吉林广播电视大学附设中专教材

数 学

关彩云 赵明珍 主编

SHUXUE

东北师范大学出版社

吉林广播电视大学附设中专教材

数　　学

关彩云　赵明珍　主编

东北师范大学出版社
1995・长春

(吉)新登字 12 号

吉林广播电视大学附设中专教材

数　学

SHUXUE

关彩云　赵明珍　主编

责任编辑：刘兆辉　　封面设计：李冰彬　　责任校对：江　萩

东北师范大学出版社出版　　东北师范大学出版社发行
(长春市斯大林大街 110 号)　　吉林工业大学印刷厂制版
(邮政编码：130024)　　吉林工业大学印刷厂印刷

开本：787×1092 毫米 1/32　　1995 年 8 月第 1 版
印张：13.25　　1995 年 8 月第 1 次印刷
字数：280 千　　印数：0 001－7 000 册

ISBN 7-5602-1612-9/G·756　　定价：10.50 元

目　　录

第一章　函　数

§1—1　集　合

一、集合的概念

1. 集合与元素

我们考察下面几组对象：

(1)本班的全体学生；

(2)某农场所有的拖拉机；

(3)1,2,3,4,5；

(4)与一个角的两边距离相等的所有的点；

(5)所有的直角三角形．

它们分别是由一些学生、一些物体、一些数、一些点、一些图形组成的．我们说，每一组对象的全体形成一个**集合**(有时也简称**集**)．集合里的各个对象叫做这个集合的**元素**．显然，集合是由具有某种共同性质的元素所组成的．例如，(3)是由数 1,2,3,4,5 组成的集合，其中的对象 1,2,3,4,5 都是这个集合的元素，它们的共同性质是：不大于 5 的自然数．

含有有限个元素的集合叫做**有限集**，上面的(1)，(2)，(3)这三个集合都是有限集；含有无限个元素的集合叫做**无限集**，上面(4)，(5)这两个集合都是无限集．

对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的．这就是

说，任何一个对象或者是这个给定集合的元素，或者不是它的元素．例如，对于由所有的直角三角形组成的集合，内角分别为 30°，60°，90°的三角形，是这个集合的元素，而内角分别为 40°，60°，80°的三角形，就不是这个集合的元素．

对于一个给定的集合，集合中的元素是互异的．这就是说，集合中的任何两个元素都是不同的对象；相同的对象归入任何一个集合时，只能算作这个集合的一个元素．因此，集合中的元素是没有重复现象的．

2. 集合的表示法

集合的表示方法，常用的有列举法和描述法．

把集合中的元素一一列举出来，彼此之间用逗号隔开，写在大括号内表示集合的方法，叫做**列举法**．

例如，由数 1，2，3，4，5 组成的集合，可以表示为

$$\{1,2,3,4,5\}.$$

又如，方程 $x^2+2x-3=0$ 所有的解组成的集合（简称为解集）可以表示为

$$\{-3,1\}.$$

当集合的元素很多，不需要或不可能一一列出时，也可只写出几个元素，其他的用省略号表示．例如，小于 100 的自然数集可表示为 $\{1,2,3,\cdots,99\}$；正偶数集合可表示为 $\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$，其中 n 表示自然数．

用列举法表示集合时，不必考虑元素之间的顺序．例如由四个元素 $-3,0,2,5$ 组成的集合，可以表示为 $\{-3,0,2,5\}$，也可以表示为 $\{0,2,-3,5\}$，等等．

应该注意，a 与 $\{a\}$ 是不同的：a 表示一个元素；$\{a\}$ 表示一个集合，这个集合只有一个元素 a．

把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表

示集合的方法，叫做**描述法**．这时往往在大括号内先写上这个集合的元素的一般形式，再划一条竖线，在竖线右边写上这个集合的元素的公共属性．

例如：

由不等式 $x-1>0$ 的所有的解组成的集合(即 $x-1>0$ 的解集)，可以表示为

$$\{x \mid x-1>0\};$$①

由直线 $y=3x$ 上的所有点的坐标组成的集合，可以表示为

$$\{(x,y) \mid y=3x\}.$$

在不引起混淆的情况下，为了简便，有些集合用描述法表示时，可以省去竖线及其左边的部分．例如：由所有的直角三角形组成的集合，可以表示为

{直角三角形}；

由所有的不大于5的自然数所组成的集合，可以表示为

{不大于5的自然数}.

以上所述列举法和描述法是集合的两种不同的表示法．实际运用时究竟选用哪种方法，要看具体问题而定．有些集合两种表示法都可选用．例如，集合 $\{x \mid x^2-4=0\}$ 也可表示为 $\{-2,2\}$.

3. 集合的记号

集合通常用大写的拉丁字母 A、B、C 等表示，集合的元素用小写的拉丁字母 a、b、c 等表示．例如，用 A 表示集合 $\{(x,y) \mid y=3x\}$，可记为

$$A=\{(x,y) \mid y=3x\}.$$

---

① 有的书上用冒号或分号代替竖线，如 $\{x : x-1>0\}$ 或 $\{x ; x-1>0\}$.

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a \in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a \notin A$（或 $a \overline{\in} A$）. 例如，设 B 表示集合 $\{1,2,3,4,5\}$，则

$$1 \in B, 5 \in B, \frac{1}{2} \notin B, 6 \notin B.$$

下面是几个常用的数集和它们的专用记号.

全体自然数的集合通常简称**自然数集**，记作 N；

全体整数的集合通常简称**整数集**，记作 Z；

全体有理数的集合通常简称**有理数集**，记作 Q；

全体实数的集合通常简称**实数集**，记作 R.

为了方便起见，有时我们还用 Z^+ 表示正整数集，用 R^- 表示负实数集，等等.

练　习

1. 写出下列集合的所有元素：

(1) {大于 3 小于 11 的偶数}；

(2) {平方后等于 1 的数}；

(3) {平方后仍等于原数的数}；

(4) {比 3 大 2 的数}；

(5) {一年中有 31 天的月份}.

2. 在下面各题中，分别指出了一个集合的所有元素，用适当的方法把这个集合表示出来，然后说出它是有限集还是无限集：

(1) 水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星；

(2) 周长等于 20 厘米的三角形；

(3) 长江、黄河、珠江、黑龙江；

(4) 方程 $x^2+3x-4=0$ 的解；

(5) 不等式 $x^2+5x+6>0$ 的解；

(6) 自然数中小于 20 的质数；

(7)大于 0 的偶数；

(8)所有正奇数.

3. 用符号$\in$或$\notin$填空：

1 __ N，　O __ N，　-2 __ N，　0.3 __ N，　$\sqrt{2}$ __ N；

1 __ Z，　0 __ Z，　-2 __ Z，　0.3 __ O，　$\sqrt{2}$ __ Z；

1 __ Q，　0 __ Q，　-2 __ Q，　0.3 __ Q，　$\sqrt{2}$ __ Q；

1 __ R，　0 __ R，　-2 __ R，　0.3 __ R，　$\sqrt{2}$ __ R.

二、子集、交集、并集、补集

1. 子　集

(1)子集

我们考察下面两个集合

$$A=\{1,2,4\}$$

和

$$B=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

显然，集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，这样，我们把集合 A 叫做集合 B 的子集.

对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素；那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记作

$$A\subseteq B(\text{或 } B\supseteq A),$$

读作"A 包含于 B"(或"B 包含 A"). 例如

$$N\subseteq Z, N\subseteq Q, R\supseteq Z, R\supseteq Q.$$

当 A 不是 B 的子集时，我们可以记作

$$A\not\subseteq B(\text{或 } B\not\supseteq A),$$

读作"A 不包含于 B"(或"B 不包含 A").

对于任何一个集合 A，因为它的任何一个元素都属于集合 A 本身，所以

$$A\subseteq A,$$

也就是说，**任何一个集合是它本身的子集**.

一个集合也可能没有元素．例如，在实数范围内方程 $x^2+1=0$ 的解集就是这样．为了方便起见，我们把不含任何元素的集合叫做**空集**，记作 $\varnothing$ 或 $\{\ \}$. 例如：

$$\{x \mid x+1=x+3\}=\varnothing,$$

{小于零的正整数} $=\varnothing$，

{内角和大于 180° 的三角形} $=\varnothing$.

我们规定空集是任何集合的子集．也就是说，对于任何集合 A，有

$$\varnothing \subseteq A.$$

(2)真子集

如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的**真子集**．记作

$$A \subset B\text{（或 } B \supset A\text{）}.$$

当 A 不是 B 的真子集时，我们可以记作

$$A \not\subset B\text{（或 } B \not\supset A\text{）}.$$

例如，自然数集 N 是 N 的子集，但不是 N 的真子集．即

$$N \subseteq N \text{ 但 } N \not\subset N;$$

N 是实数集 R 的子集，也是 R 的真子集，即

$$N \subseteq R \text{ 且 } N \subset R.$$

集合 B 同它的真子集 A 之间的关系，可以用图 1-1 中 B 同 A 的关系来说明，其中 A，B 两个圈的内部分别表示集合 A，B.

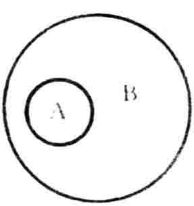


图 1-1

显然，空集是任何非空集合的真子集．

容易知道，对于集合 A，B，C，如果 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$，那么 $A \subseteq$

C. 事实上，设 x 是集合 A 的任意一个元素，因为 $A\subseteq B$，所以 $x\in B$，又因为 $B\subseteq C$，所以 $x\in C$. 从而 $A\subseteq C$.

同样可知，**对于集合 A,B,C，如果 $A\subset B$，$B\subset C$，那么 $A\subset C$.**

(3)集合的相等

对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，我们就说这两个**集合相等**，记作

$$A=B,$$

读作"A 等于 B".

显然，两个集合相等时，它们的元素完全相同.

例如，$A=\{x|x^2-1=0\}$，$B=\{-1,1\}$，那么 $A=B$.

例 1 写出集合 $\{a,b\}$ 的所有的子集及真子集.

解 集合 $\{a,b\}$ 的所有的子集是 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a,b\}$，其中 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$ 是真子集.

例 2 写出不等式 $x-3>2$ 的解集并进行化简(即化成直接表明未知数本身的取值范围的解集).

解 不等式 $x-3>2$ 的解集是

$$\{x|x-3>2\}=\{x|x>5\}.$$

2. 交 集

已知 6 的正约数的集合为

$$A=\{1,2,3,6\},$$

8 的正约数的集合为

$$B=\{1,2,4,8\},$$

那么 6 与 8 的正公约数的集合为

$$\{1,2\}.$$

容易看出，$\{1,2\}$ 是由所有属于 A 且属于 B 的元素（即 A，B 的公共元素）所组成的一个新集合.

一般地，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A，B 的**交集**，记作 $A\cap B$（可读作"A 交 B"），即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,且\ x\in B\}.$$

这样，6 与 8 的正公约数的集合，可以从求 6 的正约数的集合与 8 的正约数的集合的交集而得到，即

$$\{1,2,3,6\}\cap\{1,2,4,8\}=\{1,2\}.$$

图 1-2 的阴影部分，表示集合 A，B 的交集 $A\cap B$.

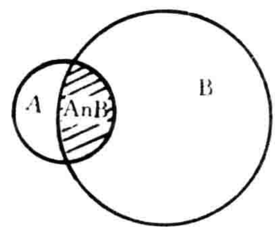


图 1-2

由交集定义容易推出，对于任何集合 A，B，有

$$\boldsymbol{A\cap A=A,A\cap\varnothing=\varnothing},$$
$$\boldsymbol{A\cap B=B\cap A}.$$

例 3 设 $A=\{x\mid x>-3\}$，$B=\{x\mid x<2\}$，求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{x\mid x>-3\}\cap\{x\mid x<2\}$
$=\{x\mid -3<x<2\}$.

例 4 设 $A=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}$，$B=\{(x,y)\mid 3x+2y=7\}$，求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}\cap\{(x,y)\mid 3x+2y=7\}$

$$=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}4x+y=6,\\3x+2y=7,\end{cases}\right\}$$

$=\{(1,2)\}$.

例 5 设 $A=\{$等腰三角形$\}$，$B=\{$直角三角形$\}$，求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{$等腰三角形$\}\cap\{$直角三角形$\}$
$=\{$有两边相等且有一个角是直角的三角形$\}$
$=\{$等腰直角三角形$\}$.

例 6　设 A 为所有矩形的集合，B 为所有菱形的集合，求 $A\cap B$.

解　$A\cap B=\{$矩形$\}\cap\{$菱形$\}=\{$正方形$\}$.

形如 $2n(n\in Z)$ 的整数叫做**偶数**，形如 $2n+1(n\in Z)$ 的整数叫做**奇数**．全体奇数的集合简称**奇数集**，全体偶数的集合简称**偶数集**．我们再看一个例子．

例 7　已知 A 为奇数集，B 为偶数集，Z 为整数集，求 $A\cap Z$，$B\cap Z$，$A\cap B$.

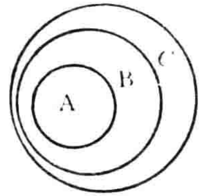
解　$A\cap Z=\{$奇数$\}\cap\{$整数$\}=\{$奇数$\}=A$，

$B\cap Z=\{$偶数$\}\cap\{$整数$\}=\{$偶数$\}=B$，

$A\cap B=\{$奇数$\}\cap\{$偶数$\}=\varnothing$.

练　习

1. 图中 A，B，C 表示集合，说明它们之间有什么包含关系．



（第 1 题）

2. 写出集合 $\{a,b,c\}$ 的所有子集及真子集．

3. 如果 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{1,2\}$，下列各种写法哪个正确？哪个不正确？

(1) $1\in A$；(2) $0\notin A$；(3) $\{1\}\in A$；

(4) $1\subset A$；(5) $\{0\}\subset B$；(6) $\{1\}\subset A$；

(7) $\varnothing\subset A$；(8) $B\subset A$.

4. (1) $\{0\}$ 与 $\varnothing$ 相等吗？为什么？

(2) 0 与 $\{0\}$ 相等吗？为什么？

5. 用适当的符号（$\in$，$\notin$，$=$，$\supset$，$\subset$）填空：

(1) a ＿ $\{a\}$；　　(2) a ＿ $\{a,b,c\}$；

(3) d ＿ $\{a,b,c\}$；　　(4) $\{a\}$ ＿ $\{a,b,c\}$；

(5) $\{a,b\}$ ＿ $\{b,a\}$；　　(6) $\{3,5\}$ ＿ $\{1,3,5,7\}$；

(7) $\{2,4,6,8\}$ ＿ $\{2,8\}$；　　(8) $\varnothing$ ＿ $\{1,2,3\}$.

6. 写出方程 $x+3=\frac{x}{2}-5$ 的解集并进行化简．

7. 写出方程组

$$\begin{cases}2x+3y=1\\3x-2y=3\end{cases}$$

的解集并进行化简．

8. 写出不等式 $3x+2<4x-1$ 的解集并进行化简．

9. 如图，设 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{b,d,e,f\}$．

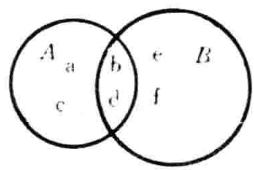
(1)求 $A\cap B$，$B\cap A$；

(2)用适当的符号($\supset$，$\subset$，$=$)填空：

$A\cap B$ __ A；

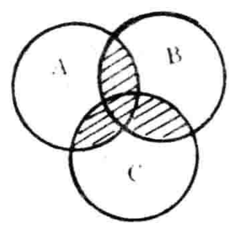
$A\cap B$ __ $B\cap A$；B __ $A\cap B$；

$\varnothing$ __ $B\cap A$．



（第 9 题）

10. 图中 A，B，C 表示集合，把各个阴影部分所表示的集合分别标出来，并用适当的符号表示它们同 A，B，C 之间的包含关系．



（第 10 题）

11. 设 $A=\{x\mid x<5\}$，$B=\{x\mid x\geqslant 0\}$，求 $A\cap B$．

12. 设 $A=\{(x,y)\mid 3x+2y=1\}$，$B=\{(x,y)x-y=2\}$，$C=\{(x,y)\mid 2x-2y=3\}$，$D=\{(x,y)\mid 6x+4y=2\}$，求 $A\cap B$，$B\cap C$，$A\cap D$．

13. 设 $A=\{$锐角三角形$\}$，$B=\{$钝角三角形$\}$，求 $A\cap B$．

14. 设 $A=\{x\mid x=2k,k\in Z\}$，$B=\{x\mid x=2k+1,k\in Z\}$，$C=\{x\mid x=2(k+1),k\in Z\}$，$D=\{x\mid x=2k-1,k\in Z\}$．问 A，B，C，D 中哪些集合相等，哪些集合的交集是空集．

3. 并　集

设集合 $A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{c,b,f,g\}$．把 A、B 所有的元素合并在一起(相同的元素只取一个)，可以组成一个新的集合．

$C=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，也就是集合 C 是由属于 A 或属于 B 的一切元素所组成的集合，集合 C 叫做集合 A 与集合 B 的并集．

一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A，B 的**并集**，记作 $A\cup B$（可读作"A 并 B"），即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A,\text{或 } x\in B\}.$$

上面的集合 C 可记为

$$\begin{aligned}C&=A\cup B=\{a,b,c,d,e\}\cup\{c,b,f,g\}\\&=\{a,b,c,d,e,f,g\}.\end{aligned}$$

又如，设某学生前天复习的课程的集合是 $A=\{$数学，物理，语文$\}$，昨天复习的课程的集合是 $B=\{$数学，化学，物理$\}$，那么，$A\cup B$ 表示他这两天内总共复习过的课程，即

$$A\cup B=\{\text{数学，物理，语文，化学}\}.$$

图 1-3 中的阴影部分，表示集合 A，B 的并集 $A\cup B$.

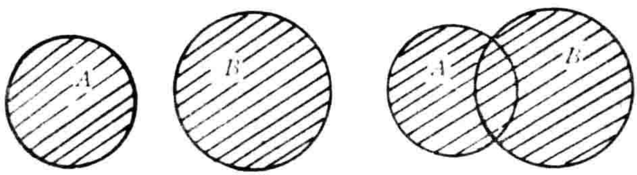


图 1-3

注意：我们已经知道，集合中的元素是没有重复现象的．因此，在求两个集合的并集时，这两个集合的公共元素在并集中只能出现一次．例如，设 $A=\{3,5,6,8\}$，$B=\{4,5,7,8\}$，则 $A\cup B$ 应是 $\{3,4,5,6,7,8\}$，而不是 $\{3,5,6,8,4,5,7,8\}$.

由并集定义容易知道，对于任何集合 A，B，有

$$A\cup A=A，A\cup\varnothing=A，$$

$$\boldsymbol{A \cup B = B \cup A}.$$

例 8 设 $A=\{x \mid -1<x<2\}$，$B=\{x \mid 1<x<3\}$，求 $A \cup B$.

解 $A \cup B=\{x \mid -1<x<2\} \cup \{x \mid 1<x<3\}$

$=\{x \mid -1<x<3\}$.

例 9 设 $A=\{$锐角三角形$\}$，$B=\{$钝角三角形$\}$，求 $A \cup B$.

解 $A \cup B=\{$锐角三角形$\} \cup \{$钝角三角形$\}$

$=\{$锐角三角形，或钝角三角形$\}$

$=\{$斜三角形$\}$.

例 10 写出不等式 $x^2+x-6 \geqslant 0$ 的解集并进行化简．

解 不等式 $x^2+x-6 \geqslant 0$ 的解集是

$\{x \mid x^2+x-6 \geqslant 0\}=\{x \mid x \leqslant -3\} \cup \{x \mid x \geqslant 2\}$

$=\{x \mid x \leqslant -3$ 或 $x \geqslant 2\}$.

例 11 设 $A=\{x \mid -4<x<-\frac{1}{2}\}$，$B=\{x \mid x \leqslant -4\}$，求 $A \cup B$，$A \cap B$.

解 $A \cup B=\{x \mid -4<x<-\frac{1}{2}\} \cup \{x \mid x \leqslant -4\}$

$=\{x \mid x<-\frac{1}{2}\}$，

$A \cap B=\{x \mid -4<x<-\frac{1}{2}\} \cap \{x \mid x \leqslant -4\}=\varnothing$

例 12 已知 Q 为有理数集，Z 为整数集，求 $Q \cup Z$，$Q \cap Z$.

解 $Q \cup Z=\{$有理数$\} \cup \{$整数$\}=\{$有理数$\}=Q$，

$Q \cap Z=\{$有理数$\} \cap \{$整数$\}=\{$整数$\}=Z$.

4. 补　集

在研究集合与集合之间的关系时，在某些情况下，这些集