

初級混合数学

三册

新 中 學 教 科 書

初級混合數學

第 三 冊

編 者
歙縣 程廷熙

者
高安 傅種孫

校 者
江寧 張鵬飛

者
無錫 華襄治

中 華 書 局 印 行

中 華 書 局 發 行

（書）

（叢）

（育）

（教）

中學訓練問題

一冊 一角五分

陳啟天編述

本書根據著者多年從事中等教育的經驗與研究，發爲極切實之言論，企圖解決現在最難解決的中學訓練問題。

（3）六教

有著作權不准翻印

民國十三年二月發行
民國十三年二月初版

新中學初級混合數學（全六冊）
教科書

【第三冊定價銀六角】

（外埠酌加郵匯費）

編者

校者

發行者

印刷者

印刷所

總發行所

分發行所

欽縣程廷熙
高安傅種孫
江寧張鵬飛
無錫華襄治

中華書局

中華書局

上海靜安寺路一九二號
中華書局

上海棋盤街
中華書局

北京天津保定石家莊張家口
濟南青島煙台太原
開封鄭州西安蘭州南昌
徐州杭州安慶蕪湖
中 華 書 局

九江漢口武昌沙市長沙
衡州常德重慶福州
廈門廣州潮州汕頭雲南
貴陽奉天吉林長春新加坡

新中學教科書
初級混合數學第三冊
目次

第壹章 代數式與公式

(1—16 頁)

- | | |
|--------------|---------------|
| 1. 算術解法與代數解法 | 2. 算學之語言文字 |
| 3. 代數式及其意義 | 4. 代數式之數值 |
| 5. 代數式的解答 | 6. 公式 |
| 7. 公式之求法 | 8. 公式之應用 |
| 9. 公式與方程 | 10. 數字方程與文字方程 |
| 11. 方程之根 | 12. 核算 |

第貳章 加減法 括號

(17—31 頁)

- | | |
|--------------|--------------|
| 1. 代數式分項法 | 2. 項之次數 |
| 3. 獨項式 | 4. 多項式—不相似獨項 |
| 5. 多邊形之周 | 6. 相似項加減法 |
| 7. 相似項加減法之應用 | 8. 集項法 |
| 9. 多項式加減法 | 10. 解括號 |
| 11. 不解括號 | 12. 方程移項法 |
| 13. 一次方程解法 | |

第叁章 乘法 除法

(32—49 頁)

-
- | | |
|-------------------|-------------|
| 1. 獨項乘法——交換律——結合律 | 2. 獨項除法——約分 |
| 4. 獨項乘多項式——分配律 | 3. 乘除號之運用習慣 |
| 7. 多項式之獨項因數 | 5. 獨項除多項式 |
| 9. 多項式及方程之次數 | 6. 獨項式之因數 |
| 11. 升冪及降冪 | 8. 多項式乘多項式 |
| 13. 多項式除多項式 | 10. 主要文字 |
| 15. 分離係數乘法 | 12. 十進記數法 |
| | 14. 分離係數加減法 |
| | 16. 分離係數除法 |
| | 17. 齊次式 |

第肆章 一元一次方程

(50—66 頁)

- | | |
|-----------|------------|
| 1. 一元一次方程 | 2. 應用問題之解法 |
| 3. 連續整數題 | 4. 和差題 |
| 5. 行程題 | 6. 流水題 |
| 7. 年齡題 | 8. 龜鶴題 |
| 9. 盈朒題 | 10. 部分題 |
| 11. 工程題 | 12. 幾何題 |
| 13. 中空方陣題 | 14. 雜題 |

第伍章 角弧 關係角 關係弧

(67—88 頁)

- | | |
|-------------|----------|
| 1. 角 | 2. 圓心角 |
| 3. 同心圓 | 4. 弧度與弧長 |
| 5. 地面方向 | 6. 時計題 |
| 7. 共軛角——共軛弧 | 8. 環行題算法 |

- | | |
|---------------|------------|
| 9. 隣角 | 10. 補角—隣補角 |
| 11. 對頂角 | 12. 餘角—隣餘角 |
| 13. 一直綫與二直綫相交 | 14. 幾何定理 |
| 所成之角 | 15. 證 |

第陸章 平行綫

(89—102 頁)

- | | |
|------------------|--------------------|
| 1. 平行綫畫法及其所根據之定理 | 2. 平行公理及關於平行綫之幾何公理 |
| 3. 平行綫之性質 | 4. 平行四邊形—梯形—矩形 |
| 5. 三角形三角之和 | |
| 6. 多邊形諸角之和 | 7. 凸多邊形之外角和 |
| 8. 平面上之方向 | |

第柒章 三角形

(103—128 頁)

- | | |
|-----------------|--------------|
| 1. 三角形決定法 | 2. 疊置法 |
| 3. 相合形 | 4. 相合三角形第一種 |
| 5. 圓規公理 | 6. 倣作三角形法 |
| 7. 作等角法 | 8. 平分角法 |
| 9. 作三角形法第二 | 10. 作三角形法第三 |
| 11. 相合三角形第二種 | 12. 疊合證法 |
| 13. 作垂直平分綫法 | 14. 垂直平分綫之性質 |
| 15. 相合三角形第三種 | 16. 相合三角形證法 |
| 17. 關係語 | 18. 逆定理 |
| 19. 等腰三角形及等邊三角形 | 20. 作垂綫法 |
| | 21. 相合直角三角形 |

22. 雜題

第捌章 比例 相似

(129—152 頁)

- | | |
|--------------|--------------|
| 1. 比例 | 2. 定理一 |
| 3. 反理 | 4. 互理 |
| 5. 加理 | 6. 減理 |
| 7. 加減理 | 8. 定理七 |
| 9. 均分綫段 | 10. 綫段配分之特例 |
| 11. 綫段之公度 | 12. 平行截割 |
| 13. 綫段之配分 | 14. 第四比例項 |
| 15. 相似形 | 16. 相似三角形第一種 |
| 17. 比例中項 | 18. 派達哥拉司定理 |
| 19. 相似三角形第二種 | 20. 相似三角形第三種 |
| 21. 相似多邊形 | |

第玖章 銳角之三角函數

(153—172 頁)

- | | |
|--------------------|---------------------------------|
| 1. 基本定理 | 2. 三角函數 |
| 3. 三角函數之關係 | 4. 三角函數之互求 |
| 5. 45° 角之函數 | 6. 30° 及 60° 角之函數 |
| 7. 三角函數表 | 8. 正弦餘割之實用 |
| 9. 餘弦正割之實用 | 10. 正切餘切之實用 |
| 11. 仰角及俯角 | 12. 直角三角形之解法 |
| 13. 解直角三角形之通法 | |

新中學教科書

初級混合數學

第二年上

第壹章

代數式與公式

§ 1. 算術解法與代數解法. 有一問題, 吾人用通常語言以說其理, 列算式以計其數, 是爲算術解法(Arithmetical Solution); 若以文字表所求之數, 按題意列出方程而解之, (見上冊第十三章) 是爲代數解法(Algebraic Solution). 今舉一問題對照解之於下, 以資比較.

問題. 某數之 5 倍, 等於某數 2 倍與 24 之和. 求某數.

(算術解法)

因 5 倍爲 2 倍與 3 倍之和, 而又爲 2 倍與 24 之和, 可見某數之 3 倍與 24 相當, 故以 3 除 24, 即得某數.

式爲

$$24 \div (5-2) = 8.$$

(代數解法)

設 x 爲某數,

$$\text{則 } 5x = 2x + 24,$$

$$\text{而 } 2x = 2x,$$

$$\text{相減 } 3x = 24,$$

$$\therefore x = 8.$$

由此可見二種解法, 實際上計數之手續, 彼此一一相當, 然算術解法中算式與說明二者不可偏廢, 不若代數解法之僅列算式, 即已明瞭; 且立方程以後, 其算法有一定之規則, 解之極易, 即如算術解法中之 $(5-2)$ 一式, 須賴說明, 代

數解法中之 $5x$ 與 $2x$ 相減，則爲自然之手續，不待思索，是後者有形式及規律可憑，較爲簡明而易於演算，非如前者之專賴懸想也。

習 題 I

以下諸問題，試用二種解法對照解之：——

1. 某數之 3 倍與其數加 12 相等，求某數。
2. 一丈之竿，折爲兩段，大段比小段長 2 尺，問各段長若干。
3. 購布 4 疋，每疋 2 元 5 角，若以此銀購綢，每尺 5 角，問可購若干尺。
4. 二數和爲 60，大數爲小數之 3 倍，問二數各若干？

§ 2. 算學之語言文字。上例中「某數之 5 倍」與「 $5x$ 」之意義相當，已如上節所述，此「某數之 5 倍」一語爲通常語 (Common Language.) 而「 $5x$ 」則算學上之一種記法，謂之算學語 (Mathematical Language.) 蓋一種學問，各有其專門之語言文字，猶之一國有一國之語言文字也。今略舉數則，對譯 (Translate) 於下：——

(通常文字)

加以，減以，乘以，除以，開方。
大於，等於，小於。
已知數。
未知數。
長，寬 (底)，高。
面積，體積。
本金，利率，時間，利息，本利和。
圓周率。

(算學文字)

$+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt{\quad}$.
 $>$, $=$, $<$.
 a , b , c ,
 x , y ,
 l , b , h .
 A , V .
 p , r , t , i , a .
 π .

(通常語言)

(算學語言)

三與五之和。

$$3+5.$$

a 與 b 之積。

$$ab.$$

某數之立方。

$$a^3.$$

a, b, c, d 四數成比例。

$$a:b=c:d.$$

x 之 2 倍加 5 爲 43。

$$2x+5=43.$$

由 72 內減去 y 之 3 倍尙餘 12。

$$72-3y=12.$$

三角形之面積,等於底高相乘之半。

$$A=\frac{1}{2}bh.$$

二數和差相乘,等於二數平方之差。

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

此二者相互對譯,實爲習算最要之事,亟宜練習純熟。

習題 II

試譯 1—24 各語爲算學語:——

1. a, b, c 三數之和。
2. x, y, z 三數之積。
3. a, b 相乘積之二倍。
4. m 之三分之一。
5. m 之 p 分之 q 。
6. mn 之五分之四。
7. xy 之 r 分之 s 。
8. ab 兩數和之八分之三。
9. ab 兩數差之倒數。
10. a 之平方根。
11. x, y 二數和之平方根。
12. a, b 相乘積之立方根。
13. x 與 3 之和爲 5。
14. 由 n 內減 7 得 4。

15. x 較 12 少 7.
 16. y 較 8 多 3.
 17. 32 為 x 之 4 倍.
 18. 由 52 減去 n , 與 n 加以 18 相等.
 19. n 之 3 倍較 13 多 7.
 20. A 有 d 元, B 較 A 多 7 元, 而二人所有之和為 17 元.
 21. 本利和為本金與利息之和.
 22. 逆水行舟之速度, 等於划行速度減以水流速度.
 23. 正方形之面積, 等於一邊之平方.
 24. 力與重之比, 等於力臂與重臂之反比.

試譯 25—36 為通常語:—

25. $x^2 + y^2$ (x, y 各為正方形之一邊).
 26. $a-3, a+5$. 其中 a 為 A 之現年.
 27. $y+6, y-10$. 其中 y 為 A 十年前歲數.
 28. $y+x, y-x$. 其中 x 為水流速度, y 為划行速度.
 29. $n+1, n(n+3), \frac{1}{n+2}$. 其中 n 為某數.
 30. $a(b+c+d), abc \div (a-d)$. 其中 a, b, c, d 為不同之數.
 31. $L(L-7) = 18$. 其中 $L, L-7$ 為一長方形之長寬尺數.
 32. $(s+5)^2 = s^2 + 125$. 其中 s 為一正方形邊之尺數.
 33. $A = \pi R^2$. 其中 A 為圓面積, R 為其半徑.
 34. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
 35. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
 36. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$.

§ 3. 代數式及其意義. 算式之含有文字

者，謂之代數式 (Algebraic Expression.)

如 $a, 4a+5, x^2+y^2, \dots$ 皆是。

一代數式各有其一定之意義，觀上節自明。

習題 III

1. 寫出代數式 5 個，並說明所假定之意義。

§ 4. 代數式之數值。代數式中之文字，若易以數字而實行計算，其所得之結果曰式之數值 (The Value of an Expression). 略稱曰值。

例 1. 設 $a=5$ ，求 $4a$ 與 a^4 之數值。

解. $4a=4 \times 5=20$.

$$a^4=5^4=5 \times 5 \times 5 \times 5=625.$$

【注意】文字與文字，或文字與數字相乘，其間乘號略而不書。若易文字為數字，則須將乘號加入。

例 2. 設 $a=3, b=4, c=5$ ，求 $(a+b)(b+c), a^3+b^2-c$ 及 $abc+b^2-(bc+c^2) \div a$ 之值。

解. $(a+b)(b+c)=(3+4)(4+5)=7 \times 9=63$.

$$a^3+b^2-c=3^3+4^2-5=38.$$

$$\begin{aligned} abc+b^2-(bc+c^2) \div a &= 3 \times 4 \times 5 \\ &+ 4^2 - (4 \times 5 + 5^2) \div 3 = 60 + 16 - 45 \div 3 \\ &= 76 - 15 \\ &= 61. \end{aligned}$$

習題 IV

設 $a=1, b=2, c=3, d=4, e=5, f=0$ ，求以下各式之值：—

1. $9a+3b-2c+5f$.

$$2. \quad \frac{4ae}{b} + \frac{4ac}{d} - \frac{5cd}{e}.$$

$$3. \quad abc^2 + bcd^2 - dea^2 - eaf^2.$$

$$4. \quad \sqrt{(8a+5b) \div 2} + \sqrt{15cd \div e \times de}.$$

$$5. \quad \frac{e^c + b^a}{cb - b^c}.$$

$$6. \quad \frac{e^c - d^c}{e^2 + ed + d^2}.$$

§ 5. 代數式的解答. 通常語與算學語可以互譯,則通常問題之解答,亦可以代數式表之,固不必拘於數目也,茲舉數例於下以明之:——

例 1. 銀 100 圓, a 人均分之,問各得幾圓.

解. 銀 100 圓, 2 人分之,每人得 $\frac{100}{2}$ 圓; 三人分之,得

$\frac{100}{3}$ 圓等等,故 a 人分之每人得 $\frac{100}{a}$ 圓.

例 2. 設有一人 5 年前為 a 歲,問 b 年後為幾歲.

解. 5 年前為 a 歲,則現在為 $a+5$ 歲,故 b 年後為 $a+5+b$ 歲.

例 3. 凡以 5 除盡之數為何數?

解. 以 5 除盡之數,以 5 除之,其商必為整數 1, 2, 3, 今設所求之數以 5 除之其商為 n , 則所求之數為 $5n$.

習 題 V

1. 分 100 為二數,其一為 x ,問他一數若干.

2. 甲有銀 p 圓,乙有 q 圓,今甲給乙 x 圓,問各人現有幾圓.

3. 36 之一因數為 m ,問他一因數為何.

4. 二數之積爲 p , 一數爲 m , 他數爲何?
5. 被除數爲 a , 商爲 b , 問除數爲何.
6. 除數爲 a , 商爲 b , 餘數爲 c , 問被除數爲何.
7. 被除數爲 D , 除數爲 d , 餘數爲 R , 問商爲何.
8. 雞兔同籠, 總頭數爲 a , 兔數爲 b , 問雞之足數若干.
9. 凡以 10 除盡之數爲何數?
10. 凡以 m 除盡之數爲何數?
11. 一切偶數, 如何表之?
12. 一切奇數, 如何表之?
13. 與整數 a 相隣之二整數爲何數?
14. 連續五整數爲何?
15. 二數之差爲 d , 大數爲 e , 小數爲何?
16. 二數之差爲 d , 小數爲 s , 大數爲何?
17. 加何數於 x , 則爲 y .
18. 甲有銀 x 圓, 乙比甲多 y 圓, 丙所有者爲甲乙合計之 n 倍, 問三人共有若干圓.
19. 長方形地, 長 a 尺, 寬 b 尺, 問其面積若干.
20. 立方箱每邊 a 尺, 其容積若干?
21. 箱長 a 尺, 寬 b 尺, 高 c 尺, 問其體積若干. 又問其六面總計之面積若干.
22. 行 d 里路須 t 小時, 問每時之速度若干.
23. 每時行 a 里 t 時可到之路, 已行 $2\frac{1}{2}$ 時, 問尙餘路幾里.
24. a, b, c 三數之第四比例項爲何數?
25. 5 圓之鈔票 a 張, 10 圓之鈔票 b 張, 共若干圓?
26. 1 圓之鈔票 a 張, 5 圓之鈔票 b 張, 除爲 10 圓之鈔票三種共合 p 圓, 問 10 圓之鈔票幾張.

§ 6. 公式. 如上節例 3, 凡以 5 除盡之數設爲 x , 則

若

$$x=5, \dots\dots\dots (A)$$

$$\left. \begin{array}{l} n=1, \text{ 則 } x=5; \\ n=2, \text{ ,, } x=10; \\ n=3, \text{ ,, } x=15; \\ n=4 \text{ ,, } x=20; \end{array} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

(1)中各式,因 n 之值不同,而 x 各有特別之值,彼此不能統括;且吾人若欲按(1)式所列,將以 5 除盡之數,完全寫出,勢不可能,若僅答以 5 除盡之數,爲 5, 10, 15, 20 幾數,又不免掛一漏萬,惟 $x=5n$ 一式,可以表示一切以 5 除盡之數也.

又如本金 100 圓,年利 6 釐,按單利計算,則

$$\left. \begin{array}{l} \text{一年之利息爲 } 100 \text{ 圓} \times 6\% \times 1, \\ \text{二年之利息爲 } 100 \text{ 圓} \times 6\% \times 2, \\ \text{三年之利息爲 } 100 \text{ 圓} \times 6\% \times 3, \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

時期不同,各有專式,苟本金或利率二者有一變動,則上式更不能相通,若以代數式表之得

$$i = prt, \dots\dots\dots (B)$$

足表示一般之意義,固不論本金利率時期究屬若干也. 且無論本金利率時期爲何數,皆可準此式以求單利息,則是此式更有表示求單利方法之效用. 凡對於某類問題列出算式,足以表示一般之意義,而同類問題皆可按之以計算者,謂之公式(Formula). 上列之(A),爲以 5 除盡諸

數之公式，(B) 爲單利息之公式也。

以公式解決問題爲通例 (General case)，若公式中各文字爲一定之數目，則爲特例 (Particular case)。如 (1) 爲 (A) 之特例，(2) 爲 (B) 之特例。

習題 VI

1. 試就以下各類將已習諸公式一一寫出：——

- (a) 關於面積者。
- (b) 關於體積者。
- (c) 關於單利者。
- (d) 關於複利者。
- (e) 關於溫度計者。
- (f) 關於槓桿者。

2. 以下各用公式表之：——

- (a) 加法交換律。
- (b) 加法結合律。
- (c) 乘法交換律。
- (d) 乘法結合律。
- (e) 乘法分配律。
- (f) 分數加減乘除計算法。

§ 7. 公式之求法，通例與特例之對照。

求公式之法，與計算數字問題中之已知數皆爲數字者相同，不過將數字易爲文字而已，今舉例以明之：—

(特例)

(一) 清酒 10 斤，每斤 2 角，濃酒 20 斤，每斤 3 角，今混合之，平均每斤幾角？

(通例)

(一') 清酒 a 斤，每斤 m 角，濃酒 b 斤，每斤 n 角，今混合之，平均每斤幾角？

解. 設 x 爲平均每
斤角數.

因斤數共 30,

故 $30x = 10 \times 2 + 20 \times 3,$

即 $30x = 80.$

$$\therefore x = \frac{8}{3}.$$

解. 設 x 爲平均每
斤角數.

因斤數共 $a+b,$

故 $(a+b)x = ma + nb,$

$$\therefore x = \frac{ma + nb}{a + b}.$$

此 $\frac{ma + nb}{a + b}$ 爲混合法第一種問題之公式.

(二) 有工程, 甲爲之 5
日可成; 乙爲之 8 日可成. 今
二人合作, 問幾日可成.

解. 設 x 爲所求日
數.

則 $\frac{1}{x}$ 爲二人合作一日所成
之工.

而 $\frac{1}{5}$ 爲甲一日所成之
工,

$\frac{1}{8}$ 爲乙一日所成之
工.

$$\text{於是 } \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{1}{x},$$

兩端以 $5 \times 8x$ 乘之,

$$8x + 5x = 5 \times 8,$$

即 $13x = 40,$

$$\therefore x = \frac{40}{13}.$$

(二) 有工程, 甲爲之 a
日可成; 乙爲之 b 日可成. 今
二人合作, 問幾日可成.

解. 設 x 爲所求日
數.

則 $\frac{1}{x}$ 爲二人合作一日所成
之工.

而 $\frac{1}{a}$ 爲甲一日所成之
工,

$\frac{1}{b}$ 爲乙一日所成之
工.

$$\text{於是 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x}.$$

兩端以 abx 乘之,

$$bx + ax = ab,$$

即 $(b+a)x = ab,$

$$\therefore x = \frac{ab}{a + b}.$$