普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学（下册）

赵立宽 主 编
李 博 孙绍权 副主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高 等 数 学

(下册)

赵立宽 主 编
李 博 孙绍权 副主编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书分为上、下两册. 下册内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数的微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数.

本书注重高等数学的基本概念、基本理论、基本方法的阐述, 体系完整, 结构严谨, 叙述简明, 条理清晰明了. 书中的大量例题都是经过精心编选的, 每节都配备难度、数量适当的习题, 每章还配备了类型齐全的综合性习题, 并给出了习题参考答案便于教学和自学.

本书可作为理工类本科非数学专业"高等数学"课程的教材或教学参考书, 也可作为其他专业的本专科"高等数学"课程的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学: 全 2 册/赵立宽主编. —北京: 科学出版社, 2013
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-03-034624-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①赵… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 129570 号

责任编辑: 王胡权 / 责任校对: 张怡君
责任印制: 阎 磊 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 6 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2013 年 6 月第一次印刷 印张: 34
字数: 670 000

定价: 60.00 元 (上、下册)

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　　言

高等数学是高等院校一门重要的基础理论课程, 也是大学生学习其他后续课程不可或缺的重要工具, 它在传授学生知识、培养学生能力、启发学生思维等很多方面具有非常重要的作用. 本书是我们在多年教学实践的基础上, 参阅了国内外相关的优秀教材, 并结合教育部数学基础课程教学指导分委员会关于 "工科类本科数学基础课程教学基本要求", 以及硕士研究生入学考试大纲, 为高等院校理工类及经济管理类各专业学生编写的教学用书.

在编写过程中, 我们力求贯彻 "强化概念、淡化理论、加强计算、学以致用" 的原则, 注重强调数学的方法和技能, 注重培养学生的数学思维能力, 提高学生的数学素质, 体现出数学既是一种工具、同时也是一种文化的思想. 另外, 在内容的叙述方面进行了推敲, 力求语言简洁明了、通俗易懂, 尽量由浅入深、循序渐进, 定理和例题的表述尽可能严谨规范.

本书精心编选和设计了大量典型例题, 各章节之后配备了难易适中、题型丰富的习题, 以便学生围绕本章节内容进行学习和训练, 巩固和理解所学理论, 加强数学思维的训练. 有些习题给学生提供了足够的思考空间, 有利于充分激发学生的发散思维, 提高学生的数学意识和能力.

本书正文部分由李博、赵立宽、杨树国、石有印编写; 各章习题及参考答案由段得玉、朱景阳、李春霞编写; 全书的统稿和审校工作由赵立宽完成. 青岛科技大学教务处和数理学院领导对本书的编写和出版给予了大力支持, 在此, 谨表示衷心的感谢.

本书虽经多年教学实践经验积累编写而成, 但限于编者水平, 时间也比较仓促, 书中难免有不妥之处, 敬请专家、同仁和广大读者批评指正.

编　者

2012 年 9 月

目　　录

前言
第 8 章　空间解析几何与向量代数 …… 1
8.1　空间直角坐标系 …… 1
8.2　向量及其线性运算 …… 5
8.3　向量的数量积和向量积 …… 13
8.4　空间的平面与直线 …… 21
8.5　二次曲面与空间曲线 …… 34
总习题 8 …… 47
第 9 章　多元函数的微分法及其应用 …… 49
9.1　多元函数的基本概念 …… 49
9.2　偏导数与全微分 …… 57
9.3　多元复合函数的求导法则 …… 65
9.4　隐函数的求导公式 …… 70
9.5　多元函数微分法在几何上的应用 …… 74
9.6　方向导数与梯度 …… 78
9.7　多元函数的极值 …… 83
总习题 9 …… 89
第 10 章　重积分 …… 91
10.1　二重积分的概念及性质 …… 91
10.2　二重积分的计算 …… 97
10.3　二重积分的应用 …… 112
10.4　三重积分 …… 118
总习题 10 …… 129
第 11 章　曲线积分与曲面积分 …… 132
11.1　对弧长的曲线积分 …… 132
11.2　对坐标的曲线积分 …… 138
11.3　格林公式及其应用 …… 147
11.4　对面积的曲面积分 …… 157
11.5　对坐标的曲面积分 …… 161
11.6　高斯公式和斯托克斯公式 …… 170

总习题 11 ······ 180
第 12 章　无穷级数 ······ 182
12.1　常数项级数的概念和性质 ······ 182
12.2　常数项级数的审敛法 ······ 187
12.3　幂级数 ······ 196
12.4　函数展开成幂级数 ······ 202
12.5　函数的幂级数展开式的应用 ······ 209
12.6　傅里叶级数 ······ 213
12.7　一般周期函数的傅里叶级数 ······ 222
总习题 12 ······ 225
参考答案 ······ 227

第 8 章　空间解析几何与向量代数

空间解析几何是用代数方法研究空间几何问题的一门学科, 它在其他学科, 尤其在工程技术上有着广泛的应用. 此外, 空间解析几何的知识也是学习和研究多元函数微积分的基础.

本章首先建立空间直角坐标系, 引进在工程技术上有着广泛应用的向量及其代数运算, 并以向量为工具讨论空间的平面与直线. 其次介绍空间曲面和空间曲线的内容.

8.1　空间直角坐标系

8.1.1　空间直角坐标系

过空间一定点 O 作三条互相垂直的数轴, 它们都以 O 点为原点, 并且通常取相同的长度单位, 依次记为 x 轴 (横轴)、y 轴 (纵轴)、z 轴 (竖轴), 统称为坐标轴. 三条坐标轴之间的顺序通常按下述法则确定: 以右手握住 z 轴, 让右手的四指从 x 轴的正向以 $\dfrac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴正向, 这时右手大拇指所指的方向就是 z 轴的正向 (图 8.1). 这样的三条坐标轴构成一个**空间直角坐标系**, 称为 $Oxyz$ 坐标系. 点 O 称为坐标系的原点. 在空间直角坐标系中, 任意两个坐标轴可以确定一个平面, 这种平面称为坐标面. x 轴及 y 轴所确定的坐标面称为 xOy 面, 另两个坐标面是 yOz 面和 zOx 面. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上, 而 z 轴则是铅垂线.

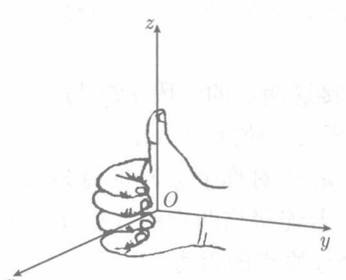


图 8.1

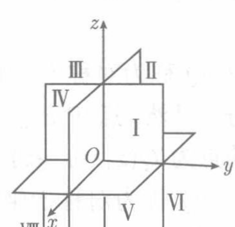


图 8.2

三个坐标面把空间分成八个部分, 每一部分叫做一个**卦限**, 含有三个正半轴的卦限称为第一卦限, 它位于 xOy 面的上方, 第二、第三、第四卦限也在 xOy 面

的上方, 且从 z 轴正向观察它们按逆时针方向排列着. 第五至第八卦限在 xOy 面的下方按逆时针方向排列着, 且第五卦限在第一卦限之下. 八个卦限分别用字母 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII 表示 (图 8.2).

8.1.2　空间点的直角坐标

设 M 为空间的已知点, 过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴, 它们分别与 x 轴、y 轴、z 轴相交于 P、Q、R 三点. P、Q、R 三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x、y、z, 则点 M 就唯一确定了一个有序数组 x、y、z. 反之, 给定一个有序数组 x、y、z, 在 x 轴上取定坐标为 x 的点 P, 在 y 轴上取定坐标为 y 的点 Q, 在 z 轴上取定坐标为 z 的点 R, 然后过 P、Q、R 三点分别作平面垂直于所在的坐标轴, 这三张平面确定了唯一的交点 M. 这样, 空间的点 M 和有序数组 x、y、z 建立了一一对应关系 (图 8.3), 有序数组 x、y、z 就称为点 M 的**直角坐标**, 记为 $M(x,y,z)$, x、y、z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

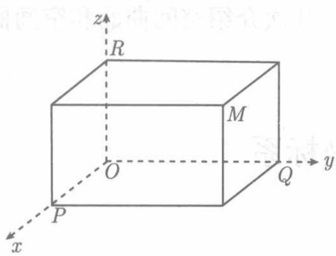


图 8.3

坐标面上和坐标轴上的点, 其坐标各有一定的特征. 例如若点 M 在 yOz 面上, 则其横坐标 $x=0$; 同样, 在 zOx 面上的点, $y=0$; 在 xOy 面上的点, $z=0$. 如果点 M 在 x 轴上, 则其坐标满足 $y=z=0$; 同样 y 轴上点, 其坐标满足 $z=x=0$; 在 z 轴上的点的坐标有 $x=y=0$. 如果点 M 为原点, 则坐标满足 $x=y=z=0$.

两个点 P、Q 称为对称于 xOy 面, 若连接这两点的线段 PQ 垂直于 xOy 面且被 xOy 面所平分. 与点 $P(x,y,z)$ 对称于 xOy 面的点为 $Q(x,y,-z)$. 同样, 与点 $P(x,y,z)$ 对称于 yOz 面的点为 $Q(-x,y,z)$; 与点 $P(x,y,z)$ 对称于 zOx 面的点为 $Q(x,-y,z)$.

两个点 P、Q 称为对称于 z 轴, 若连接这两点的线段 PQ 与 z 轴垂直相交, 且被 z 轴所平分. 显然, 点 $P(x,y,z)$ 对称于 z 轴的点为 $Q(-x,-y,z)$; 点 $P(x,y,z)$ 对称于 x 轴的点为 $Q(x,-y,-z)$; 点 $P(x,y,z)$ 对称于 y 轴的点为 $Q(-x,y,-z)$.

两个点 P、Q 称为对称于坐标原点, 若连接这两点的线段 PQ 通过原点且被原点所平分. 显然, 点 $P(x,y,z)$ 对称于坐标原点的点为 $Q(-x,-y,-z)$.

8.1.3　两点间的距离公式　定比分点公式

设已知空间中的两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$, 现在我们计算这两点之间的距离 $d=|M_1M_2|$. 过点 M_1 和 M_2 各作三个垂直于三条坐标轴的平面, 这六个

平面围成以 M_1M_2 为对角线的长方体 (图 8.4).

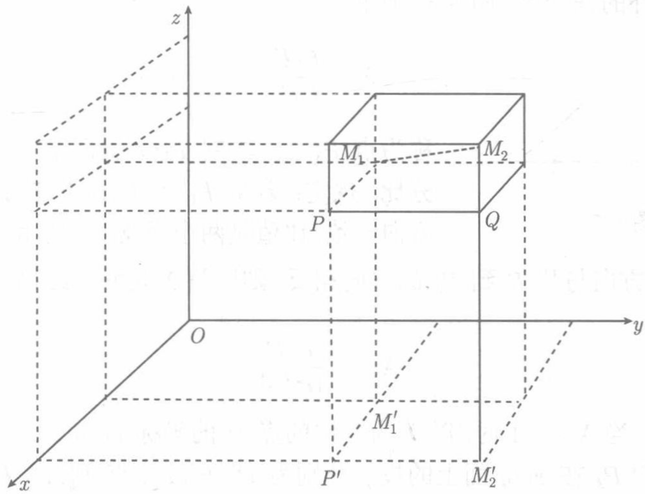


图 8.4

易知

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1Q|^2 + |QM_2|^2.$$

因为 $\triangle M_1PQ$ 是直角三角形, 且 $|M_1Q|^2 = |M_1P|^2 + |PQ|^2$, 所以

$$\begin{aligned} d^2 &= |M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PQ|^2 + |QM_2|^2 \\ &= |M_1'P'|^2 + |P'M_2'|^2 + |QM_2|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \end{aligned}$$

从而有

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \tag{8.1}$$

此式称为**两点间距离公式**.

特别地, 点 $M(x, y, z)$ 到原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{8.2}$$

例 8.1 在 z 轴上求与点 $A(0, 0, 5)$ 和点 $B(1, 0, 0)$ 等距离的点.

解 因为所求的点在 z 轴上, 所以设该点 $M(0, 0, z)$. 据题意有 $|AM| = |MB|$, 即 $\sqrt{(z-5)^2} = \sqrt{1 + z^2}$, 解得 $z = \dfrac{12}{5}$, 故所求的点为 $M\left(0, 0, \dfrac{12}{5}\right)$.

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 是直线 l 上给定的两个点, $P(x,y,z)$ 为直线 l 上除去点 P_2 外的任一点 (图 8.5), 比值

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2} \tag{8.3}$$

图 8.5

称为点 $P(x,y,z)$ 对 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的**分比**. 规定: 若从 P_1 到 P 的方向与从 P 到 P_2 的方向一致, 比值是两个距离 $|P_1P|$ 和 $|PP_2|$ 的比; 若从 P_1 到 P 的方向与从 P 到 P_2 的方向相反, 则比值 λ 是两个距离 $|P_1P|$ 和 $|PP_2|$ 的比值的负值:

$$\lambda=-\frac{|P_1P|}{|PP_2|}.$$

下面讨论, 当 $\lambda\neq-1$ 时, 以 λ 为分比的点 P 的坐标 (x,y,z).

设点 P_1,P,P_2 在 xOy 面上的投影分别为 P_1',P',P_2', 点 P_1',P',P_2' 在 x 轴上的投影为 P_1'',P'',P_2''. 利用比例关系, 有

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{P_1'P'}{P'P_2'}=\frac{P_1''P''}{P''P_2''}=\frac{x-x_1}{x_2-x}.$$

解得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

以上推导过程假定了直线 P_1P_2 与 x 轴不垂直. 若直线 P_1P_2 与 x 轴垂直, 则 P_1'',P'',P_2'' 三个点重合, 上面的比例无意义, 但对于此种情形, 即 $x_1=x_2=x$, 可以验证上面的公式仍成立.

利用对称性, 可得到坐标 y,z 的表示式. 这样就得到由定比 λ 求分点 $P(x,y,z)$ 的坐标公式

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{8.4}$$

当定比 $\lambda=1$ 时, 点 P 就是线段 P_1P_2 的中点. 故有下面的 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的连线的中点 $P(x,y,z)$ 的计算公式

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}. \tag{8.5}$$

在 $\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$ 中, 它是以 P_1 为起点, 分点 P 为终点的有向线段的数量 P_1P 与以分点 P 为起点, P_2 为终点的有向线段的数量 PP_2 之比, 而不是它们的长度之比. 另外, 引入定比分点的概念后, 直线 P_1P_2 上的任意一点 (除 P_2 点外), 与任意实数 λ(除 -1 外) 建立了一一对应关系.

例 8.2 已知点 $P_1(1,0,-1)$, $P_2(0,0,1)$, 求对 P_1、P_2 的分比为 2 的点 P.

解 设点 P 的坐标 $P(x,y,z)$, 因为 $\lambda=2$, 由式 (8.4) 得

$$x=\frac{1+2\times 0}{1+2}=\frac{1}{3},\quad y=\frac{0+2\times 0}{1+2}=0,\quad z=\frac{-1+2\times 1}{1+2}=\frac{1}{3},$$

从而所求的点为 $P\left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right)$.

习 题 8.1

1. 在空间直角坐标系中画出下列各点, 并指出它们所在的坐标轴、坐标面或卦限:

$$A(1,-2,-3)\ ,\quad B(0,2,1)\ ,\quad C(0,-2,0)\ ,\quad D(1,4,-2).$$

2. 自点 $M(4,-3,-5)$ 分别作 xOy 坐标面和 z 轴的垂线, 分别写出垂足的坐标.
3. 分别写出 $A(a,b,c)$ 关于 yOz 坐标面, x 轴及坐标原点 O 的对称点的坐标.
4. 将一边长为 a 的正方体置于 xOy 面上, 其底面中心处于坐标原点, 底面顶点均落在 x 轴和 y 轴上, 试求该正方体各顶点的坐标.
5. 在 yOz 面上, 求与已知点 $A(3,1,2)$, $B(4,-2,-2)$, $C(0,5,1)$ 等距离的点的坐标.
6. 已知三点 $A(1,-2,3), B(3,2,1), C(6,4,4)$. 试求点 D 和点 E, 使四边形 $ABCD$、四边形 $ACBE$ 均为平行四边形.
7. 将线段 AB 五等分, 若已知第一分点与最后一个分点的坐标分别为 $(2,1,1)$, $(2,2,0)$, 试求其他两个分点的坐标.

8.2 向量及其线性运算

8.2.1 向量的概念

在自然界中, 我们常遇到两种不同类型的量, 一类是较简单的量, 可以用一个实数来表示, 如物体的体积、质量、温度等, 这种只具有大小的量称为**数量**(或**标量**). 另一类是较复杂的量, 它们既有大小还具有方向, 如力、位移、速度等, 我们把既有大小又有方向的量称为**向量或矢量**.

我们看到, 向量具有两个特征, 即大小和方向, 而具备这两个特征的最简单的几何图形是有向线段. 于是我们用有向线段表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向, 以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$, A 称为向量的始点, B 称为向量的终点 (图 8.6). 向量可用粗体字母表示, 也可用上方加箭头书写体字母表示, 例如, 向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或向量 $\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$.

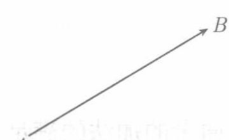


图 8.6

向量的大小称为向量的**模**. 向量 $\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{AB}$ 的模分别记为 $|\boldsymbol{a}|$、$|\overrightarrow{AB}|$. 模等于 1 的向量称为**单位向量**. 模等于 0 的向量称为**零向量**, 记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点与终点重合, 它的方向是任意的.

所有向量的共性是它们都有大小和方向, 在数学上我们只研究与起点无关的向量, 并称这种向量为**自由向量**, 简称**向量**. 因此, 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等, 且方向相同, 则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的, 记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 相等的向量经过平移后可以完全重合.

如果两个非零向量的方向相同或相反, 就称这两个向量平行. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行, 记作 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$. 零向量认为是与任何向量都平行.

当两个平行向量的起点放在同一点时, 它们的终点和公共的起点在一条直线上. 因此, 两向量**平行**又称两向量**共线**.

设有 $k(k \geqslant 3)$ 个向量, 把它们的起点放在同一点, 如果这 k 个向量的终点和它们的公共起点位于同一个平面上, 就称这 k 个向量**共面**. 显然, 一组共线向量一定是共面的; 对于三个向量组成的向量组, 如果其中有两个向量共线, 则这三个向量一定也是共面的.

8.2.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

设有非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时, 平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合, 以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形, 从公共起点出发的对角线向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和, 记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这就是向量加法的平行四边形法则, 如图 8.7(a) 所示

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 也可以由下面的方法求得: 平移向量 $\boldsymbol{b}$, 使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合, 此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量即为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这是向量加法的三角形法则, 如图 8.7(b) 所示.

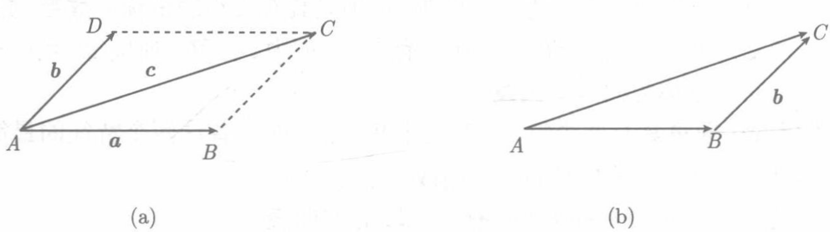


图 8.7

向量的加法的满足下列运算规律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

向量加法的交换律可从平行四边形法则得到, 结合律可由三角形法则得到.

由于向量的加法满足交换律与结合律, 故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n (n \geqslant 3)$ 相加可记为 $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n$, 由向量相加的三角形法则可得 n 个向量相加的法则如下: 自任意点 O 开始, 依次引 $\overrightarrow{OA_1} = \boldsymbol{a}_1, \overrightarrow{A_1A_2} = \boldsymbol{a}_2, \cdots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \boldsymbol{a}_n$, 则以第一向量的起点为起点, 最后一向量的终点为终点作一向量 $\overrightarrow{OA_n}$, 即为和 $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n$.

2. 向量的减法

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量, 与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量, 记为 $-\boldsymbol{a}$.

我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a}), \tag{8.6}$$

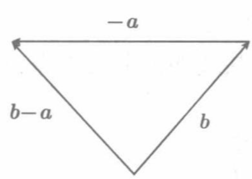
即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上, 便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$.

特别地, 当 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ 时, 有 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.

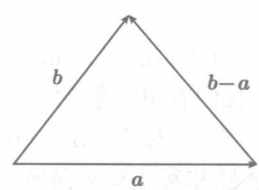
显然, 任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O, 有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

因此, 若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O, 则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, 如图 8.8 所示.



(a)



(b)

图 8.8

由三角形两边之和大于第三边的原理, 容易得到关于向量三角不等式

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \text{及} |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|, \tag{8.7}$$

其中等号在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

3. 向量与数的乘法

定义 8.1 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量, 记作 $\lambda\boldsymbol{a}$, 它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$, $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向当 $\lambda > 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同, 当 $\lambda < 0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反, 当 $\lambda = 0$ 时, $|\lambda\boldsymbol{a}| = 0$, 即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量, 其方向是任意的.

据定义 8.1, 我们有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\quad (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

向量与数的乘法运算简称数乘运算, 可以证明数乘运算满足以下的规律:

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}; \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$, 其中 λ、μ 为实数.

由定义 8.1, 我们可以把任何一个非零向量化为单位向量, 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则向量 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量, 记为 $\boldsymbol{a}^0$, 于是 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$.

定理 8.1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线的充分必要条件是: 存在唯一的实数 λ, 使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证　充分性是显然的, 下面证明必要性.

设向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线, 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取为 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取为 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 则成立 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向, 且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

再证明数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, 若还有 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$ 成立, 两式相减整理得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$

故 $|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0$, 因 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$, 故必有 $|\lambda-\mu|=0$, 即 $\lambda=\mu$.

事实上, 我们有更一般的结论: 向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线的充分必要条件是存在不全为零的实数 λ 和 μ, 使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

向量的加法和数乘运算统称为向量的**线性运算**.

8.2.3　向量的坐标表示法

1. 向量的坐标表示法

我们知道, 平面上或空间中的点与有序数组之间建立了一一对应关系, 从而为数与形的研究提供了条件. 类似地, 为了研究数与向量, 需要建立向量与有序数组之间对应关系. 下面先介绍向量的坐标.

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 的三条坐标轴 x 轴 (横轴)、y 轴 (纵轴)、z 轴 (竖轴) 上, 以原点 O 为起点分别作三个单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$, 其中每个向量的方向都和它所在的坐标轴的正向一致, 这样的向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 称为**基本单位向量**.

如图 8.9, 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为坐标原点 O, 终点为 M, 过向量 $\boldsymbol{a}$ 终点 M 作三个平面分别垂直于三条坐标轴, 设在 x 轴、y 轴、z 轴上的垂足依次为 P、Q、R, 则

点 P 在 x 轴的坐标为 x, 由向量的数乘运算易得 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$, 类似地有 $\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$ 及 $\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$. 由向量加法的三角形法则得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M}\\&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

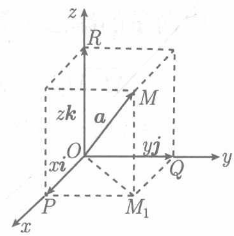


图 8.9

称

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{8.8}$$

为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标分解式**, 简称**坐标式**, 并简记为

$$\boldsymbol{a}=(x,y,z), \tag{8.9}$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标式 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 中的系数 x,y,z 实际上就是向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 M 的坐标.

设向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$, 作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$, 则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$, 由勾股定理可得

$$|\boldsymbol{a}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}$$

又 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$, 于是向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 的模的坐标表示式为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{8.10}$$

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的**向径**.

如图 8.10 所示, 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是任意两点, M_1 为起点 M_2 为终点的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, 我们讨论 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 坐标式.

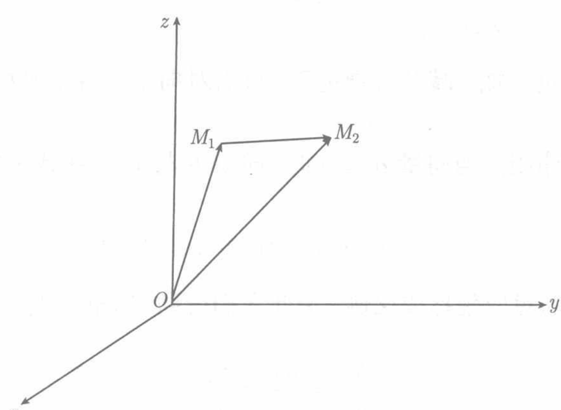


图 8.10

由向量的减法运算得

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \\
&= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k},
\end{aligned}
$$

即

$$
\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \tag{8.11}
$$

由式 (8.11) 即可得到两点间的距离公式

$$
d = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.
$$

利用向量的坐标及向量的线性运算, 可以将向量的加法、减法和数乘运算转化为数的代数运算.

设 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 即

$$
\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k},
$$

则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) + (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \\
&= (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k} \\
&= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z). \\
\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) - (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \\
&= (a_x - b_x)\boldsymbol{i} + (a_y - b_y)\boldsymbol{j} + (a_z - b_z)\boldsymbol{k} \\
&= (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z) \\
\lambda\boldsymbol{a} &= \lambda(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \\
&= (\lambda a_x)\boldsymbol{i} + (\lambda a_y)\boldsymbol{j} + (\lambda a_z)\boldsymbol{k} \\
&= (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).
\end{aligned}
$$

由此可见, 对向量进行加、减及数乘运算, 只需对向量的各个坐标进行相应的运算就行了.

定理 8.1 已经指出, 当向量 $\boldsymbol{a} \neq 0$ 时, 向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线或平行相当于 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$, 用坐标可表示为

$$
(b_x, b_y, b_z) = \lambda(a_x, a_y, a_z),
$$

上式说明 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的对应坐标成比例. 由此我们得到, 向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线或平行的充要条件是

$$
\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}.
$$

例 8.3　已知 $\boldsymbol{a} = (2, 1, -3), \boldsymbol{b} = (2, 1, 1)$, 求 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$.

解

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} &= (2,1,-3)+(2,1,1)=(4,2,-2),\\
\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} &= (2,1,-3)-(2,1,1)=(0,0,-4),\\
\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b} &= (2,1,-3)-3(2,1,1)=(-4,-2,-6).
\end{aligned}
$$

2. 方向角与方向余弦

把两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放到同一点时, 两个向量之间的不超过 π 的夹角称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**, 记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$, 夹角 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 取值为区间 $[0,\pi]$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量, 规定它们的夹角可以在 0 与 π 之间任意取值. 若 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$, 称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$**垂直**, 记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 类似地, 可规定向量与坐标轴的夹角.

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向角.

设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, 则易知

$$x=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha,\quad y=|\boldsymbol{r}|\cos\beta,\quad z=|\boldsymbol{r}|\cos\gamma.$$

$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**, 且

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}.$$

从而

$$(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}^0.$$

上式表明, 以向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{r}^0$. 因此向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+cos^2\gamma=1.$$

上式表明: 一个向量的方向角 α、β、γ 并非彼此独立.

例 8.4 给定两点 $A(1,2,1)$ 和 $B(2,3,1)$, 计算向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $\overrightarrow{AB}=(2-1,3-2,1-1)=(1,1,0)$; $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$; 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\gamma=0;$$

向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向角为 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, $\beta=\dfrac{\pi}{4}$, $\gamma=\dfrac{\pi}{2}$.