21世纪独立本科院校规划教材

大学数学教程

微分方程与线性代数

南京大学金陵学院　陈　仲　编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

大学数学教程

微分方程与线性代数

陈　仲　编著

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

本书是普通高校“独立学院”本科“微分方程与线性代数”课程的教材，包含常微分方程、行列式与矩阵、向量与线性方程组、特征值问题与二次型、线性空间与线性变换等五章. 其中近九成的篇幅是线性代数的内容，所以本书也可用作“线性代数”课程的教材.

本书在深度和广度上符合教育部审定的“高等数学课程教学基本要求”，并参照教育部考试中心颁发的报考硕士研究生《数学考试大纲》中数学一与数学三的知识范围. 编写的立足点是基础与应用并重，注重数学的思想和方法，注重几何背景和实际意义，部分内容有更新与优化，并适当地渗透现代数学思想，适合独立学院培养高素质应用型人才的目标.

本书结构严谨，难易适度，语言简洁，可作为独立学院、二级学院“微分方程与线性代数”或“线性代数”课程的教材，也可作为科技工作者自学“微分方程与线性代数”的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微分方程与线性代数 / 陈仲编著. —南京：东南大学出版社，2014. 1

ISBN 978 - 7 - 5641 - 4673 - 3

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①微分方程②线性代数 Ⅳ. ①O175②O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 291287 号

微分方程与线性代数

出版发行	东南大学出版社
社 址	南京市四牌楼 2 号(邮编：210096)
出 版 人	江建中
责任编辑	吉雄飞(办公电话：025 - 83793169)
经 销	全国各地新华书店
印 刷	南京京新印刷厂
开 本	700mm×1000mm 1/16
印 张	16. 75
字 数	328 千字
版 次	2014 年 1 月第 1 版
印 次	2014 年 1 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978 - 7 - 5641 - 4673 - 3
定 价	32. 00 元

本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系，电话：025 - 83791830。

前　　言

在高等教育办学体制深化改革的大好形势下，高等教育的新模式“独立学院”应运而生．一流大学搞科研，培养研究型人才；高职高专学技术，培养技能型人才．依托一流名校的独立学院的培养目标是培养高素质的具有创新精神的应用型人才．高素质的应用型人才，是既要动手又能动脑，既能实践又能设计，既会应用又懂原理的高素质的、深受社会和大企业欢迎的人才．认清这个培养目标，对我们编写独立学院“大学数学”课程的教材具有指导意义．

可以说，数学是科学的“语言”，是学习一切自然科学的“钥匙”，数学素养已成为衡量一个国家科技水平的重要标志．独立学院“大学数学”课程，是培养应用型人才的重要的必修课，它不同于综合性大学的“大学数学”，也不同于一般高职高专院校的“大学数学”．我们编写本书的立足点是基础与应用并重，以提高数学素养为总目标．

在基础与应用并重的思想指导下，我们对原有“微分方程与线性代数”课程的教学内容进行全面筛选和优化，带着问题开展教学研究，编写教材与教学实践密切结合，在实践中编写，编写后再请教学团队实践，广泛征求意见，多次修改，期待完善．在编写过程中，努力做到：

(1) 在深度和广度上符合教育部审定的高等院校“高等数学课程教学基本要求”，并参照教育部考试中心颁发的报考硕士研究生《数学考试大纲》中数学一与数学三的知识范围．在独立学院中，有大约20%的优等生，他们因为高考失手，没有考上理想的高校，进入独立学院后，他们发奋努力，立志考研．我们编写教材时在深度上不可能为他们考虑太多，但在广度上我们应尽可能达到考研的知识范围．

(2) 注重数学的思想和方法，适当地渗透现代数学思想，运用部分近代数学的术语与符号，以求符合独立学院培养高素质应用型人才的目标．我们的教学任务除使学生获得“大学数学”的基本概念、基本理论和基本方法外，还要使学生受到一定的科学训练，学到数学思想方法，提高逻辑推理能力，为学生学习后继课程提供必要的数学基础，为学生大学毕业后胜任工作或继续深造积累潜在的能力．

(3) 通过教学研究，将一些经典定理、公式的结论或证明加以更新与优化，既改革了教学内容，又丰富了大学数学的内涵．

我们的目标是结构严谨、难易适度、语言简洁、适合培养目标、贴近教学实际、便于教与学.

本书包含常微分方程、行列式与矩阵、向量与线性方程组、特征值问题与二次型、线性空间与线性变换等五章，适用于独立学院文、理科各专业. 对“大学数学”要求高的系科、专业，如通信、电子、计算机等可全部讲授；对“大学数学”要求较高的系科、专业，如城资、地质、化学、环科、财管、国贸、金融、新闻等在讲授时可略去向量空间及其基变换、坐标变换、过渡矩阵等概念. 本书除一章微分方程外，近九成的篇幅是线性代数的内容，所以本书也可用作“线性代数”课程的教材. 本书可安排一个学期，每周 4 学时，共 64 学时讲授.

本书中四周加框的内容是重要公式、重要方法、重要定义，是要求学生熟记的主要知识点(由于加框条件的限制，这不是要求学生熟记的全部知识点). 书中用 * 标出的段落为较难内容，供任课教师选用，一般留给有兴趣的学生课外阅读或查阅. 书中习题分 A,B 两组，A 组为基本要求，B 组为较高要求(供优秀学生和准备考研的学生选用)，书末有习题答案与提示.

感谢南京大学金陵学院将本课程建设项目立项进行教材建议(项目编号为 0010111213). 感谢南京大学金陵学院执行院长陆林、副院长邵进、教务处处长王均义、基础教学部主任陈阶智、督导组主管钱钟等诸位教授对编者的关心和支持. 感谢姜东平、曹祥炎、顾其钧、黄卫华、孔敏、周国飞、邓建平、张玉莲、林小围、王夕予、王培等教授和老师使用本书第一稿在金陵学院面向数千学生讲授“微分方程与线性代数”课程，并给编者提供了许多宝贵的修改建议. 感谢东南大学出版社吉雄飞编辑的认真负责和悉心编审，使本书质量大有提高，并顺利出版.

书中不足与错误难免，敬请智者不吝赐教.

陈　仲

2013 年 12 月于南京大学

目　　录

1　常微分方程

在“微积分”课程中讲述的不定积分概念，实际上是求满足等式 $y' = f(x)$ 的未知函数$y = y(x)$. 微分方程这一数学分支就是由求不定积分起步发展起来的. 随着科学与技术的发展，人们发现大量的实际问题都可以用微分方程来描述，并通过解微分方程去寻求这些实际问题的变化规律. 物理、电子和天文等许多学科中提出越来越多的微分方程的问题.

1.1　微分方程基本概念

1.1.1　微分方程的定义

定义 1.1.1　含有一个自变量、一个未知函数以及未知函数的导数的等式称为**常微分方程**；含有至少两个自变量、一个未知函数以及未知函数的偏导数的等式称为**偏微分方程**. 常微分方程通常称为**微分方程**；偏微分方程通常称为**数学物理方程**或简称**数理方程**.

本书只研究常微分方程.

微分方程中所含导数的最高阶数称为微分方程的“**阶**”. 例如

$$y' = 3x^2 \tag{1}$$

$$y' = y \tag{2}$$

$$yy' + x = 0 \tag{3}$$

$$y'' + xy' + \mathrm{e}^x y = \sin x \tag{4}$$

$$y'' = xy' + y^3 \tag{5}$$

$$y''' + xy' + x^3 y = \tan x \tag{6}$$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{7}$$

都是微分方程. 其中(1)，(2)，(3) 式是一阶微分方程；(4)，(5) 式是二阶微分方程；(6) 式是三阶微分方程；(7) 式是 n 阶微分方程. 值得注意的是，微分方程中可以不显含自变量 x，例如(2) 式；也可以不显含未知函数 y，例如(1) 式. 因此微分方程的定义可简说成

含有导数的等式称为**微分方程**

例 1　求下列曲线或曲线族所满足的微分方程：

(1) $e^y = x(1-y)$；

(2) $e^y = Cx(1-y)$　(C 为任意常数)；

(3) $y = C_1 x + C_2 e^{2x}$　(C_1, C_2 为任意常数).

解　(1) 令 $F(x,y) = e^y - x(1-y)$，应用隐函数求导数公式，有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y-1}{e^y + x}$$

将 $e^y = x(1-y)$ 代入上式并化简即得所求微分方程为

$$y' = \frac{1-y}{x(2-y)}$$

(2) 令 $G(x,y) = e^y - Cx(1-y)$，应用隐函数求导公式，有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{G'_x}{G'_y} = -\frac{C(y-1)}{e^y + Cx}$$

将 $C = \dfrac{e^y}{x(1-y)}$ 代入上式并化简即得所求微分方程为

$$y' = \frac{1-y}{x(2-y)}$$

注　上面两小题得到的微分方程是一样的.

(3) 将原方程两边求导数得 $y' = C_1 + 2C_2 e^{2x}$，再求导数得 $y'' = 4C_2 e^{2x}$，由

$$\begin{cases} y = C_1 x + C_2 e^{2x}, \\ y' = C_1 + 2C_2 e^{2x}, \\ y'' = 4C_2 e^{2x} \end{cases}$$

消去 C_1, C_2 即得所求微分方程为

$$(1-2x)y'' + 4xy' - 4y = 0$$

例 2　将质量为 m kg 的小球从高度为 10 m 的地方以初速度 v_0 铅直向上抛出，空气阻力与速度的平方成比例（比例常数为 $k > 0$），小球上升到最高处的高度是 15 m，然后自由下落，求小球上抛与下落的运动所满足的微分方程.

解 首先建立坐标系，取 x 轴铅直向上，地面为原点(见图 1.1). 小球从 A 点处铅直向上抛出，A 点坐标为 $x=10$，设小球的运动规律为 $x=x(t)$，t 为时间，开始时刻记为 $t=0$. 则 $x'(t)$ 为瞬时速度，$x''(t)$ 为瞬时加速度. 根据牛顿运动定律，小球上抛运动所满足的微分方程为

图 1.1

$$mx''(t)=-mg-k(x'(t))^2,\quad x(0)=10,\quad x'(0)=v_0 \tag{8}$$

小球到达最高点后自由下落运动所满足的微分方程为

$$mx''(t)=-mg+k(x'(t))^2,\quad x(0)=15,\quad x'(0)=0 \tag{9}$$

这里方程(8) 中常数 k 前取负号是因为空气阻力的方向与坐标系 x 轴的方向相反；方程(9) 中常数 k 前取正号是因为空气阻力的方向与坐标系 x 轴的方向相同.

1.1.2 微分方程的分类

定义 1.1.2(线性与非线性微分方程) 将自变量视为常数，若 n 阶微分方程关于未知函数 y 以及它的各阶导数 $y,y',\cdots,y^{(n)}$ 这$(n+1)$ 个变量是一次方程，则称此微分方程为**关于 y 的 n 阶线性微分方程**，否则称为 **n 阶非线性微分方程**.

关于 y 的 n 阶线性微分方程的标准形式是

$$\boxed{y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+p_n(x)y=f(x)} \tag{10}$$

其中，$p_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 与 $f(x)$ 为已知函数.

例如上一小节所列的方程式中，(1)，(2) 两式是一阶线性微分方程；(3) 式是一阶非线性微分方程；(4) 式是二阶线性微分方程；(5) 式是二阶非线性微分方程；(6) 式是三阶线性微分方程；(7) 式由函数 f 的具体情况确定是否线性；(8)，(9) 两式是二阶非线性微分方程.

线性与非线性微分方程是微分方程的重要分类. 对于线性微分方程，人们研究得较多，很多理论问题都得到了解决，这也是本书讨论的主要内容. 对于非线性微分方程，特别是二阶以上的情况，研究的难度较大，在微分方程专业课程“微分方程定性与稳定性理论”中有专门研究，本书只介绍其中的一些特殊情况.

1.1.3 微分方程的通解与特解

容易验证 $y=x^3+1$ 与 $y=x^3+C$ 都满足方程(1) 式，我们将这种满足微分方程的函数统称为该**微分方程的解**，并将不含任意常数的微分方程的解称为该**微分方程的特解**，将含有一个任意常数的解称为**一阶微分方程的通解**.

又如易于验证下列 4 个函数

$$y_1=x,\quad y_2=C_1e^x+x,\quad y_3=(C_1+C_2)e^{2x}+x,\quad y_4=C_1e^x+C_2e^{2x}+x$$

都是二阶线性微分方程

$$y'' - 3y' + 2y = 2x - 3 \tag{11}$$

的解,其中只有 $y_1 = x$ 是微分方程(11) 的特解.其他解都含有任意常数,那么 y_2,y_3,y_4 中哪个是通解呢?下面给出二阶以上的微分方程的通解的定义.

定义 1.1.3(微分方程的通解) n 阶微分方程的含有 n 个独立的任意常数 C_1,C_2,…,C_n 的解称为 ***n* 阶微分方程的通解**.

这里"独立"的含义是指含有 n 个任意常数的解的形式不能用含少于 n 个任意常数的解的形式所替代.应用定义 1.1.3,可得上述(11) 式的通解是 $y_4 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x$,这里任意常数 C_1 与 C_2 是独立的,一个也不能少.在 $y_2 = C_1 e^x + x$ 中只含一个任意常数,故它不是(11) 式的通解;在 $y_3 = (C_1 + C_2)e^{2x} + x$ 中虽含有 2 个任意常数,但 C_1 与 C_2 显然不独立,所以 y_3 也不是(11) 式的通解.

微分方程的通解,有时以隐函数形式给出.例如 $x^2 + y^2 = C$ 显然满足微分方程(3) 式.微分方程的以隐函数形式给出的通解称为**通积分**.为简单起见,我们有时将通积分也说成通解.在本书的例题与习题答案中,微分方程的通解表达式中的 C, C_1, C_2 等总表示任意常数,以后一般不再一一说明.

1.1.4 微分方程的初值问题

在例 2 中,我们求得小球上抛运动所满足的微分方程(8) 是二阶微分方程,它的通解中应含有两个任意常数,为了确定这两个任意常数,(8) 式中有条件 $x(0) = 10, x'(0) = v_0$;同样小球到达最高点后自由下落运动所满足的微分方程(9) 中的条件 $x(0) = 15, x'(0) = 0$,也可确定其通解中的两个任意常数.我们将此条件称为初始条件.一般的,有下面的定义.

定义 1.1.4(初值问题) 对于 n 阶微分方程

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{12}$$

给出条件:

$$当\ x = x_0\ 时,有\ y = y_0, y' = y_1, y'' = y_2, \cdots, y^{(n-1)} = y_{n-1} \tag{13}$$

其中 $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ 是给定的 n 个任意常数.我们称(13) 式为 n 阶微分方程(12) 的**初始条件**,将求微分方程(12) 的满足初始条件(13) 的解的问题称为**初值问题**,并将微分方程(12) 的满足初始条件(13) 的解称为**特解**.特解在 xOy 平面上的图形是通过点(x_0, y_0) 的一条曲线,称为**积分曲线**.

习题 1.1

A 组

1. 指出下列微分方程的阶数，是线性微分方程还是非线性微分方程？

1) $y'+y\sin x=\cos^2 x$；　　2) $xy'-x^2\ln y=3x^2$；

3) $xy''+x^2y'+x^3y=x^4$；　　4) $xy''-2yy'=x^2$；

5) $xy'''+2y=x^2y^2$；　　6) $y'''+x^2y'+xy=\sin x$.

2. 设 C,C_1,C_2 是任意常数，求下列曲线所满足的微分方程：

1) $y=Ce^x$；　　2) $(x-C)^2+y^2=1$；

3) $y=Cx+C^2$；　　4) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$；

5) $y=C_1x+C_2e^x$；　　6) $y=C_1x+C_2e^x+x^2$.

3. 验证下列初值问题的特解是所给的函数：

1) $x^2y'=-y-1,y(1)=1;y=2e^{\frac{1}{x}-1}-1$.

2) $y''-3y'+2y=e^x,y(0)=1,y'(0)=2;y=2e^{2x}-e^x-xe^x$.

1.2　一阶微分方程

这一节研究已解出导数的一阶微分方程

$$y'=f(x,y),\quad f\in C \tag{1}$$

或写成对称形式的一阶微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,\quad P,Q\in C^{(1)} \tag{2}$$

当一阶微分方程写成对称形式(2)时，变量 x,y 处于平等位置，可将 y 看做未知函数，有时也将 x 看做未知函数.

为叙述方便，在这一章我们常常将微分方程简称为**方程**.

在微分方程这门学科建立的初始阶段，数学家们把主要精力放在寻找通解的方法和技巧上. 但发现能用初等积分法求出通解的微分方程的类型非常有限，1841 年刘维尔①证明一个看似简单的黎卡提(Riccati)方程 $y'=x^2+y^2$ 不能用初等积

①刘维尔(Liouville)，1809—1882，法国数学家.

分法求解. 这就促使数学工作者把方向转到研究微分方程解的存在性与唯一性，建立了微分方程的定性与稳定性理论.

*1.2.1 解的存在性与唯一性

定理 1.2.1（皮卡[①]定理） 考虑初值问题

$$y' = f(x,y), \quad f(x_0) = y_0 \tag{3}$$

假设：

(1) 函数 $f(x,y)$ 在平面区域 $D = \{(x,y) \mid |x-x_0| < a, |y-y_0| < b\}$ 上连续；

(2) $\exists L > 0$，使得 $\forall (x,y_1),(x,y_2) \in D$，有

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$$

则初值问题(3) 的特解 $y = \bar{y}(x)$ 存在并且唯一，满足

$$\bar{y}(x_0) = y_0, \quad |x - x_0| \leqslant h, \quad h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|$$

此定理的证明从略[②].

皮卡定理从理论上解决了一阶微分方程初值问题解的存在性与唯一性，但并没有解决解的表示形式.

本章下面研究微分方程的可解类，它们的通解可用初等积分法与代数方法求出.

1.2.2 可分离变量的方程

设函数 $f(x)$，$g(y)$ 皆连续，形如

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)} \tag{4}$$

的方程称为**可分离变量的方程**.

方程(4) 通过积分就能求出其通解. 事实上，若 $g(y) \neq 0$，用 $\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}x$ 乘以方程(4) 两边得

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$$

---

①皮卡(Picard)，1856—1941，法国数学家.

②皮卡定理的证明可参见《大学数学(下册)》，陈仲编，南京大学出版社，1998.

此式称为**变量已分离的方程**. 应用不定积分的换元积分法,上式两边积分得

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C \tag{5}$$

此式中两个不定积分只表示一个原函数,积分常数已单独写出. 假设上式中两个不定积分的某个确定的原函数分别为 $G(y)$ 与 $F(x)$,则方程(4) 的通积分为

$$G(y) = F(x) + C \tag{6}$$

此外,若 $g(y) = 0$ 有根 $y = y_1$,则方程(4) 还有特解 $y = y_1$,它是在解题过程中丢失的,且常常不包含在通解表达式(6) 中. 此时要察看题目的要求,若题目是求通解,写出(6) 式就行,可不管有没有其他特解;若题目是"解方程",则除写出通解外,还要补上在解方程的过程中可能丢失的特解.

注 在本章中,我们约定所有的不定积分只表示一个原函数,而非原函数的全体,积分常数 C 就像(5) 式一样单独写出. 这是因为(5) 式中两个不定积分都取任意常数时,微分方程的通解就含有两个任意常数,它们是不独立的.

例 1 解方程 $y' = \dfrac{1-y}{x(2+y)}$.

解 这是可分离变量的方程. 分离变量得

$$\frac{2+y}{1-y}\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$-y - 3\ln|1-y| = \ln|x| + \ln|C|$$

化简即得所求通积分为 $\mathrm{e}^{-y} = Cx(1-y)^3$.

另由 $1-y=0$,得原方程还有特解 $y=1$.

例 2 解方程 $2y' = (1-y^2)\tan x$.

解 这是可分离变量的方程. 分离变量得

$$\frac{2}{1-y^2}\mathrm{d}y = \tan x\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = -\ln|\cos x| + \ln|C| \Rightarrow \frac{1+y}{1-y} = \frac{C}{\cos x}$$

化简即得所求通解为 $y = \dfrac{C-\cos x}{C+\cos x}$.

另由 $1-y^2=0$,得原方程还有特解 $y=1$ 与$y=-1$.

1.2.3 齐次方程

设函数 $f(u)$ 连续,形如

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)} \tag{7}$$

的方程称为**齐次方程**.

方程(7)的解法是作未知函数的变换.令 $\frac{y}{x}=u$,视 u 为新的未知函数,自变量仍是 x.由于 $y'=u+xu'$,代入(7)式,原方程化为 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)-u$,这是可分离变量的方程,分离变量,两边积分得

$$\int\frac{1}{f(u)-u}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C \tag{8}$$

假设 $\int\frac{1}{f(u)-u}\mathrm{d}u=F(u)$(一个原函数),则方程(7)的通积分为

$$F\left(\frac{y}{x}\right)=\ln|x|+C$$

此外,若方程 $f(u)-u=0$ 有解 $u=u_0$,则原方程还有特解 $y=u_0x$.

例 3 解方程 $y'=\frac{x^2+y^2}{2xy}$.

解 这是齐次方程.令 $\frac{y}{x}=u$,则 $y'=u+xu'$,代入原方程,并分离变量得

$$\frac{2u}{1-u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$-\ln|1-u^2|=\ln|x|-\ln|C| \tag{9}$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入并化简便得所求通积分为

$$y^2=x^2-Cx$$

另外,$1-u^2=0$ 有根 $u=\pm1$,因此 $y=x$ 与 $y=-x$ 是原方程的特解(它们已包含在通解的表达式中,可由 $C=0$ 得到).

注 上面例3在由积分得到的(9)式里要求 $C\neq0$,而最后通解表达式中的任意常数 C 又可以等于0.在解题过程中,像上面在括号中所作的说明,以后都可从