1.1

类似地,为了讨论三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.5)$$

的解,引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1.6)$$

(1.6)的左端称为**三阶行列式**.行列式的元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表示这元素位于第 i 行,称为**行标**,第二个下标 j 表示该元素位于第 j 列,称为**列标**.

(1.6)的右端为左端三阶行列式表示的代数数和,可用图 1.2 的**对角线法**则记忆.其中实线联结元素的乘积取正号,虚线联结元素的乘积取负号.

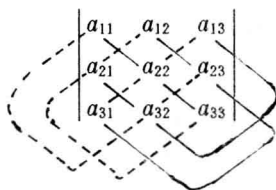


图 1.2

例 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \times 7 \times 8 + 4 \times (-2) \times 2 + (-5) \times 8 \times (-1) - 3 \times (-2) \times (-1) - 4 \times 8 \times 8 - (-5) \times 7 \times 2 = 0.$$

(1.6) 左端的三阶行列式是由方程组(1.5)的系数构成的,称为(1.5)的**系数行列式**.由消元法可知,当系数行列式不为零时,

(1.5) 有解,其解可用行列式表为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \quad (1.7)$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

上述二元、三元线性方程组的行列式解法可以推广到 n 个方程的 n 元线性方程组上去,但对角线规则已不适用,须引入新的概念和计算规则.

定义 1.1 由 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个不重复的有序数组称为一个 n 阶排列.

例如,1234 和 1423 是两个 4 阶排列,35241 是一个 5 阶排列,54124 不是 5 阶排列.

n 阶排列的总数为 $n!$ 个. 在全部 $n!$ 个 n 阶排列中, $123 \cdots (n-1)n$ 是唯一按自然顺序组成的排列,称为 n 阶标准排列. 在 4 阶排列 1432 中,4 比 3 大,但 4 排在 3 前面,与由小到大的自然顺序相反,称 4 和 3 这对数构成一个逆序. 在排列 1432 中,构成逆序的数对还有 42, 32. 因此,排列 1432 有 3 个逆序,称排列 1432 的逆序数为 3. 一般地有

定义 1.2 一个排列中的两个数,如果排在前面(左边)的大于排在后面(右边)的,就称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数.

n 阶排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数记为

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$$

例如排列 1432 的逆序数为 3, 记为 $\tau(1432) = 3$. n 阶标准排列的逆序数 $\tau(12 \cdots n) = 0$.

定义 1.3 逆序数是奇数的排列称为**奇排列**, 逆序数是偶数的排列称为**偶排列**.

例如, $\tau(1432) = 3$, 因此 1432 是奇排列, $\tau(4321) = 6$, 所以 4321 是偶排列. 1234 也是偶排列.

在分析行列式各项符号时, 要把一个 n 阶排列变换为另一个 n 阶排列. 最简单的变换是把排列中的两个数互换位置, 其余数不动, 这种变换称为**对换**.

例如, 排列 1234 经 1 与 4 的对换变为排列 4231. 因 1234 为偶排列, 4231 为奇排列, 即此排列经一次两个数的对换改变了奇偶性.

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性.

证 先证对换相邻两数的特殊情形. 设原排列

$$A i j B$$

经相邻两数 i 与 j 的对换变为新排列

$$A j i B$$

其中 A, B 表示除 i, j 之外未变动的数. 比较这两个排列的逆序. 显然, A, B 中的逆序个数没有改变; i, j 与 A, B 中任何一个数的逆序也未改变; 改变的仅仅是 i 与 j 的次序, 当 $i < j$ 时, 新排列增加一个逆序, 当 $i > j$ 时, 新排列减少一个逆序. 不论增加或是减少一个逆序, 排列的奇偶性总是改变了. 因而, 相邻对换改变排列的奇偶性.

再证所对换的两个数之间还有 s 个数的情形. 设原排列

$$A i K_1 K_2 \cdots K_s j B$$

经 i 与 j 的对换变为新排列

$$A j K_1 K_2 \cdots K_s i B$$

新排列可以看成是从原排列出发, 将 i 顺次与 $K_1, K_2, \cdots, K_s, j$

作 $s+1$ 次相邻对换, 变为中间排列

$$A K_1 K_2 \cdots K_s j i B$$

再由这个中间排列出发, 将 j 顺次与 $K_s, \cdots, K_2, K_1$ 作 s 次相邻对换得到的. 也即 i 与 j 的对换可经 $2s+1$ 次相邻对换来实现. 一次相邻对换改变排列的奇偶性, $2s+1$ 是奇数, 奇数次改变奇偶性的结果, 必然改变排列的奇偶性. 因此, 一般情况下, 一次对换改变排列的奇偶性.

定理 1.2 在全部 $n(n \geq 2)$ 阶排列中, 奇排列与偶排列的个数相等, 都是 $n!/2$ 个.

证 设全部 n 阶排列中有 p 个奇排列, q 个偶排列. 将每个奇排列都对换 1 与 2, 由定理 1.1 知, p 个奇排列变为 p 个不同的偶排列, 因偶排列总数为 q , 所以, $p \leq q$; 同理, 将 q 个偶排列都对换 1 与 2, 可得 $q \leq p$. 因此, $p = q$, 即奇偶排列数相等.

现在来看三阶行列式 (1.6) 右端的结构. 可以看出, 三阶行列式等于所有位于不同行不同列的元素的乘积的代数数和, 其项数为 $3!$, 正负项各占一半, 每项的符号为: 当这一项元素的行标按自然顺序排列时, 列标的排列若是偶排列, 则取正号; 列标的排列若是奇排列, 则取负号. 三阶行列式的这个特点, 对于用行列式解 n 个方程联立的 n 元线性方程组, 可以推广.

定义 1.4 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 排成 n 行 n 列, 两边各加一条竖直线段, 构成记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

在赋予它如下取值规则之后, 称为 n 阶行列式. 取值规则为: n 阶行列式表示所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数数和; 各项的符号为: 当这一项中元素行标为标准排列时, 若对应列标的排

列为偶排列,则该项取正号,若对应列标为奇排列,则该项取负号.

n 阶行列式定义的数学表达式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1.9)$$

这里 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 n 阶排列, $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和, $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 为行列式的一般项, 每个 a_{ij} 都称为行列式的元素, 横排称为行, 竖排称为列, (1.9) 的右端称为行列式的展开式. (1.8) 中从左上角到右下角的对角线叫主对角线. n 阶行列式简记为 D 或 $|a_{ij}|$. 当 $n=1$ 时, 由一个元素 a 构成的一阶行列式规定为 a .

由定理 1.2 知, n 阶行列式共有 $n!$ 项, 正负项各占一半(不含元素本身的符号).

例 3 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $a_{ii} (i=1, 2, \cdots, n)$ 不全为零, 这个行列式主对角线右上方元素全为零, 称为下三角形行列式.

解 D 中不少元素为零, 从而很多项都是零, 只要把不为零的项找出来相加即可. 先看零元最多的第一行, D 的一般项中 a_{1j_1} 取自第一行, 第一行仅 $a_{11} \neq 0$, 因此 D 中只有含 a_{11} 的项不为零; 再看第二行, 一般项中 a_{2j_2} 取自第二行, 第二行只有 a_{21}, a_{22} 不为零, 而 a_{11} 已取自第一列, a_{2j_2} 就不能再取第一列, 只能取 a_{22} , 所以 D 中只有含 $a_{11}a_{22}$ 的项不为零. 由此推知, D 中只有含 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项不为零.

又因 $\tau(12\cdots n) = 0$, 所以

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理可得上三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地, 对角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

在 n 阶行列式的定义中, 确定各项符号时, 每一项的 n 个元素的行标都是取的标准排列, 由于数的乘法具有交换律, 因此可以把这 n 个元素的行标按任意顺序排列, 这时行列式各项符号该如何确定呢?

定理 1.3 n 阶行列式的一般项可以写为

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \quad (1.10)$$

证 首先, 因为 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 均为 n 阶排列, 所以 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 是 D 中取自不同行不同列的元素的乘积. 其次, 将 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 中元素作两两对换, 将行标变为标准排列, 这时列标变为排列 $K_1 K_2 \cdots K_n$. 因为每作一次两个元素的对换, 行标与列标所成排列都同时作一次对换, 其逆序数都同时改变奇偶性, 因而其逆序数总和的奇偶性不变. 也即

$$\begin{aligned} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} &= (-1)^{\tau(12\cdots n) + \tau(K_1 K_2 \cdots K_n)} \\ &= (-1)^{\tau(K_1 K_2 \cdots K_n)} \end{aligned}$$

所以(1.10) 就是(1.9) 的一般项.

由定理 1.3, 我们有

$$D = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \dots i_n) + \tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}. \quad (1.11)$$

特别地有

$$D = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \dots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \quad (1.12)$$

其中 $\sum_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 表示对所有 n 阶排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 求和.

例 4 计算下列四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

解 这个四阶行列式各行各列均只有一个元素不为零, 因此, 这行列式只有一项不为零, 它是这四个非零元素的乘积带上相应的符号. 由(1.11) 可得

$$D = (-1)^{\tau(2314) + \tau(1234)} a_{21} a_{32} a_{13} a_{44} = a_{21} a_{32} a_{13} a_{44}$$

$$\text{或者} \quad D = (-1)^{\tau(1234) + \tau(3124)} a_{13} a_{21} a_{32} a_{44} = a_{13} a_{21} a_{32} a_{44}$$

$$\text{或者} \quad D = (-1)^{\tau(4312) + \tau(4231)} a_{44} a_{32} a_{13} a_{21} = a_{44} a_{32} a_{13} a_{21}$$

练习 1 - 1

1. 计算下列行列式:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & (2) \quad & \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} & (3) \quad & \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} \\ (4) \quad & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} & (5) \quad & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} & (6) \quad & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$(7) \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 9 \\ 5 & 6 & 12 \end{vmatrix} \quad (8) \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

2. 利用行列式解方程组:

$$(1) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 = 13 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

3. 求下列排列的逆序数, 并指出其奇偶性.

$$(1) 3214; \quad (2) 52143; \quad (3) 43521;$$

$$(4) n(n-1)\cdots 321.$$

4. 用定义计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

5. 若 $(-1)^{\tau(1K2l)} a_{11} a_{K2} a_{23} a_{l4}$ 是四阶行列式的一项, 则 K, l 之值及该项符号为 ():

(a) $K=3, l=4$, 符号为正; (b) $K=3, l=4$, 符号为负;

(c) $K=4, l=3$, 符号为正; (d) $K=4, l=3$, 符号为负.

§ 1.2 行列式的性质

用定义计算行列式, 一般要计算 $n!$ 项. 为避免 n 较大时计算量

很大的麻烦,我们讨论行列式的性质.

定义 1.5 将行列式 D 的行与列互换所得到的行列式,称为 D 的转置行列式,记为 D^T 或 D' . 即

$$\begin{array}{l} \text{若} \\ \\ \text{则} \end{array} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.13)$$

性质 1 将行列式转置,行列式不变. 即 $D = D^T$.

证 若记

$$D^T = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 与 D^T 的元素之间满足关系

$$a_{ij} = b_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

将此关系代入(1.9)得

$$\begin{aligned} D &= \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_n n} \end{aligned}$$

由(1.12)知道,上式右端等于 D^T . 所以 $D = D^T$.

性质 1 说明,行列式中行与列的地位是对称的,凡有关行成立的性质,对列也成立. 下述各性质,是对行说的,对列也成立.

性质 2 交换行列式两行,行列式变号.