高等数学

高 等 数 学（第一册）

目　　录

（有△者与《高中数学课本》相应内容大体相当）

引　　言

本课程的基础内容是一元微积分，读者在开始学习时，当然想预先大体了解一下：微积分研究的典型问题是什么？这些问题要用什么方法解决？微积分产生的历史背景是什么？下面就来大体谈一下．

微积分的两个典型几何问题是：

(1) 在 x，y 平面给出一条曲线，方程为 $y=f(x)$，图 0.1(a)，怎样求曲线上任一点的切线斜率？

(2) 在 x，y 平面的 x 轴上方给出一条曲线，方程为 $y=f(x)$，图 0.1(b)，怎样求图中阴影部分的面积？

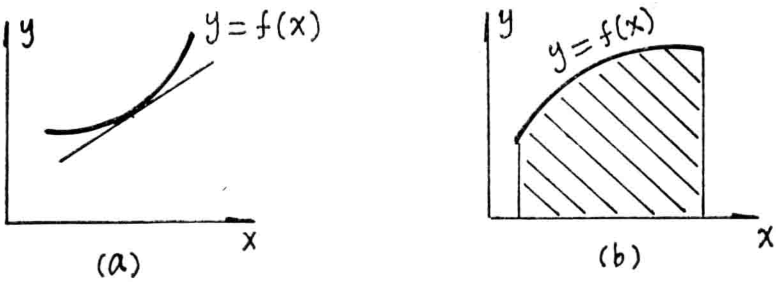

图　0.1

下面以问题 (2) 为例，说明用什么方法解决，

例．求抛物线 $y=x^2$，直线 $x=1$，与 x 轴围成的图形的面积．图 0.2．

解．在中学数学里，我们用园内接正多边面积来逼近园的面积，现在我们也考虑用直线形的面积来逼近抛物线下的面积．

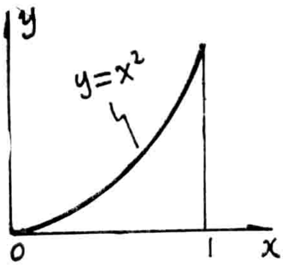

图　0.2

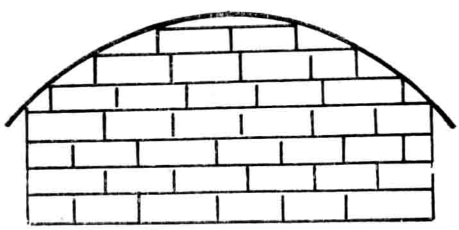

图　0.3

日常生活中常看到用直线形逼近曲线形的例子，例如，要用砖砌出一个拱形的墙，

可以采取将砖的数目一层一层减少的办法，如图 0.3 所示，这是用台阶形逼近曲线形．这个模型同我们的问题很相似．

如图 0.4，将 $0\leqslant x\leqslant 1$ 等分成许多小段，在每一小段上用左端点处的高作一长方形，这样，在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上就得到一个台阶形，我们用台阶形的面积逼近曲线下的面积．

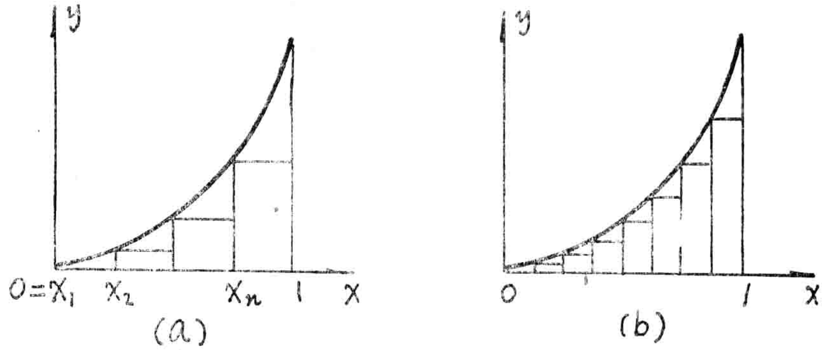

图 0.4

由图看到，当将 $0\leqslant x\leqslant 1$ 分得越细，逼近的误差就越小，可以想象，如果将 $0\leqslant x\leqslant 1$ 无限细分，台阶形面积就无限逼近曲线下的面积．

设想将 $0\leqslant x\leqslant 1$ 分成 n 等分，记每一小段的左端点分别为

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,$$

再记每一小段的长为 $\triangle x$，则相应的小长方形面积分别为

$$x_1^2\triangle x,\ x_2^2\triangle x,\ \cdots,\ x_n^2\triangle x,$$

将这些小长方形的面积相加，得面积的近似式

$$A\approx x_1^2\triangle x+x_2^2\triangle x+\cdots+x_n^2\triangle x.$$

将 $0\leqslant x\leqslant 1$ 无限细分，台阶形面积就无限逼近抛物线下的面积，记成

$$A=\lim(x_1^2\triangle x+x_2^2\triangle x+\cdots+x_n^2\triangle x).$$

称为台阶形面积的极限，lim 是“limit（极限）”的前三个字母．

以上步骤可以用一个很形象的符号来表示．

设想将 $0\leqslant x\leqslant 1$ 无限细分时，每一小窄条的宽度是 dx，再考虑以任一点 x 为左端点的小窄条，图 0.5，在无限细分的条件下，小窄条的面积就成为以 x^2 为高、以 dx 为底的长方形面积，记成

$$dA=x^2dx,$$

称为面积的微分，将这些极其微小的面积（它们布满整个图形）由 $x=0$ 到 $x=1$ 积累起来，就成为总面积，记成

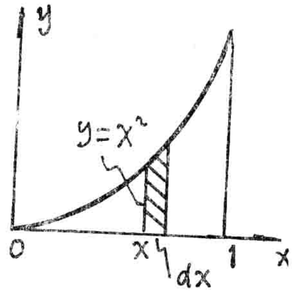

图 0.5

$$A = \int_0^1 x^2 dx,$$

称为微分 x^2dx 的积分，所以

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim(x_1^2 \triangle x + x_2^2 \triangle x + \cdots + x_n^2 \triangle x).$$

在第 7 章 §3 中将详细说明这个积分的计算方法．我们将发现，并不需要计算很烦的和式极限．这里就不再继续进行下去了．读者如果现在就想知道究竟怎么算，不妨翻到那一节去看一看．

由上可知，问题（2）是一种特殊类型的极限问题．以后将看到，问题（1）是另一种特殊类型的极限问题．

微积分的另外两个典型力学问题，是关于变速运动速度和路程的研究，它们也是与上两类问题类似的极限问题．

下面简要说明微积分产生的历史背景．十七世纪的欧洲，正处在工业革命时期，航海，造船，运河、渠道的修建，以及各种机械都在发展，这就促使人们寻求研究物体运动变化、曲线、图形的一般数学方法，这样就产生了微积分．

例如造船，由于保证船舶安全航行的要求，就需要知道处理面积、体积、力矩、重心等的一般数学方法．这些问题的解决和上面所说的面积问题有着类似的思路．

研究变速运动的一个例子是关于天体运行规律的研究．由于航海中利用天体确定船舶位置的需要，以及怎样解释现实世界的需要，引起了人们对于天体运行规律深入研究的兴趣．行星运动就是一种变速运动．

这里，值得谈一下历史上微积分方法在研究天体运行规律中取得成就的一个例子．

在波兰天文学家哥白尼的日心说的基础上，十七世纪初，法国天文学家开普勒通过对行星特别是火星的观察，总结出了行星运动的三大定律：

（1）行星沿椭园轨道围绕太阳运动，太阳位于椭园轨道的一个焦点；

（2）行星和太阳之间的联线，在相等的时间内扫过椭园的面积相等，图 0.6．行星离太阳越近速度越快，离太阳越远速度越慢；

（3）行星在椭园轨道上运行一周的时间的平方，正比于椭园长半轴的平方．

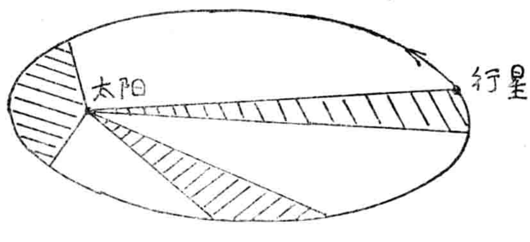

图 0.6

开普勒只是通过观测进行总结，并未在数学上加以论证．开普勒三大定律涉及曲线形的面积、面积速度、变速运动的瞬时速度、路程等数学概念和处理的方法，运用基本的物理定律和数学方法论证开普勒三大定律，只有当十七世纪下半叶牛顿（Isaac Newton，1642—1727）总结出了万有引力定律，和牛顿、莱布尼兹（Gottfrie Wilholm Leibniz，1646—1716）总结出了微积分以候才有可能．

1781 年，德国的威廉•赫歇尔通过观察，发现了土星之外的一颗新的行星，就是

天王星，在进一步研究天王星运动的过程中，人们发现它在太空中的计算位置与观测位置不符，因而推测在天王星之外还有一颗未知的行星.

十九世纪中叶，英国的亚当斯和法国的勒维列，先后用数学方法推算出了这颗未知行星在太空中的位置，不过，这只是理论的推测，还未被实践所证实.

1846 年 9 月 23 日，柏林天文台收到了勒维列的信，当晚，在柏林天文台工作的加勒，将望远镜指向秋夜的星空，在勒维列计算所指出的位置，果然找到了这颗新的行星，就是海王星．亚当斯和勒维列的计算结果被证实了！

这个例子一方面说明了运用微积分和其他数学方法在历史取得的成就，另一个面也大体说明了应用数学方法解决实际问题的三个环节：

始：将实际问题运用物理定律或其他资料化为数学问题．如行星运动要运用万有引力定律、开普勒定律等；

中：求解．如亚当斯和勤维列计算海王星的位置；

终：求解的结果要经过实践（包括实验）的检验，能解释实际现象或解决实际问题．如海王星的存在被加勒观测所证实.

最后要指出，在牛顿、莱布尼兹的著作中，并没有将极限作为微积分的基础，而是用“无限小长度”、“无限小时间”这样一些不够明确的概念来解决问题的.

系统地将微积分建立在极限基础之上的，是十九世纪上半叶法国的柯西（Augustin Cauchy，1789—1857）．而作为极限理论基础的实数理论、集合论，则是由十九世纪下半叶的狄特全（R.Dedekind，1831—1916）、康脱（George Cantor，1845—1918），以及二十世纪初期的策墨罗（Zelmelo）等建立的．在近代，已经发展到系统地运用集合论来处理微积分的问题.

本书只将微积分建立在极限的基础之上，并在适当的场合运用牛顿、莱布尼兹的虽不严格但却很直观、很生动的思略．不过，为了和现代数学接近，并且为了叙述方便起见，将运用一些集合的概念，主要用于描述函数的定义域、函数类，以及基本的函数空间（距离空间，内积空间）.

下面，我们先要讨论函数和极限，然后才能正式进入以上列举的典型问题.

第1章　集 合，函 数

在中学代数、三角课程中，已经学习过集合、函数的基本内容，现将主要内容复习一下并作些补充．

△§ 1　实数，集合及其运算，邻域与空心邻域

1．　实数

这里简述一下．

（1）正整数又称为**自然数**．零、正负整数、正负分数统称为**有理数**．有理数都可以写成

$$\frac{p}{q}$$

的形式，其中 p 是整数或零，q 是非零整数，且 p，q 无公因子．（如是整数，取 $q=1$）．如$\frac{2}{3}$，　$2=\frac{2}{1}$等等，

分数可用有穷小数或无穷循环小数表示，如

$$\frac{3}{4}=0.75,\qquad \frac{2}{3}=0.6666\cdots$$

反之，有穷小数、无穷循环小数都可用分数表示，如

$$2.345=\frac{2345}{1000},$$

$$3.\overset{\frown}{4}\overset{\frown}{5}45\cdots=3+\frac{45}{99}=\frac{342}{99},$$

$$3.\overset{\frown}{456}\,\overset{\frown}{456}\cdots=3+\frac{456}{999}=\frac{3453}{999},$$

$$3.17\overset{\frown}{450}\,\overset{\frown}{456}\cdots=\frac{317}{100}+\frac{456}{99900}=\frac{317139}{99900},$$

$$3.176666\cdots=\frac{317}{100}+\frac{6}{900}=\frac{2859}{900}.$$

以上只是通过具体例子来说明有穷小数、无次循小数与分数的关系．可以用和这些例子类似的思路证明：分数相当于有穷小数和无穷循环小数．

（2）凡可用正负无穷不循环小数表示的数称为**无理数**．无理数一定不能写成$\frac{p}{q}$的形

式（其中 p 为整数或零，q 为非零整数）.

如 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，π 等等这样的数都是无理数，（π 的证明见第 7 章附录），它们都可用无穷不循环小数表示：

$$\sqrt{2}=1.414\cdots, \qquad \sqrt{3}=1.732\cdots,$$

$$\pi=3.14159\cdots.$$

有理数和无理数一起称为实数：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}0\text{，整数}\\ \text{分数（有穷小数，无穷循环小数）}\end{cases}\\ \text{无理数（无穷不循环小数）.}\end{cases}$$

实数与数轴上的点一一对应，有理数对应的点称为有理点，无理数对应的点称为无理点．数轴上与点对应的数称为该点的坐标．图 1.1.1.

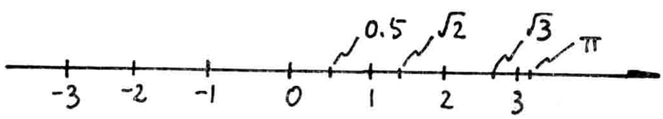

图 1.1.1

关于实数，还有下述一些值得注意的事.

任何两个有理数之间一定存在无穷多个有理数；同样，任何两个无理数之间也一定存在无穷多个有理数.

两个有理数经四则运算后仍是有理数；一个有理数与一个无理数经四则运算后一定是无理数.

但两个无理数经四则运算后却可能成为有理数．如

$$(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}=1, \qquad \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2.$$

任一实数 a 的绝对值 $|a|$ 总是正数或 0：

定义.
$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0\end{cases}$$

注意：当为 a 负数时，$-a$ 为正数.

绝对值的几何意义是：$|a|$ 等于数轴上坐标为 a 的点到原点的距离.

绝对值有下述性质：

（1） $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$，$-|a|\leqslant -a\leqslant |a|$.

（2） $|ab|=|a|\cdot|b|$，$\left|\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{|b|}{|a|}$.

(3) $|a \pm b| \leqslant |a| + |b|$.

证．如果 $a+b \geqslant 0$，则 $|a+b| = a+b$，由 $a \leqslant |a|$，$b \leqslant |b|$，得

$$|a+b| = a+b \leqslant |a| + |b|.$$

如果 $a+b<0$，则 $|a+b| = -(a+b) = (-a)+(-b)$，由 $-a \leqslant |a|$，$-b \leqslant |b|$，得

$$|a+b| = -(a+b) = (-a)+(b).$$

类似可证 $|a-b| \leqslant |a| + |b|$.

(4) $|a \pm b| \geqslant |a| - |b|$.

证．此式可利用 (3) 证出．由

$$|a| = |(a+b)-b| \leqslant |a+b| + |b|,$$

所以

$$|a+b| \geqslant |a| - |b|.$$

类似可证 $|a-b| \geqslant |a| - |b|$.

(5) $\sqrt{a^2} = |a|$.

2. **集合**

在日常生活和生产、科学研究中，我们常要考虑某些被研究的对象的全体．例如某一批产品，某班全体同学，满足某种条件的全体实数等等，这引导到数学中的集合的概念．

集合的概念是数学中的基础概念，但要给它精确下定义却很困难，很难再用别的词来定义它，我们只给以一定的说明．

我国数学家陈建功（1893—1971）是这样说明集合概念的：**“凡可以供吾人思考的，并且能够辨别彼此的，叫做个体，总括某些个体成一整体，我们称之为集”**．（见陈建功〈实函数论〉$p.1$）．

集合论的创始人康脱（George Cantor，1845—1919）是这样说明集合概念的：“把一定的并且彼此可以明确识别的东西（东西可以是直观的对象，也可以是思维的对象）放在一起，叫做‘集’”．（见陈建功〈实函数论〉$p.31$）．

简单说，一些确定的并且可以明确识别彼此的对象的全体称为**集合**，简称为**集**，集中的每一个对象称为集合的**元素**．（元素相重时只算一个）

例如，全体实数成一集合，其中每一个实数是这个集合的一个元素；某班全体同学成一集合，其中每一位同学是这个集合的一个元素；红、橙、黄、绿、青、蓝、紫七种颜色的全体成一个集合，其中每一种颜色是这个集合的一个元素．

所谓“确定的”是指这些对象不能模糊不清，它在不在集合中应当是明确的．如“很大的数的全体”，“充分接近 1 的全体数”，却不能成为集合，因为什么是“很大”，什么是“充分接近 1”是不明确的．如，100 算不算很大？0.5 算不算充分接近 1？都无法回答．

集合通常用大写的字母，集合的元素通常用小写的字母表示.

某个元素 x 属于 A，记成

$$x \in A,$$

某个元素 x 不属于 A，记成

$$x \overline{\in} A.$$

全体实数所成的集合记成 R.

集合有两种表示法：

(1) **列举法**：在花括号内列出全体元素，每个元素之间用逗号隔开.

例. 数轴上坐标分别为 1，2，3 的三个点组成一集，记为 A，可表示为

$$A=\{1,\ 2,\ 3\}.$$

(2) **描述法**：有许多集的元素无法一一列举，或者不便一一列举，这时可在花括号内左边写出元素的一般符号，右边写出元素满足的一般条件，中间用一直道隔开.

例. 设 A 为方程 $x^4-1=0$ 的全体实数根所成的集合，可表示成

$$A=\{x \in R \mid x^4-1=0\}.$$

在本书中，常用的集合有数集、点集、函数集.

直线上，平面上，或空间内具有某种性质的全体点所成的集合称为**点集**.

具有某种性质的全体函数所成的集合称为**函数集**.

例如，设 P 为全体多项式所成的集合，则

$$x^2+1 \in P, \qquad \sqrt{x^2+1} \overline{\in} P.$$

关于集合，还有下述几个常用的概念.

(1) **两集相等**：设两个集合 A，B 的元素相同，称为两个集相等，记成

$$A=B$$

例. A 为由 -1，1 两个数组成的集：

$$A=\{-1,\ 1\},$$

B 为方程 $x^4-1=0$ 的全体实数解所成的集：

$$B=\{x \in R \mid x^4-1=0\},$$

显然

$$A=B.$$

(1) **子集**：设集 A 的元素都属于集 B，则称 A 是 B 的**子集**. 记成

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A.$$

读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”. 图 1.1.2.

显然，任一集 A 是它自己的子集：

$$A \subset A.$$

并且，当且仅当 $A \subset B$，$B \subset A$ 时，$A = B$。

如果 A 是 B 的子集，且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 为 B 的**真子集**.

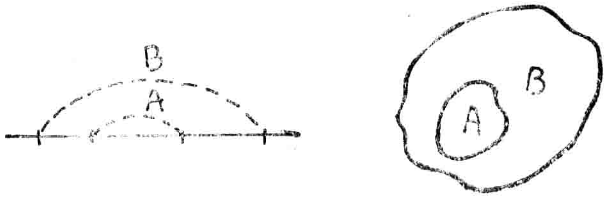

图 1.1.2

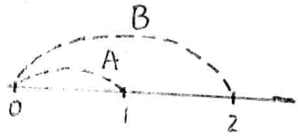

图 1.1.3

例. 设 $A = \{x \mid 0 < x < 1\}$，$B = \{x \mid 0 < x < 2\}$，图 1.1.3，显然

$$A \subset B.$$

例. 设 P_2 为全体实系数二次多项式所成的集，P 为全体实系数多项式所成的集，显然

$$P_2 \subset P.$$

(3) **空集**：不含任何元素的集合称为空集，记成 $\emptyset$.

没有元素能不能组成集合？长期以来，人们都认为没有元素当然没有集合，不过后来发现，容许没有元素的集合对讨论问题更方便．但要注意，不同对象的空集不能认为是相等的．如鸡笼里没有鸡，鸡笼里的鸡组成空集，兔笼里没有兔，兔笼里的兔组成空集，这两个空集是不相等的．

例. 记 A 为方程

$$x(2x-3)+(x+1)^2=0$$

的全体实数解所成的集，因为这个方程就是

$$3x^2 - x + 1 = 0, \qquad \text{判别式 } (-1)^2 - 4 \times 3 \times 1 > 0,$$

不存在实数解，因而 A 是空集：

$$A = \emptyset.$$

3. 集合的运算

(1) **并集**：两个集 A，B 中的元素合并在一起，相重的的只取一次，称为 A，B 的**并集**，记成

$$A \cup B,$$

读作"A 并 B"，图 1.1.4(a).

(2) **交集**：两个集 A，B 中的公共元素组成一集，称为 A，B 的**交集**，记成

$$A \cup B,$$

读作“A 交 B”，图 1.1.4(b).

(3) **差集**：设有两集 A，B，属于而不属于 B 的全体元素组成一集，称为 A 与 B 的差集，记成

$$A \setminus B,$$

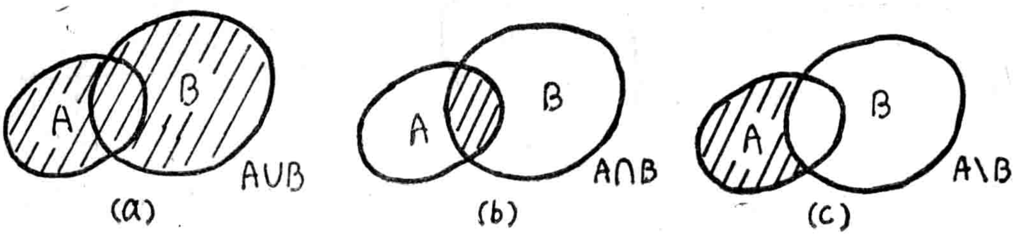

图 1.1.4

读作“A 减 B”. 图 1.1.4(c). 注意，用 $A\setminus B$ 时，不要求 B 是 A 的子集.

例. 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4,5\}$，$C=\{4,5,6\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$，

$A\cap B=\{3\}$，$A\cap C=\emptyset$，$A\setminus B=\{1,2\}$，$A\setminus C=A$.

4. 区间，邻域，空心邻域

常用的直线上的点集是区间、邻域.

满足条件 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数所成的集合称为**闭区间**，又记成 $[a,b]$，它是数轴上由点 a 到点 b 的线段. 满足条件 $a<x<b$ 的全体实数所成的集合称为**开区间**，又记成 (a,b)，它是数轴上由点 a 到点 b 但不包括 a，b 两点在内的线段，图 1.1.5.

类似定义半开半闭区间 $[a,b]$，$[a,b]$，无穷区间 $(-\infty,+\infty)$，半无穷区间 $[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,a]$，$(-\infty,a)$.

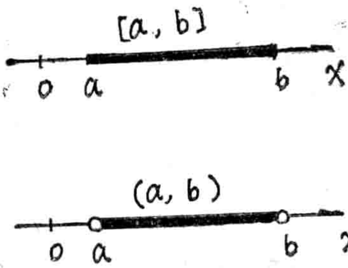

图 1.1.5

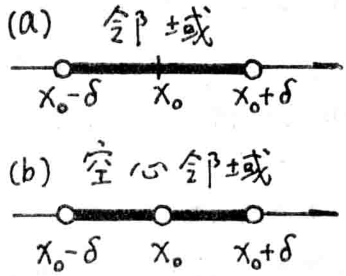

图 1.1.6

以点 x_0 为中心的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ **邻域**，其中 δ 心为某个正数，图 1.1.6(a)，x_0 称为邻域的**中心**，δ 称为邻域的**半径**，邻域又可表示成

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta \text{ 或 } |x-x_0|<\delta.$$

今后我们有时要考虑点 x_0 附近，但不包括 x_0 在内的所有点．将点 x_0 的邻域去掉 x_0 后所成的点集称为点 x_0 的**空心邻域**，图 1.1.6(b)，它可表示成

$$(x_0-\delta,x+\delta)\setminus\{x_0\}，\text{或 } 0<|x-x_0|<\delta，\text{或}(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\delta).$$

5. 逻辑量词 $\forall$，$\exists$

为了今后有时书写简单起见，再介绍两个缩写的符号：

$\forall$ 表示“对每一个….”，或“对任意的….”；

$\exists$ 表示“存在….”．

其中 $\forall$ 是 Any（每一个，任何）的字头 A 的倒写，$\exists$ 是 Exist（存在）的字头 E 的反写．

例．“对 $-\infty<x<+\infty$ 中的每一个 x，都成立 $(-x)^2=x^2$”，可以表示成：

$$\forall x\in(-\infty,+\infty),\qquad (-x)^2=x^2.$$

例．“存在正数 x，使得 $x^2-3x+2>0$”，可以表示成：

$$\exists x>0,\ x^2-3x-2>0.$$

例．“对任意给定的正数 $\varepsilon>0$，存在正数 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，成立 $|u_n-A|<\varepsilon$，”可以表示成：

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0，\text{当 } n>N \text{ 时}，|u_n-A|<\varepsilon.$$

在本书中，这两个逻辑量词一般只用在叙述和推理中，在正式的定义、定理中一般不用．

习　　题

1．将下列小数化成分数：

(1) 42.078　　(2) 1.04444….　　(3) $2.\overset{\frown}{305}\,\overset{\frown}{305}\cdots$

(4) $89.04\overset{\frown}{123}\,\overset{\frown}{123}\cdots$　　(5) $99.09\overset{\frown}{2047}\overset{\frown}{2047}\cdots$

2．证明：两个有理数之间一定存在无穷多个有理数．

3．设 a 为有理数，b 为无理数，证明 $a+b$，$a-b$，ab，$\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{a}{b}$ 均为无理数，其中分母不为 0．（提示：用反证法）．

4．解不等式，并把解在数轴上表示出来

(1) $|x-1|<0.01$；　　(2) $0<|x-x_0|<\delta$；

(3) $|x|>x$；　　(4) $\left|\dfrac{x}{1+x}\right|>\dfrac{x}{1+x}$

[答：(1) $x\in(0.99,\ 1.01)$；　　(2) $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$；

(3) $x\in(-\infty,0)$；　　(4) $x\in(-1,0)$.]

. 证明不等式

(1) $|x-y|\leqslant|x-z|+|z-y|$. (2) $||x|-|y||\leqslant|x-y|$

6. 当 $0<x<\pi$ 时简化 $\sqrt{\csc^2x-1}$.

7. 当 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$时化简$\sqrt{\sec^2x-1}$.

8. 设 $A=\{2,3,5,7\}$，$B=\{0,3,7,9\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$.

9. 在数轴上画出下列点集：

$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|0<x<2\}$，$C=\{x|1<x<3\}$，

并求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$，$A\cup C$，$A\cap C$，$A\setminus C$.

10. 设 A 为全体偶数所成的集，B 为全体奇数所成的集，求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$.

11. 设 A 为全体分母为 4 的真分数所成的集，B 为全体分母为 6 的真分数所成的集，写出 A 和 B 的所有元素，并求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$.

12. 设 A 为方程 $x^2+3x+2=0$ 的全体解所成的集，$A=\{x;\ x^2+3x+2=0\}$，B 为绝对值不大于 2 的全体非零整数所成的集，$C=\{1,2,3,4\}$，证明

$$A\subset B,\qquad A=B\setminus C.$$

13. 已知 $A\subset B$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

14. 在 xy 坐标平面上，画出下列平面点集的图形：

(1) $A=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$； (2) $B=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$；

(3) $C=\{(x,y)|\ |x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1\}$.

15. 将下列句子用 $\forall$，$\exists$ 表示：

(1) 对于 $1<x<2$ 中的每一个 x，都使得 $x^2-3x+2<0$ 成立.（为什么？）

(2) 存在负数 x，使得 $x^2-x-2<0$.（为什么？）

§ 2. 函　　数

1. 函数的概念与图形

在所考虑的问题里，可取不同数值的量称为**变量**，只能取固定数值的量称为**常量**. 为了方便起见，我们称在一非空数集内可以任意取值的量为变量. 这样，常量就成为变量的特例、

一个问题常涉及几个变量，它们之间有确定的对应关系，这样就抽象出函数的概念，

例. 某地某天 24 小时的气温 T 与时间 t 有确定的对应关系，设用自动记录仪记录如图 1.2.1(a). 这里有一个 t 的取值的集合 $D=[0,24]$，(单位小时)，有一个对应规则，$\forall t\in[0,24]$，由这个对应规则对应一个确定的数 T.

例. 对于 $[0,+\infty)$ 中的每一个 x，考虑公式 $y=\sqrt{x}$，这里有一个 x 取值的集合 $D=[0,+\infty)$，有一个对应规则：开平方根，$\forall x\in[0,+\infty)$，由这个对应规则对应一个确定的数 $y=\sqrt{x}$. 图 1.2.1(b).

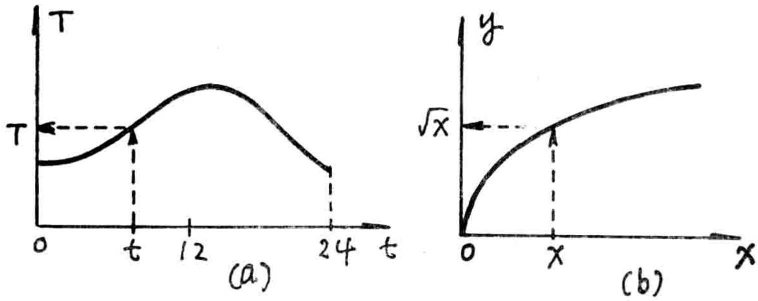

图 1.2.1

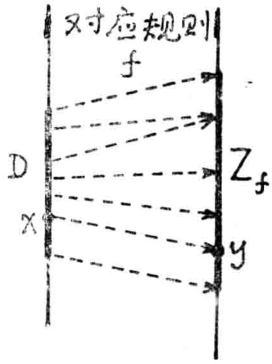

图 1.2.2

定义．设有一个非空实数集合 D**，如果有一个应对规则** f**，使得对每一个** $x \in D$ **都能够对应一个确定的实数** $y \in R$**，则将对应规则** f **称为定义在** D **上的一个函数，或称为** D **到** R **内的一个函数．**图 1.2.2.

D 称为函数的**定义域**，又记成 D_f.

x 所对应的 y 称为 x 所对应的函数值，记成

$$y = f(x).$$

全体函数值所成的集合称为函数的**值域**，记成 Z_f. x 又称为**自变量**，y 又称为**因变量**.

注意：对应规则 f 是函数，$f(x)$ 是 x 所对应的函数值，在一些现代数学分析教程中，将 D 到 R 内的函数 f 记成

$$f: D \longrightarrow R，\text{或} \ D \xrightarrow{f} R.$$

（这里“$\longrightarrow$”表示“由…到…”）

或记成

$$f: x \longmapsto y = f(x)，\text{或} \quad x \overset{f}{\longmapsto} y = f(x)$$

（这里“$\longmapsto$”表示“由…对应…”）

这种记号的方便之处是可以推广到一般的集合中元素与集合中元素的对应．本书为简单起见，也简称 $f(x)$ 为函数.

当 x 取固定值 x_0 时，所对应的函数值是 $f(x_0)$，有时又记成

$$y|_{x=x_0} = f(x_0),$$

称为函数 $f(x)$ 在 x_0 的**特定值**.

例． $y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}$，

$$y|_{x=1} = f(1) = \sqrt{4 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

一个问题里如果涉及几个函数，它们应当用不同的字母表示，如 $f(x)$，$g(x)$，…

等，以示区别，

在平面直角坐标系中，取自变量在横轴上变化，因变量在纵轴上变化，则函数的图形是指平面点集：

$$\{(x,y)|y=f(x),x\in D\}$$

图 1.2.3.

为了方便起见，补充规定：如果对于定义域内的某些或全部 x 值，有多个 y 值与 x 对应，称为**多值函数**．相应地，前面所说的只有一个 y 值与 x 对应，又称为**单值函数**．本书如无特别特明，函数都单值函数、

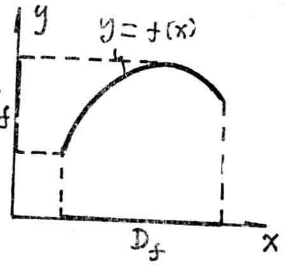

图 1.2.3

下面再指出几点值得注意的事项：

(1) 如果一个函数具有实际意义，其定义域是指按实际意义允许的自变量的全体数值所成的集合．

如果一个函数只是用抽象的公式表示，且并末加以其他说明，其定义域是指按公式有对应函数值的自变量全体数值所成的集合．（本书变量只取实数值）

例如，考虑半径为 r 的园面积 $A=\pi r^2$，，其定义域是 $0<r<+\infty$；如果一般给出函数 $y=\pi x^2$，其定义域是 $-\infty<x<+\infty$．

例．求 $y=\dfrac{1}{x(x-1)}$ 的定义域．

解．函数在 $x=0$，1 两个点没有意义，在其他点均有定义，因此定义域为

$$D=\{x|-\infty<x<+\infty,\ \text{且}\, x\neq 0,1\},$$

或写成并集的形式：

$$D=(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty).$$

例．求 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域．

解．这是两项之和，当且仅当每一项有定义时函数有定义，第一项的定义域是

$$D_1=[-2,2],$$

第二项的定义域是

$$D_2=(1,+\infty),$$

函数的定义域是 D_1，D_2 的交集：