

數學教材教法

●楊思偉 總策劃

●甯平獻 主編



陳鉅逸 劉 好 林原宏 易正明 游自達
施淑娟 謝閻如 陳靜姿 合著

數學教材教法

楊思偉 總策劃
甯平獻 主編

陳鉷逸、劉 好、林原宏、易正明
游自達、施淑娟、謝闡如、陳靜姿
合著

五南圖書出版公司 印行

國家圖書館出版品預行編目資料

數學教材教法／甯平獻主編。

—初版。—臺北市：五南，2010.09

面；公分

ISBN 978-957-11-6071-9（平裝）

1. 數學教育 2. 教材教學 3. 九年一貫課程

523.32

99015522



11UT

數學教材教法

總策劃 — 楊思偉

主編 — 甯平獻(509)

作者 — 陳鉅逸 劉好 林原宏 易正明
游自達 施淑娟 謝蘭如 陳靜姿

發行人 — 楊榮川

總編 — 龐君豪

主編 — 陳念祖

責任編輯 — 李敏華 雅典編輯排版工作室

封面設計 — 童安安

出版者 — 五南圖書出版股份有限公司

地址：106台北市大安區和平東路二段339號4樓

電話：(02)2705-5066 傳真：(02)2706-6100

網址：<http://www.wunan.com.tw>

電子郵件：wunan@wunan.com.tw

劃撥帳號：01068953

戶名：五南圖書出版股份有限公司

台中市駐區辦公室 / 台中市區中山路6號

電話：(04)2223-0891 傳真：(04)2223-3549

高雄市駐區辦公室 / 高雄市新興區中山一路290號

電話：(07)2358-702 傳真：(07)2350-236

法律顧問 元貞聯合法律事務所 張澤平律師

出版日期 2010年9月初版一刷

定價 新臺幣530元



國立台中教育大學是台灣的師資培育重鎮

台中教育大學自 1899 年創校以來，一直培育著建設台灣的菁英師資，在當前師資培育多元化的環境中，不僅穩定地培育師資亦積極地提升教師素質，這是一份對師資培育歷史的負責，亦是本校對台灣教育發展的使命，承繼這份師資培育的光榮使命，台中教育大學正積極發展為重點教育大學。

教育大學在高等教育的發展過程中有其獨特性，係因教育大學非僅教育學術的追求，更重視如何培育出優質教師，所以特重教學專業與地方教育輔導，如果僅做好教育研究工作，而沒有培育出優質教師的教育大學，就不是成功的師資培育機構。培育一位優質教師，需要普通課程、任教學科的專門課程、教育專業課程、實習課程等顯著課程，還需要培育師資所需的環境教育、相關制度所構成的潛在課程。潛在課程在潛移默化的過程中，涵養一位優質教師的言行，做到韓愈所謂的「以一身立教，而為師於百千萬年間，其身亡而教存」的師表風範；此外，普通課程協助培育通博涵養，專門課程建立施教課程之專業，教育專業課程則是孕育相關教育知能。

一位優質教師不僅要有教育專業，了解整體教育情境與學生需要，也要有任教科目的專門知能，對學生授業與解惑。不過任教學科的專門知能，不僅要有任教「學科的內容知識」，還要有「『教』學科內容的知能」，所以數學教師，不是只要有「數學」專門知識即可，還需要「教數學」的專門知識。因此，一位優質教師，要具有學科內容教學知識（pedagogical content knowledge, PCK），融合學科內容和教法的知

識，依據學生性向、能力與興趣，將學科內容知識（content knowledge, CK）傳授給學生。基此，本校自 97 年起依據中小學九年一貫課程學習領域之規劃，國語文教學、閩南語教學、英語教學、數學教學、社會教學、自然與生活科技教學、綜合活動學習、藝術與人文學習教學（分成美術與音樂兩組）、健康與體育教學等 10 個教學研究團隊，深入研討各學科之學科內容教學知識，而教育專業研究、幼稚教育專業研究、特殊教育專業研究等 3 個團隊則是積極研討國小師資、幼教師資與特教師資所需的專業知能。

本校各學習領域的教學研究團隊與教育專業知能研究團隊，針對國小師資培育所需的教材教法課程，進行一年的全盤性研討，將陸續出版英語教材教法、本土語文教材教法、數學教材教法、自然與生活科技教材教法、社會領域教材教法、健康與體育教材教法、綜合活動教材教法、音樂教材教法、視覺藝術教材教法、寫字教材教法、幼稚園教材教法、身心障礙教材教法、藝術概論、全球華語教材等，這是本校第一期的師資培育課程系列書籍，未來各研究小組將更加深入各學習領域之相關知能，提供師資培育教學所需，發揮本校對於師資培育之中堅穩力、典範傳承的光榮使命與特色。

楊思偉

國立台中教育大學校長



主編序

數學不僅為人類重要的知識繼承，近代以來，更以科學之母的角色扮演各國科學與科技進展的基石。由是，數學能力已成國家人力素養的重要指標，數學能力的培育成為各國國民教育的基本內容。所謂「君子之學，貴乎慎始」，啟蒙階段國民小學的數學教學，當然攸關國家人力素質的良窳。

國內自 1990 年代教改之後，有志之士開始擔憂國民小學教師的數學教學能力。究其原因，一方面恐係職前教師的數學教學能力標準之設定是否妥當的問題；另一方面則可能為培育數學教學能力的主科之一——「數學科教材教法」的內容與教學未能因應潮流而現代化的問題；尤其甚者，能力標準的設定與「教材教法」的教學成果兩者之間實屬息息相關。因而，如何形成具共識的「數學科教材教法」教材內容與教學，成為國內國小數學教育待解決的重大議題。本系基於「笨鳥先飛」的精神，以及肩負的大學社會責任，決定對此議題予以反應，草撰本書，以邀回饋。

本書首先進行整體性的國小數學課程的概述，並說明數學教學之教具使用。其次再分別進入分類教材主題內容的教與學說明：包括整數、分數、小數、量與實測、數量關係、幾何和圖形、比和比例、代數和統計與機率等。最後再回頭整體性的探討數學教學所涉及的數學連結和學習評量活動，以及數學教學的專業與實務問題。本書所涵蓋的內容，初估應能符合「數學科教材教法」的教材大致所需。

本書撰寫過程中，除邀約本校數學課程與教材教法專長的教師與校外相關專家共同撰寫外，更要感謝全國各縣市資深優良的數學教師提供寶貴的審查建議。然成稿雖經細心審校，難免仍有疏漏，尚祈各方家指正。

最後，特別感謝教育部「卓越師資培育計畫」的補助，本校師資培育中心及五南圖書出版公司的慨允出版，期本書能為國內師資培育略盡棉薄。

甯平獻

於國立台中教育大學 數學教育學系

2010.04.06

目 錄

序

主編序

第 1 章	國小數學課程說明	1
第 2 章	教具與數學教學	31
第 3 章	整數主題的教與學	57
第 4 章	分數主題的教與學	81
第 5 章	小數主題的教與學	111
第 6 章	量與實測	153
第 7 章	幾何圖形	197
第 8 章	數量關係	247

第 9 章 比和比例	277
------------	-----

第 10 章 代數——方程式中的未知數	303
---------------------	-----

第 11 章 統計與機率主題的教與學	325
--------------------	-----

第 12 章 數學連結	351
-------------	-----

第 13 章 學習評量	381
-------------	-----

第 14 章 數學教學專業與實務	407
------------------	-----



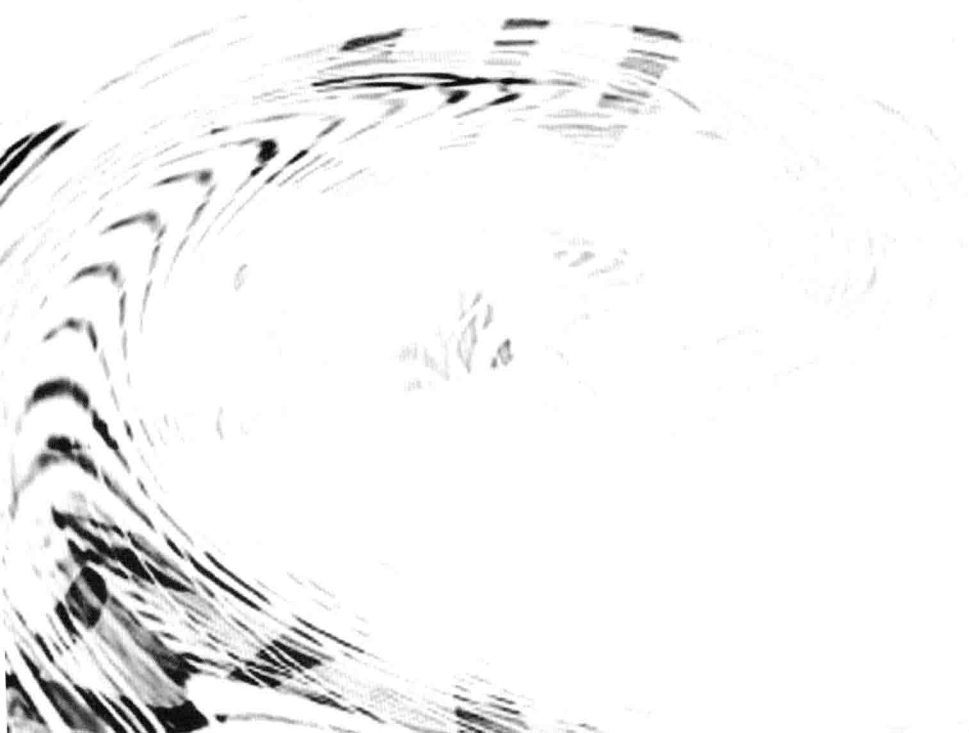
第



章

Mathematics Mathematics Mathematics Mathematics

國小數學課程說明



數學教師要達到有效教學，必須具有下列素養：(1)精通數學基本知識——知道什麼是「做數學」；(2)理解學生的學習發展特徵——知道學生如何學習和建構知識；(3)能選擇適當教材與設計學習活動——讓學生在解決問題的環境下學數學；(4)能將評量適時融入教學過程中——以促進學習和改善教學（張英傑、周菊美譯，2005）。我國教育部於民國 92 年頒布九年一貫課程綱要，除了針對國小與國中學生應具備之學習能力指標加以詳細羅列之外，也針對實施本綱要之相關要點做一些說明，以供執行本綱要之第一線人員——教師及教育相關人員參酌。本章主要在簡述九年一貫課程綱要有關之要項，第一節先以模型為例說明數學與人類生活及社會文明進展的關係，再簡介我國數學課程標準的更迭，敘述 64 年至 92 年數學課程目標，最後就民國 64 年至 92 年課程目標加以比較。第二節簡要說明民國 92 年頒布之九年一貫課程綱要數學領域之內容，包含「基本理念」、「課程目標」與「能力指標」。第三節則說明數學課程實施相關之要項，包含「教學要點」、「教學評量」與「教學資源」。

概說

一、前言

為什麼數學是中小學課程中的主要科目？自有人類至今，人類生活社會文明的進展與數學有什麼關係？以下舉幾個淺顯的例子：

例 1：如下的一些物件

◎ ◎◎ ◎◎◎ ◎◎◎◎ ◎◎◎◎◎ ◎◎◎◎◎◎

最早期的人如何表徵其個數呢？稍晚的人又如何表徵呢？不同地區的人的表徵方式都一樣嗎？而今世界各地的人又以何種表徵來相互溝通？當今的表徵方式為何會

與早期人們的表徵不同？

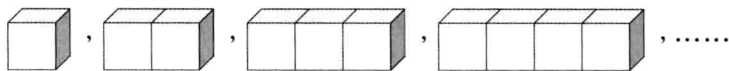
例 2：人們如何計時？計時模式有何特徵？與宇宙中星球的運轉有何關係？與人們的作息有何關係？

例 3：一個水槽裝了 15360 公升的水，每天結束時取出槽中的水之一半而不再注入水，10 天後水槽中剩下多少公升的水？

例 4：為什麼學校每位學童都有一組學號？每一位國民都有一組身分證號碼？每一個人持有手機（或電話機）皆擁有一組號碼？這組號碼的每一個符號代表什麼意義？何以手機可和世界各地的人通話？

例 5：一般對號火車（或大客車）上的座位編號是怎麼編的呢？很多車子上座位的編號是一邊為奇數，一邊為偶數。如一排有四個座位，其編號方式依序為：(1, 3, 4, 2); (5, 7, 8, 6); (9, 11, 12, 10); ……；你知道為什麼要這樣編嗎？這麼編有何好處？電腦如何傳輸訊息？

例 6：如下由正方塊黏接在一起而成的序列，如果露出的表面（不含黏接面）要加以油漆，那麼在第 10 組中有多少個面需要油漆呢？第 n 組呢？



例 7：有 8 個球員在玩一對一的籃球比賽，每個球員都必須與其他球員對賽一次，在這樣的比賽中共有多少場次之比賽？如何算呢？有不同算法嗎？

人類是生活在數學的情境中，就如以上幾個人們生活中可遇到的情境特徵與處理模式，總會經過觀察、分析、歸納與推演而想出一些經濟有效率的解決策略，亦即發展出適當的數學方法。

數學是非常有用的知識，數學的概念總可以描述我們生活世界的經驗。人們為了描述其所觀察的事物個數，發明了數字，為了要測量或

描述物件之形狀與大小，發展出幾何。數學發展之初，根據對人們生活中實際情境的觀察，再將觀察到的同類現象或特徵加以抽象符號化，歸納整理而創造了許多概念與原理。數學知識在直觀的基礎與應用的成功經驗之上逐漸累積起來，在舊有的知識之上逐漸衍生出新的概念，如由「合成」衍生出「加倍」、「乘方」的概念，由「分解」衍生出「等分割」與「負數」的概念，由「除法」衍生出「分數」的概念，由「開方」衍生出「無理數」的概念等等。新概念一旦被接受之後，又會衍生新的概念，於是數學就像蓋大樓一樣越蓋越高，產生了許許多多的概念與原理。隨著社會文化的進步，數學發展得更趨複雜而重要。很明顯地，沒有數學，科學技術一定不可能有今日的成就。倘若個人缺乏數學的知識與能力，不僅對整個社會現象與自然現象，對國家或國際間各方面的事實與現象不易了解，就連個人的生活也難做適當處理。數學是人類最重要的資產之一，是一種語言，是人類天賦本能的延伸，在進入 21 世紀且處於高度文明化的世界中，數學知識及數學能力，已逐漸成為日常生活及職場裡應具備的基本能力。基於以上的認知，數學能力是國民素質的一個重要指標，一國之國民具有相當的數學素養，其社會才能有良好的發展，國力以及人民的生活品質才能提升，因此，世界各國皆把數學列為中小學課程中的主要科目。

要了解數學，一個方式可以先看看平時所謂的數學究竟含有哪些內容，如國小數學大體上只有數、量和形之基本概念、關係與應用的題材。另一個方式是分析一般數學知識含有什麼要素，Begle (1979) 認為數學對象 (mathematical objects) 有四種：事實 (facts)、概念 (concepts)、運算 (operations) 和原理 (principles)。「事實」有兩種，其一與我們使用的術語有關，如我們以 2 代表二，3 代表三，……等，這些是約定俗成的用法，靠記憶而得；另一類可以從其他事實演繹得來，如同類物件 2 個和 3 個合起來是 5 個，5 個的 6 倍是 30 個，……等，並非約定成俗。又如像正方形就是一個概念，一個「概念」代表一類含有某些屬性的東西，如要決定什麼圖形是正方形，則要考慮邊的數量、邊的連接方式、邊是否為等長的直線段和內角是不是直角等屬性。「運算」則有配對、計算、作兩集合之交集、測量、在數線上移動以表

示兩數的加法、做一線段的垂直平分線等，這些都表示由一些數學對象到另一些數學對象的函數。「原理」則是幾個數學對象之間的關係。任何原理可以稱為定理或公理。如兩點間可以畫一條直線，兩個數甲和乙，如果是相等的，則甲和乙各同時加上另一個數丙，其結果也是相等的。一個數學系統，是由數學對象組成的，像算術和幾何都含有許多相關的事實、概念、運算和原理。

教師對於教學科目之性質的了解，會影響其教學的策略與重點。當一個老師也許比數學家更需要知道數學是什麼，數學有什麼性質，以免用了不當的教學策略或方法而影響教學效果、禁錮學童數學發展，甚至成了反數學的數學教學。

在教學策略方面，把教材講解得很清楚未必是好的教學。因為教師覺得清楚，但學童可能一頭霧水。學童只能以他現有的認知結構來同化新的材料，所以在教學時所提供的教材應配合學童的認知能力，教學時也不能只靠講述的方式，而是要配合教材性質與學童學習發展特徵，運用合宜的策略，如提供操作作用的物體讓學童從操作中自己建構概念，提供溝通討論的情境，從相互討論溝通中建立共識。

隨著社會文明的增進，人們生活環境的改變，學童學習的題材需配合社會文明的進步加以調整，而教師除了必須在應具備的數學基本素養的知識不斷提升外，教學的情境與策略也需要妥善的配合時代的進展加以規劃與改進。

二、我國數學課程的變遷

(一) 小學課程之演進

我國小學課程從清朝光緒 28 年（1902）廢除科舉，興辦學校，實施「新教育」，頒布「欽定學堂章程」開始產生。然而，正式的小學課程標準，是於民國 17 年北伐成功之後，由國民政府教育部聘請專家組織委員會釐訂，並於民國 17 年 8 月頒布實行。以後由於時代需要，以及政府政策的變遷，小學課程標準的內容時有更迭。自民國 18 年至 98

年間共經過 12 次之修訂，其法規名稱、訂頒時期、學科可參考國立編譯館主編之「師範專科學校用書——數學科教學研究」（1981）第 28 至 30 頁，與教育部頒布之小學課程標準（1975, 1993）及九年一貫課程綱要（2000, 2003, 2009）。

民國 89 年教育部針對民國 82 年之國民小學課程標準進行修訂之後，將國小與國中課程以九年一貫課程規劃。為培養國民應具備之基本能力，國民教育階段之課程應以個體發展、社會文化及自然環境等三個面向，提供語文、健康與體育、社會、藝術與人文、數學、自然與生活科技及綜合活動等七大學習領域。學習領域為學童學習之主要內容，而非學科名稱，除必修課程外，各學習領域，得依學童性向、社區需求及學校發展特色，彈性提供選修課程。

（二）民國 64 至 98 年數學課程目標

與當前之數學課程關係較為密切的課程標準，為民國 64 年 8 月第 8 次修訂以後之國民小學課程標準。茲將第 8 次至第 12 次修訂之數學課程目標列出如下：

1. 民國 64 年頒布之數學課程目標（偏向數學知識技能的學習原則及其運用習慣之描述）

此次頒布之數學課程目標分為總目標與分段目標，其中分段目標乃為各年級目標（此處從略）。總目標如下：

國民小學數學教育目標，在於輔導學童從日常生活經驗中，獲得有關數學知識，進而培養有效運用數學的方法以解決實際問題的態度和能力。茲分述如下：

- (1) 養成數、量、形的正確觀念，進而考慮其形成的需要與功能。
- (2) 學習數、量、形的基本知識與原理，獲得其基本技能，進而有效地提高在生活上的實踐能力。
- (3) 能運用數、量、形之間的相互關係，及使用適當的數學語言，進而解決日常生活中有關的問題。
- (4) 養成從數學的觀點考慮日常事項的興趣與習慣，進而運用數學的知識與方法，發展其推理、組織和創造的能力。

2. 民國 82 年頒布之數學課程目標（特別注重學習之態度與所獲得知識技能的運用習慣）

此次頒布的數學課程目標，分成總目標、領域目標與分段目標三方面說明，其總目標為：

國民小學數學教育目標，在於輔導學童從日常生活經驗中，獲得有關數學的知識，進而培養有效運用數學方法，以解決實際問題的態度及能力。茲分述如下：

- (1) 養成主動地從自己的經驗中，建構與理解數學的概念，並透過了解及評鑑別人解題方式的過程，進而養成尊重別人觀點的態度。
 - (2) 養成從數學的觀點考慮周遭事物，並運用數學知識與方法解決問題的能力。
 - (3) 養成以數學語言溝通、討論、講道理和批判事物的精神。
 - (4) 養成在日常生活中善用各類工具從事學習及解決問題的習慣。
- 領域目標分成「需要獲得的概念、知識、思考和技能」與「需要養成的習慣、態度與理想」做較細部說明。分段目標則分低、中、高年段分別說明各階段所要達成的目標細項，這二部分此處從略。

3. 民國 89 年頒布之數學課程暫行綱要目標（著重在描述所要獲得的知識和技能以及教學上應注意之要點）

九年一貫的數學課程期望學童達成下列目標：

- (1) 掌握數、量、形的概念與關係。
- (2) 培養日常所需的數學素養。
- (3) 發展形成數學問題與解決數學問題的能力。
- (4) 發展以數學作為明確表達、理性溝通工具的能力。
- (5) 培養數學的批判分析能力。
- (6) 培養欣賞數學的能力。

為了達成這些目標，數學課程的發展應以生活為中心，配合各階段學童的身心與思考型態的發展歷程，提供適合學童能力與興趣的學習方式，據以發展數學學習活動。數學學習活動應讓所有學

童都能積極參與討論，激盪各種想法，激發創造力，明確表達想法，強化合理判斷的思維與理性溝通的能力，期在社會互動的過程中建立數學知識。

4. 民國 92 年頒布之數學課程綱要目標（偏向所要獲得的知識技能的描述）

九年一貫數學學習領域的教學總體目標為：

- (1) 培養學童的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力。
- (2) 學習應用問題的解題方法。
- (3) 奠定下一階段的數學基礎。
- (4) 培養欣賞數學的態度及能力。

其中，國民小學階段的目標為：

- ① 在第一階段（一至三年級）能掌握數、量、形的概念。
- ② 在第二階段（四至五年級）能熟練非負整數的四則與混合計算，培養流暢的數字感。
- ③ 在小學畢業前，能熟練小數與分數的四則計算；能利用常用數量關係，解決日常生活的問題；能認識簡單幾何形體的幾何性質，並理解其面積與體積公式；能報讀簡單統計圖形並理解其概念。

國民中學階段的目標則為：

- ① 能理解座標的表示，並熟練代數的運算及數的四則運算。
- ② 能理解三角形及圓的基本幾何性質，並學習簡單的幾何推理。
- ③ 能理解統計、機率的意義，並認識各種簡易統計方法。

5. 民國 98 年頒布之數學課程目標（為了配合我國的學制做修改）

具體而言，九年一貫數學學習領域的教學目標為：

- (1) 第一階段（國小一至二年級）：能初步掌握數、量、形的概念，其重點在自然數及其運算、長度與簡單圖形之認識。
- (2) 第二階段（國小三至四年級）：在數方面要能熟練自然數的四則與混合計算，培養流暢的數字感；另外，應初步學習分數與小數的概念。在量上則以長度的學習為基礎，學習各種量的常