物理学教程

下册

徐绪笃 陈晓域 等编

西北工业大学

一九八五年六月

目　　录

第三篇　振动与波动

第四篇　微观物理学基础

第三篇　振动与波动

振动与波动是一种很有趣的运动形态，它几乎遍及整个物理学的各个领域；无论力、热、电、光、物质结构等学科，也无论宏观、微观世界，都普遍地存在着这种形态的运动。心脏和血液的活动，声音的产生和传播，地震后地壳的颠簸，电话，无线电通讯，以及电子等微观粒子的运动，凡此等等，都是振动与波动的实际例子。因此振动和波动的基本规律，已成为科技人员必须掌握的基础知识。自然，它也必定是物理教学中的重点之一了。

从形成振动与波动的物理本质来说，归纳起来有三类：由于物体的形变（或物体间相对位置的变化）所引起的，是机械振动和机械波，包括常见的声振动和声波在内；由于系统的电、磁学量变化而形成的是电磁振荡与电磁波，包括热现象和光现象在内；还有作为物质二象性之一的物质波。尽管它们的物理本质是根本不同的，但各种振动与波动所遵从的时空变化规律却完全一样。这对于我们的教学来说，是再幸运不过的了。我们完全可以用其中一种现象作为例子，进行重点分析讨论，弄清这种运动形态的基本规律，尔后再去举一反三就可以了。机械振动和机械波，既比较形象，又是大家较为熟悉的，所以在本书中，自然选它作为具体讨论的对象。同时，本篇还将涉及电磁的内容，而把物质波留给第四篇去阐述。

第七章　谐　振　动

振动的最主要特征，就在于它具有重复性或往复性。广义地说，凡具有往复性的运动都可称作振动。或者说，任何一个物理量，如位置矢量、能量、压强、温度、电流强度、电场强度等，当它在某个定值附近作反复变化时，都可说该物理量在进行振动。大量事实表明，振动这种运动形式，几乎遍及各种自然现象之中，尽管它们各有其不同的本质。

我们通常研究的振动是一种周期性的运动，其运动方程乃是时间 t 的周期性函数。最简单的周期性函数是余弦或正弦函数，它们统称为谐和函数。所以，凡能用一个谐和函数（通常是余弦函数）来描述的振动，就叫做简谐振动，也称谐振动。

在各式各样的振动中，最基本最简单的情形是谐振动。

我们要着重讨论谐振动。因为它是最基本的振动形态，是我们赖以研究复杂振动的基础。理论的分析告诉我们，一切复杂的振动，甚至非周期性的单个脉冲，都可看作是由许多谐振动迭加而成的。因此，有了谐振动的知识，就如同我们掌握了开启振动学大门的钥匙一样，使我们能登堂入室。

学习振动的基本规律，不仅由于它能帮助我们处理许多实际的振动课题，因而有其独立

的实用价值，而且，它也是我们进而研究波动规律的必备基础。从这个意义来说，本章的内容也是一把开启波动学大门的钥匙。

§7—1 谐振动的研究

（一） 谐振动的普遍表达形式

大家所熟悉的弹簧振子的运动是一种典型的谐振动。如(图7-1-1a)，若物体在位置o时弹簧没有形变（伸长或压缩）。则作用在物体上的力为零，这个位置便是物体的平衡位置。将物体沿x轴略为移动后释放，物体就会在弹性力的作用下，在平衡位置左右来回运动，而其空间位置（相对于平衡位置的位移）x随时间t的变化规律，乃是一种机械振动，可表示为：

$$x = A\cos(\omega t+\varphi) \qquad (7\text{-}1\text{-}1)$$

当给图(b)中LC电路的电容器充电以后，再将K闭合，那么，电容器中的电场强度E，线圈中的磁感应强度B，都将在零值附近作周期性变化，形成电磁振荡。大家知道，它的变化规律也符合正弦或余弦的函数关系，乃是电磁性的谐振动。

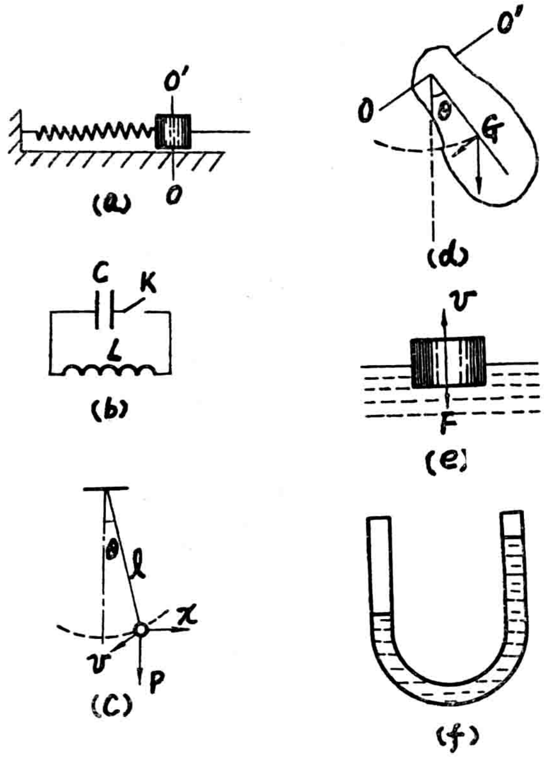

图 7-1-1 几种振动的例子

另外，如图(c)中的单摆（在轻线下端悬挂一个小球），图(d)中的复摆，(是一个支持在水平定轴OO'上的刚体，其重心为G)，它们在摆角θ很小时，角位移θ随时间的变化规律也都是谐振动。其他如图(e)中浮在水面上的木块，图(f)中盛在U形管里的液体它们所进行的机械振动也都是谐振动。

按照谐振动定义，无论是机械振动，电磁振动，或是其他性质的振动，都可以用一个谐和函数来描述，即都可以用式(7-1-1)的形式来表达。作为普遍的形式，谐振动规律可写为：

$$\Psi = \psi\cos(\omega t+\varphi) \qquad (7\text{-}1\text{-}2)$$

式中的Ψ代表作谐振动的某一物理量，称作振动量。而ψ则是其最大值。这Ψ，如前所述，既可以具有力学的本质（如力、压强、位移、速度、加速度、动能、势能等），也可以具有非力学的本质（如电量、电流、电压、场强、温度、能量、光亮度等）；既可以是标量，也可以是矢量。而当Ψ为矢量时，往往分别取其在各坐标轴上的分量来研究，此时，每个分量就可作为标量来处理了。

（二） 谐振动研究

从以上几种谐振动的例子，我们初步认识到它们是具有共性的，因而也就可以采用同样的方法来研究各种谐振动。不过，通常针对不同目的，使用不同的研究方法。借用力学的术语来说，一种是运动学的方法，一种是动力学的方法。前者侧重运用几何学的图形来研究振动量与时间的函数关系，，这就产生了旋转矢量的图示法。后者着重分析形成谐振动的物理原因，依据此过程所遵从的物理定律来进行研究，这就首先要求在分析的基础上，建立起理想化的模型。下面分别作一简要介绍。

（1）运动学方法。这里只介绍旋转矢量法，它来源于大家熟知的参考园法。我们不妨审视一下式（7-1-1），它是机械谐振中位移和时间 t 的函数关系，表明任一时刻 t 的 x 值乃是 A 的一个分数。从纯几何学的观点看来，如图(7-1-2)所示，x 可看成是参考园半径 A 在 x 轴上的投影，此时，半径与坐标轴的夹角为 $(\omega t+\varphi)$。由于 x 的值可正可负，故可命此半径为一矢量 $\overrightarrow{OM}$，若此矢量以 ω 旋转，当它处于一、四象限时，即基本上顺着坐标轴的正方向，其投影为正值，而在二、三象限内则因相逆而使投影为负值。由于规定了半径为一矢量，就能比较自然地解释何以 A 的投影会有正负之分。这样，一个机械谐振中位移和时间的关系，可以形象地用旋转矢量 $\overrightarrow{OM}$ 在 x 方向上的投影随时间变化关系来描述，这种表示法就称为旋转矢量法。

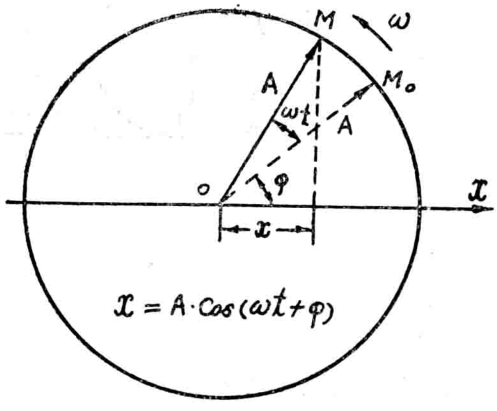

图 7-1-2 谐振动的旋转矢量表示法

应该注意，在这种表示法中，旋转矢量本身只有参考的意义，我们所关心的乃是它在坐标轴上的投影。因此，把式（7-1-1）中的 A 看作是 $\overrightarrow{OM}$ 的大小，把 $(\omega t+\varphi)$ 看作是 $\overrightarrow{OM}$ 与 x 轴的夹角，把 φ 看作是 $t=0$ 时的夹角，把 ω 看作是 $\overrightarrow{OM}$ 作逆时针旋转时的角速度，所有这些，也都只有参考的意义。关于 A、ω、φ 等量的振动学意义，后面将进行专门的讨论。

不难推论，倘若把 A 换 ψ，把 $\overrightarrow{OM}$ 的投影换成 Ψ，那么，旋转矢量法也同样可用来表示式(7-1-2)的谐振动。由此可见，当所研究的振动量不是位置或位移时，旋转矢量法的优越性就更为显著了，它为我们提供了一幅直观而清晰的谐振动图象。

应用旋转矢量法的好处还有：

1. 倘在图（7-1-2）中取 $\overrightarrow{OM}$ 在 y 轴上的投影，显然，它也是一个谐振动，即：

$$y=A\sin(\omega t+\varphi) \tag{7-1-3}$$

这与式(7-1-1)结合起来，就构成了谐振动的复指数表示法。换句话说，我们可以把振动量 Ψ 当作复数来处理，于是有：

$$\Psi=x+jy=A[\cos(\omega t+\varphi)+j\sin(\omega t+\varphi)]=Ae^{j(\omega t+\varphi)}$$

或者，如果仍用 ψ 代替 A，则有：

$$\Psi=\psi e^{j(\omega t+\varphi)} \tag{7-1-4}$$

采用复指数的好处，将在讨论物质波中充分显示出来，这里至少已看到这种表示式对Ψ求导时比较方便，近代科技中已广为使用。由于真实的振动只有一个，即式（7-1-4）中的实数部分，因此，在采用复指数进行运算之后，也只在结果中取出实数部分来作为答案。

2．由图(7-1-2)不难领会 $x-t$（或 $\Psi-t$）图线的意义。我们把$\overrightarrow{OM}$矢量在旋转一圈各个时刻在x轴上的投影，对应地画成 $x-t$ 图线，示于图(7-1-3)中。

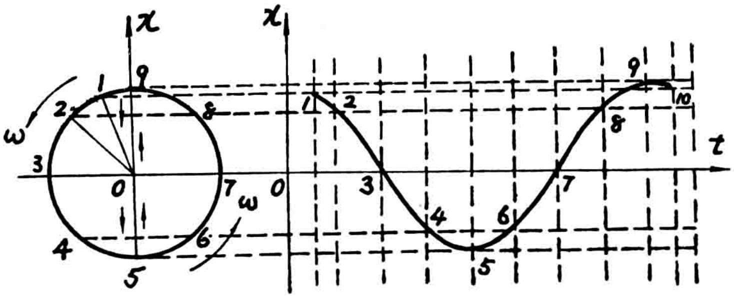

图 7-1-3　旋转矢量图与 $x-t$ 图线

这里，容易使人混淆的是，常常把 $x-t$ 图线中的横坐标误认为是空间位置的坐标，现在对照着旋转矢量图来看 $x-t$ 图线，就一目了然了。$x-t$（或一般说 $\Psi-t$）图线，通常也叫做振动曲线。

3．便于看出振动量对时间的一阶和二阶导数。例如，若Ψ代表位移，那么一阶导数是速度，二阶导数便是加速度，若Ψ是电量则其一阶导数即是电流，二阶导数则是电流的变化率。从图（7-1-4）可以看出，当$\overrightarrow{OM}$旋转时，M端在切线方向上的线速度为$\psi\omega$，因而M在x轴上投影点P的运动速度即为：

$$\frac{d\Psi}{dt}=\psi\omega\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-\psi\omega\sin(\omega t+\varphi) \qquad (7\text{-}1\text{-}5)$$

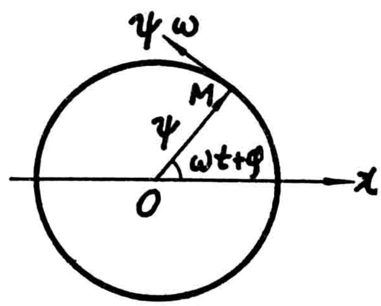

图 7-1-4　振动量的一阶导数

这与直接对式(7-1-4)求导的结果一致。进而可知，M点的向心加速度为$\psi\omega^2$，故P点运动的加速度为：

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2}=\psi\omega^2\cos(\omega t+\varphi+\pi)=-\psi\omega^2\cos(\omega t+\varphi) \qquad (7\text{-}1\text{-}6)$$

这也仍然与式(7-1-4)求得的结果一致。

总之，谐振动的规律，完全可以用运动学的方法，由一个按等角速度ω沿逆时针方向旋转的矢量，在任一坐标轴上的投影来研究。这个方法比较直观，容易建立清晰的图象。

（2）动力学方法，一个实际的振动往往是比较复杂的，同处理其他物理过程一样，我们总是设法把实际系统中的主要矛盾突出起来，从而把复杂的研究对象简化为理想的模型。我们已经不止一次地遇到这样的情况，尽管如此，这里仍有必要讲一下研究振动问题中建立理想模型的问题。譬如研究机床的上下振动，就可把机床连同混凝土基座视为刚体，而把基座下面的垫层看作是弹簧，从而可把机床的上下振动，当作放在弹簧上的刚体振动问题来处

理。事实上，大家熟悉的弹簧振子，就是从许多类似上述实际振动系统里简化抽象出来的。这虽是理想化了的模型，但它却反映了振动系统的主要特征。它把振动系统的惯性集中在一个刚体上，把系统的弹性集中在一个不计其质量的轻弹簧上这就在物理上突出了回复力和惯性的交互作用，从而使问题的处理大为简化。再如图(7-1-1b)的 LC 电路，也是个理想化的模型，在此，我们把实际电路中所有元件的自感，以及元件间的所有电容，集中起来而成为一个简单的 LC 电路。

因此，我们在着手处理一个实际振动系统时，就要善于抓住主要矛盾，建立起相应的理想模型。然后，才能根据具体物理过程所遵从的物理定律，求得系统的谐振动规律。

现在，我们着重运用动力学的方法，来分析谐振动的物理过程，找出谐振动的动力学特征，并且弄清几个特征量的物理意义。本节虽以大家熟悉的弹簧振子作为具体的研究对象，但我们的注意力仍集中在共性的规律上。

1． 形成谐振动的条件

前面说过弹簧振子处于平衡位置时不受力的作用。若把振子从平衡位置移开一段距离 x，那么，弹簧因为发生形变而施加于振子的作用力 f，将驱使振子挪回到平衡位置去。这个力就是回复力，也即是弹簧的弹性力。大家知道，在弹性限度以内，它和位移成正比而反号，即 $f=-Kx$，此处的K是弹簧的倔强系数（弹簧常数）。

如果将振子移开距离 x_0 后，轻轻放手，并以此时为计时起始，则有 $t=0$ 时 $x=x_0$，$v=v_0=0$，x_0，v_0 的值就是振子的初始条件。以后，弹簧振子只在回复力的作用下，加速地向平衡点移去。当抵达平衡点时，振子已具有相当的速度和动能；此时，它虽然不再受力，但由于惯性的原故，必然要越过平衡点而继续向前运动。可是，一旦振子越过平衡位置，就使弹簧在相反的方向上产生新的形变，回复力重又出现，阻碍着振子的继续运动，仍然力图把振子拉回到平衡位置。所以，越过平衡点以后的振子运动是减速的，经过一段距离后，速度终于减小到零。但此处并不是平衡位置，振子不可能保持静止，回复力仍将拉它回头。于是振子便又加速地返向平衡位置，并在越过平衡点以后，减速地回到最初开始运动的地方。即着，新的一轮运动又开始了。上面描述的过程就将如此周而复始地进行下去。

由此可见，回复力始终驱使振子回到平衡位置，而振子的惯性又不容许振子停留在平衡位置，正是由于回复力与惯性的这种联合作用才使得这个力学系统进行谐振动的。所以，一个具有弹性和惯性的系统，就已具备了进行谐振动的必要条件，只要初始条件合适，系统便会作谐振动了。

2． 谐振动方程

谐振动方程乃是谐振动规律的定量描述，其实式(7-1-2)便是其运动学方程。现在来介绍动力学方程，仍以弹簧振子作为具体的论述对象。

我们以弹簧的纵长轴为 x 坐标轴，并把振子的平衡位置选为原点。于是，对于振动中的任一时刻 t 来说，振子的坐标为 x，而弹簧的伸长量也为 x，所以弹簧施于振子的弹性力便是 $-kx$，如果振子的质量为 m，此时刻的速度为 v，且不计摩擦力，则由牛顿第二定律有：

$$-kx=m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \text{或} \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x$$

在此，因为 k 和 m 都是正的恒量，所以它们的比值可用另一个正恒量 ω 的平方来表示，令

$$k/m=\omega^2 \tag{7-1-7}$$

故而上式可写为：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{7-1-8}$$

这就是弹簧振子的谐振动微分方程或动力学方程。它实质上虽然仍是牛顿方程，但却有其特殊的品性。从数学方面来看，一个变量对时间的二阶导数，和变量自身成正比且反号，表明这变量与时间的函数关系必具有特殊的形式。敏锐的读者或许已经意识到，满足这种品性的函数，即方程(7-1-8)的解，应是象式(7-1-4)那样的复指数函数，也就是说，应具有谐和函数的形式。大家记得，我们在例(1-3-4)中，作为求解动力学的第二类问题，曾从式(7-1-8)解得了谐和函数的答案。在此，为了便于分析讨论，不妨再扼要地浏览一下求解过程。

设我们开始计时的时刻（$t=0$），振子的位置和速度分别为 x_0 和 v_0（初始条件）。那么，对式(7-1-8)的第一次积分便是：

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = -\omega^2 \int_{x_0}^{x} x\,dx$$

其结果，依式(7-1-7)，可写成为：

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \tag{7-1-9}$$

说明在振动过程中，系统的总机械能守恒，振子的动能和弹性势能在不断地相互转化着。由此不难推论，在 $x=0$（平衡位置）处，动能最大，因而速度达最大值 v_m；而在 $v=0$ 的地方，弹性势能最大，因而振子的位移也达最大值 $x_m = A$，这是位移振动的最大幅度，故称为位移振幅，简称振幅。所以，式(7-1-9)告诉我们：

$$\text{总机械能} = \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}kA^2 \left(= \frac{1}{2}m\omega^2A^2\right) \tag{7-1-10}$$

由(7-1-9)及(7-1-10)得：

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

第二次积分便是：

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega \int_0^t dt$$

其结果可有两种表达方式：

(i)
$$\arcsin\frac{x}{A} - \arcsin\frac{x_0}{A} = \omega t$$

式中左方第二项，是个代表初始条件的的常数，命为 φ'，于是上式就成为：

$$\arcsin\frac{x}{A} = \omega t + \varphi'$$

$$\therefore \quad x = A\sin(\omega t + \varphi') \tag{7-1-11}$$

(ii)
$$-\arccos\frac{x}{A} - \left(-\arccos\frac{x_0}{A}\right) = \omega t$$

式中括号内的常数仍是代表初始条件的，命为 φ，于是有

$$\arccos\frac{x}{A} = -(\omega t + \varphi)$$

$$\therefore \quad x = A\cos[-(\omega t + \varphi)] = A\cos(\omega t + \varphi)$$

这就是(7-1-1)式。由此可见，谐振动的运动学方程式(7-1-1)，连同式(7-1-11)，乃是动力学方程式(7-1-8)的解，因而有时也称之为积分形式的谐振动方程。由于式(7-1-1)和式(7-1-11)完全相等，所以只需写出其中之一即可；通常采用余弦形式，因为它恰是复指数表式中的实数部分。顺便指出，两个代表着 x_0（即初始条件）的常数，其最简单的相互关系显然是 $\varphi'=\varphi+\pi/2$。

3．谐振动的判别

至此，我们不难扩展到对一般的谐振动的认识。事实上，从纯数学的观点来看，倘若把式(7-1-8)中的 x 改换为广义振动物理量 Ψ。

即：
$$\frac{d^2\Psi}{dt^2}=-\omega^2\Psi \tag{7-1-12}$$

式中的 ω 仍为正恒量，只是其值不为式(7-1-7)所决定，而应由相应的物理系统性质来决定。那么，经过上面同样的两次积分手续，结果必然会导致与式(7-1-1)一样的答案，即式(7-1-2)来。这就是说，任一物理量 Ψ，只要它对时间的二阶导数正比于它自身且反号，我们就可以断言，这 Ψ 肯定是作谐振动。因此，式(7-1-12)既是描述谐振动规律的动力学方程，同时又是我们赖以判别某一物理量是否作谐振动的根据。当我们对某一系统进行物理上的分析，并从物理过程所遵从的定律中得出了式(7-1-12)这样的微分方程时，那就可以肯定该过程必是谐振动无疑。

当然，如前所述，也可以从运动学方面来判断。只要运动过程中式(7-1-2)或(7-1-5)或(7-1-6)成立，那也同样能够断定它是谐振动。

4．谐振系统的能量

值得指出的是，谐振动能量规律具有某种基本特征。这是式(7-1-9)或(7-1-10)已经揭示了的。在此不妨再细致地分析一下谐振动的能量问题。

仍以弹簧振子为例。在振动过程中的任一时刻，振子所具有的动能为 $E_K=\frac{1}{2}mv^2$ 从式(7-1-5)可得

$v^2=\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$，于是有

$$E_K=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi) \tag{7-1-13}$$

可见 $\sqrt{E_K}$ 也是作谐振动的。与此同时，振子所具有的弹性势能为：

$$E_P=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t+\varphi) \tag{7-1-14}$$

即 $\sqrt{E_P}$ 也作谐振动。然而不难看出，振子的总机械能始终保持恒定，即：

$$E=E_K+E_P=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

这也正是式(7-1-10)。

由此可见，谐振动过程必定是一个符合能量守恒定律的过程。由于能量守恒的过程不一定都是谐振动过程，所以，有必要强调这里的能量指的是振动能。即振动能守恒。认识到这一点是非常有用的。大家知道，力学量(如力、位移、速度、加速度等)有其局限性，对于非力学系统，有时是不便于用这些量去分析其物理过程的（比如电容器的充电过程）。但能量

这个物理量，却通用于所有的物理领域，可以分析任何物理过程。这就给我们研究各种谐振动带来了方便。

最后，顺便指出，振动的能量与振幅的平方成正比，这一点具有普遍的意义，适用于各种形式的振动和波动。振动能量还与ω^2成正比，这在经典物理范围内也是普适的，但在量子物理中却只与ω成正比。

（三） 谐振动的特征量

在谐振动的运动学方程$\Psi=\psi\cos(\omega t+\varphi)$中，有三个物理量$\psi$、$\omega$、$\varphi$，它们是具体描述谐振动特征的物理量。现在讨论它们的物理意义。

（1）周期、频率和园频率。

我们说过，振动的最主要特征是周期性，这在谐振动方程中体现得十分明白。事实上，由于谐和函数是周期性函数，其幅角每改变2π时，函数的值就回复到原值一次，即

$$\Psi=\psi\cos(\omega t+\varphi)=\psi\cos[(\omega t+\varphi)+2\pi]$$

而振动量Ψ回复到原值，就意味着它经历了一次完全的振动，现令完成一次振动所需的时间为T，则有

$$\Psi=\psi\cos(\omega t+\varphi)=\psi\cos[\omega(t+T)+\varphi]$$

不言而喻，以上两种描述是完全等效的，因此可知

$$\omega T=2\pi$$

或

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \tag{7-1-15}$$

这T是大家所熟知的，叫做谐振动的周期。图(7-1-5)的振动曲线，显示出了这种周期性。

周期T的倒数，表示单位时间内振动重复的次数，称为谐振动的频率ν，其单位为赫兹(Hz)。此因，

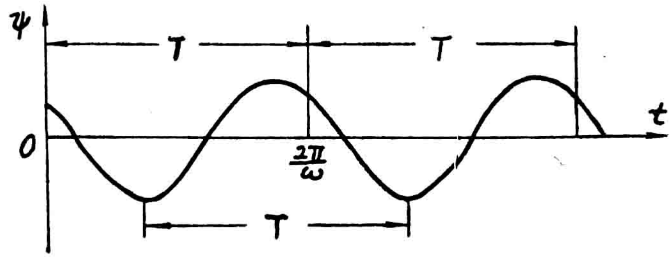

图 7-1-5 谐振动的周期性

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi} \tag{7-1-16}$$

由此可见，T和ν都是由ω来决定的，或者说，ω其实也就是振动周期性的表现。而由于上式告诉我们：

$$\omega=2\pi\nu \tag{7-1-17}$$

即ω在数值上是频率2π倍，所以人们常称它为园频率（或角频率）；在不致与ν发生混淆的情况下，也常把ω简称为频率。至此，常数ω的物理意义才算明确了。正是它，从根本上反映着振动的周期性。当然，在T、ν、ω三量中只有一个独立的，其中的任一个，都反映着谐振动的周期性。

必须强调指出，由于ω是由物理系统的性质所决定的，所以T和ν也只由系统的性质所决定。例如对弹簧振子来说，式(7-1-7)成立，故其振动周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

换言之，同一弹簧振子，不管初始条件如何，振幅如何，能量如何，只要胡克定律成立，振子完成一次振动所需的时间总是个恒量。这一性质，称为等时性。因此，人们又把这些只由振动系统性质所决定的T、ν和ω，分别称为固有周期、固有频率和固有园频率。

（2）振幅

前面我们已经介绍过位移振幅A，根据同样的道理，式（7-1-2）中的ψ乃是振动量Ψ的振幅。它表示该谐振动所能达到的最大幅度，因此，它不随时间而异，是个绝对值，或说其值恒为正值。就一定的机械振动系统而言，ω已经恒定，振幅还反映着系统的总机械能，为系统的初始动能和初始势能所决定。可见，振幅决定于初始条件，这是振幅与ω（T、ν）不同的地方。

（3）位相和初相

现在再来讨论一下幅角（$\omega t+\varphi$）的物理意义。大家已经看到，无论Ψ本身还是它的各阶导数，其值都取决于该时刻的幅角值。拿弹簧振子来说，在振幅A、园频率ω已知的情况下，振子在任一时刻t的运动状态（主要指振子的位置和速度），均取决于（$\omega t+\varphi$）。这可从(7-1-2)，(7-1-5)和(7-1-6)式看出来。很清楚，由($\omega t+\varphi$)不仅知道了该时刻振子位于何处、速度大小如何，而且还指明了振子运动的趋势，预示出振子的位置和速度下一步将如何变化。如果把弹簧振子的位移x、速度v、加速度a的振动情形，绘于图(7-1-6)中，从图上更能直观地认识到（$\omega t+\varphi$）对振动相貌的直接影响。因此，人们就形象化地把这个幅角称为谐振动的位相，也叫周相，或简称相，甚至有人称之为貌，无非指它能显示出某时刻的相貌而已。

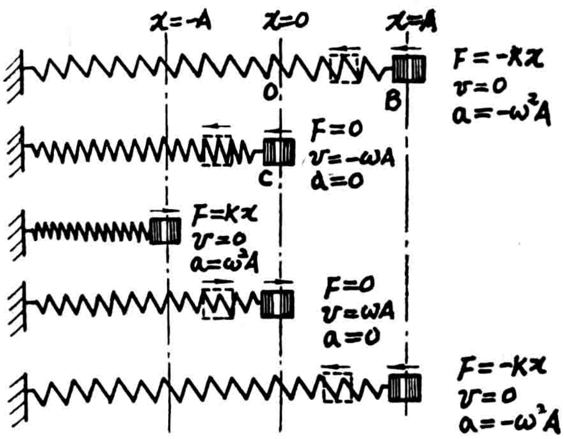

图 7-1-6　弹簧振子的弹性力、位移、速度和加速度($\varphi=0$)

应该看到，位相($\omega t+\varphi$)是描述谐振动的一个重要特征量，通过它不仅可以找出Ψ及其各阶导数的值，而且能使我们辨别不同的振动状态，体现出振动的周期性。例如，同是$\Psi=0$，却有进而向着$+\Psi$或$-\Psi$变化的区别，这就由($\omega t+\varphi$)$=\pi/2$或$3\pi/2$来决定了。又如，同是$\Psi=\psi$，却有着($\omega t+\varphi$)$=0$或2π的区别，我们就是仿此而导得式（7-1-15)的。因此，谐振动的整个过程中，完全是由位相在0和2π之间的变化，生动地反映出它的状态特征。位相是决定振动状态的重要特征量。

这在比较两个谐振动时，尤期显得优越。例如有两个同频率、同方向振动的弹簧振子，其振动方程分别为

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_1)$$

它们在任意时刻 t 的位相差为

$$\Delta\varphi=(\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1)=\varphi_2-\varphi_1$$

当 $\Delta\varphi=0$ 或 2π 的整数倍时，说明两振子将会同时通过平衡位置，同时达到最大位置，它们的振动步调完全一致。通常就称它们的振动为同位相的。而如果 $\Delta\varphi=\pi$ 或 π 的奇数倍，则当一个振子到达 x 轴的最右端时，另一振子却刚好抵达 x 轴的最左端；当一个振子通过平衡位置继续向 x 轴正方向运动时，另一振子则是通过平衡位置而向 x 轴的负方向运动的。这两个谐振动的步调恰好相反，它们的振动就是反位相的。大家看得出来，这样的描绘确实十分简便，而且一目了然。

应用位相概念，来分析(7-1-2)，(7-1-5)和(7-1-6)三个式子所反映的振动特征，尽管它们都具有周期性，然而却互有差异。除了它们的振幅不同外，显然它们的位相依次相差了 $\frac{\pi}{2}$，所以，达到它们各自的幅值的步调也就不一致。

至于恒量 φ，由此已不难明白，它乃是 $t=0$ 时的位相，故称为初位相。回想我们在前面推演式(7-1-1)和(7-1-11)的过程，即可看出，这 φ 是由初始条件所决定的。比如 $\varphi=0$，就意味着是选择了 $\Psi_0=\psi$（即弹簧振子的 $x_0=A$）时作为计时的起点的。又如，若 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，则意味着在 $\Psi_0=\frac{\psi}{\sqrt{2}}$ 且 $(d\Psi/dt)$ 为负值时刻乃是我们所选定的初始时刻；此时，Ψ 正通过 $\frac{\psi}{\sqrt{2}}$ 处，并将朝着 Ψ 减少的方向变化。

（4）最后介绍一下如何由初始条件来确定振幅与初位相。这一点并不难。首先，由式(7-1-9)及(7-1-10)可得：

$$\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}kx_0=\frac{1}{2}kA^2$$

$$\therefore \qquad A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad (7\text{-}1\text{-}18)$$

其次，我们在前面是这样来引入 ψ 的，即令

$$-\arccos\frac{x_0}{A}=\varphi\text{，或}\frac{x_0}{A}=\cos(-\varphi)$$

将式(7-1-18)代入得：

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v_0^2}{\omega^2x_0^2}}}=\cos(-\varphi)=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(-\varphi)}}$$

$$\therefore \qquad \mathrm{tg}(-\varphi)=\frac{v_0}{\omega x_0}\text{，即 }\mathrm{tg}\varphi=-\frac{v_0}{\omega x_0} \qquad (7\text{-}1\text{-}19)$$

这里，φ 可以有两个值，而要判断应该取哪一个值，则需视 φ 是否同时满足下述两式：

$$x_0=A\cos\varphi \qquad v_0=-A\omega\sin\varphi \qquad (7\text{-}1\text{-}20)$$

而定（参阅[例 7-1-1]）。当然，倘若振幅 A 值为已知时，则可直接由式(7-1-20)之一求出初位相，而用另一式来判断取舍。

不言而喻，式(7-1-18)、(7-1-19)及(7-1-20)也适用于一般的谐振动，只需改用 ψ、

Ψ_0、$(d\Psi/dt)$。等量而已。但要注意，对一般谐振动而言，ω 应由具体的物理系统性质来决定，我们在前面已经指出这一点了。

事实上，将式(7-1-20)的两式平方相加即得式(7-1-18)，将两式相除即得式(7-1-19)，在数学推演上虽比较简捷，但物理意义却不如前法明显。

【例 7-1-1】 弹簧振子小球的质量 $m=0.01\text{kg}$，倔强系数 $k=0.49N/m$。在 $t=0$ 时，振子正通过 $x_0=-0.04m$ 处以 $v_0=0.21m/s$ 的速度，沿 x 轴正向运动。试求振子的(Ⅰ)振幅，(Ⅱ)初位相，(Ⅲ)谐振动方程。

【解】 振子的固有园频率 ω，依式(7-1-7)为：

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=7s^{-1}$$

而振子的振幅和初位相则由初始条件所决定，即振幅为：

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=0.05m$$

初位相可由式(7-1-19)得：

$$\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{0.21}{7\times0.04}\right)$$
$$=36^\circ50' \text{ 或 } 216^\circ50'$$

现知 x_0 为负值，v_0 为正值，故由式(7-1-20)可知：

$$\varphi=216^\circ50' \qquad \text{或} \qquad 3.7845\,\text{rad}$$

于是，谐振动方程便为：

$$\chi=0.05\cos(7t+3.7845)m$$

请思考一下，倘若改变一下 x_0 和 v_0 的正负号，则 φ 值又将是些什么样的值？为什么谐振动方程中的 φ 要写成弧度数？

【例 7-1-2】 已知谐振动的振幅为 ψ，且在 $t=0$ 时，$\Psi_0=\psi/2$，试求：(Ⅰ)Ψ 继续增大，(Ⅱ)Ψ 继续减小时，其初位相各为何值。

【解】 由式(7-1-20)知：

$$\Psi_0=\frac{\psi}{2}=\psi\cos\varphi,\ \text{或}\ \cos\varphi=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \qquad \varphi=\frac{\pi}{3} \quad \text{或} \quad \frac{5}{3}\pi$$

(Ⅰ)Ψ 欲继续增大，则 $\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_0$ 必须为正值，即在式(7-1-20)中

$$\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_0=-\psi\omega\sin\varphi>0,\ \sin\varphi<0$$

$$\therefore \qquad \varphi=\frac{5}{3}$$

(Ⅱ)依同样的推理，欲使 Ψ 继续减小，则

$$\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_0<0\,,\ \text{或}\quad \sin\varphi>0$$

$$\therefore \qquad \varphi=\frac{\pi}{3}$$

由此可见，“初位相由初始条件决定”这句话，是指需由 Ψ_0 及 $(d\Psi/dt)_0$ 两者共同来决定，决不是只靠其中之一就可以决定的。

§7—2 几种常见的谐振动

弹簧振子，由于受到遵从胡克定律的弹性力作用，才作谐振动的。其实，在机械运动中，不论作用力是否起源于弹性力，只要它遵从类似于胡克定律那样的规律，我们就可断定它必能引起谐振动。这种类似于弹性力的有心力，人们就称之为准弹性力。本节将要讨论几种准弹性力作用下的谐振动。

另外，一个非力学系统，有时不便于用力学量去分析它的物理过程，但是，我们可以仿照机械振动所采用理想化的弹簧振子模型的方法，对所研究的系统，设法也建立一个理想的模型，如研究无阻尼电磁振荡过程，就采用理想化的 RC 电路模型。

对弹簧振子，只要赋予系统一定的初始机械能，振子的动能以及系统的势能等，如果能量没有消耗或散失它就能够不停地、周而复始地作谐振动。

在 LC 电路中，当然已不便于用位移，速度，加速度来讨论了，但是当对电容器充电而给了它初始的电场能以后，再将电路闭合，于是电容器上的电量、电场能、电路中的电流强度、自感线圈中的磁场能，也会在能量毫无耗散的情形下，不停地进行振荡。这就是无阻尼电磁振荡，它是最简单最基本的电磁振荡，是构成无线电技术科学的基础理论知识。本节也要加以分析讨论。

（一） 单 摆

在中学里，单摆已是大家所熟悉的一种装置了，前面在例（1-5-3）中也讨论过。现在，我们仍然假定绳长的变化及绳的质量均可忽略不计，而且，空气的阻力也被忽略。如图（7-2-1）所示，0 点是摆球的平衡位置，我们以悬线和 $O'O$ 之间的夹角 θ，作为描述摆球位置的变量，它也就是角位移。

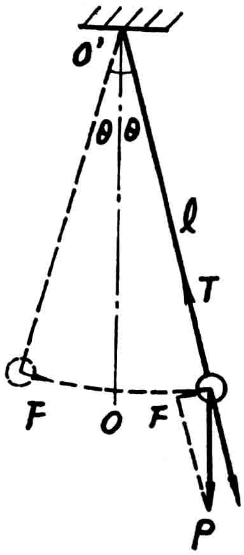

图 7-2-1 单摆

对任一 θ 来说，摆球受有悬线的张力 T 和重力 $P=mg$，重力在摆球运动园弧切线方向上的分力 $mg\sin\theta$，其方向是指向 θ 减小的方向。可见，这个力总想把质点 m 拉回到平衡位置去，起着回复力的作用。用于表示回复力，考虑到 F 与 θ 反向，故应写作：

$$F = -mg\sin\theta$$

严格说，这 F 并不遵从类似于胡克定律的规律，它不是跟 θ 成正比的。但若把 $\sin\theta$ 展成级数：

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\cdots$$

而在 θ（弧度）很小时，θ^3 以上的各项便可略去不计，$\sin\theta$ 就近似地可用 θ 来代替。这样，对于很小的摆角来说，完全可以认为 F 遵从着类似胡克定律

的规律，即：

$$F = -mg\theta \tag{7-2-1}$$

象这种回复力，本质上虽不是弹性力，但其功用完全和弹性力一样，所以称之为准弹性力。

这就不难根据牛顿定律，列出小球m在切线方向的运动方程了：

$$ma_\tau = -mg\theta$$

或者用式(2-1-2)改写成：

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta$$

$$\therefore \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \tag{7-2-2}$$

这一微分方程的形式，和式(7-1-12)一样，所以单摆的运动规律和弹簧振子一样是在 0 点附近作谐振动，其园频率为：

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{7-2-3}$$

周期和频率为：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{7-2-4}$$

而单摆的谐振动方程便是：

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi) \tag{7-2-5}$$

此处 θ_m 是最大角位移，即振幅，φ 是初位相，均由初始条件决定。可是有一点与弹簧振子不同，在式(7-2-4)中并未出现摆球的质量m，看起来似乎不好理解。其实，如果小球的质量大，作用在小球上的重力也就大了。在这里，质量的两种功能（惯性和引力相互制约着，不象弹簧振子的质量只发挥着惯性的作用。所以单摆的固有频率便与摆球的质量无关了。

容易证明，我们同样可以用机械能守恒定律来导出单摆的谐振动方程，这就留给读者自己去练习了。

（二） 复 摆

单摆显然是一种理想的模型：悬线的长度不变，质量略去不计，摆球被视为一个质点等等。实际的情形就要复杂一些，这就是所谓的复摆。

任何一个可以绕水平轴摆动的物体，在水平轴不通过物体质心的情形下，都构成为一个复摆，如图(7-2-2)所示。此处，0 表示水平轴，c 为复摆的质心。我们仍以 θ 为描述物体位置的变量，显然，$\theta = 0$ 处为物体的平衡位置。

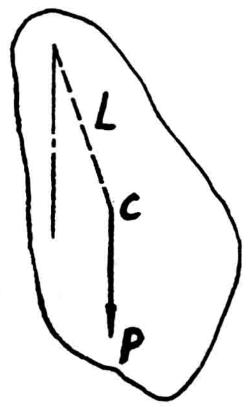

图 7-2-2 复摆

显然，物体绕 0 轴的运动是转动，外力矩M是由重力P提供的，即：

$$M = -mgL\sin\theta$$

这就是复摆所受的回复力矩，且在 θ 很小的情形下，$\sin\theta$可

由 θ 代替，所以此回复力矩便可写为：

$$M=-mgL\theta \tag{7-2-6}$$

显然，M与 θ 的关系类同于弹性力与位移的关系，它也遵从着类似胡克定律的规律。

设刚体绕 0 轴的转动惯量为 I，则根据式(2-1-9-b)的转动定律不难得到：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{mgL}{I}\theta \tag{7-2-7}$$

果然仍是式(7-2-6)的形式，说明复摆在小摆角的情形下，也是作谐振动。

所以复摆的园频率为：

$$\omega=\sqrt{\frac{mgL}{I}} \tag{7-2-8}$$

因而其周期为：

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \tag{7-2-9}$$

倘若一个单摆的周期恰和此复摆的周期相等，于是便有：

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

$$\therefore \quad l=\frac{I}{Lm} \tag{7-2-10}$$

则此式右端的量，就称为该复摆的等值摆长。

复摆的这种等时性，不仅是机械钟表制作的基础，而且也提供了一种实验方法，用来测量复杂形状物体的转动惯量，而欲计算这种转动惯量，往往是比较困难的，有时甚至是不可能的。为此，可将式(7-2-9)改写成：

$$I=\frac{1}{4\pi^2}T^2mgL$$

显然，此式右端的各个物理量，都可由实验直接测出。

顺便指出，利用振动系统的固有频率来计时，不仅是机械钟表工作的依据，也是近代高精度计时仪器诸如石英钟、氢原子钟、铯原子钟工作的基础。由于这些振动过程发生在分子或原子层次上，所以其频率稳定性也特别高，例如石英钟的稳定度可达 10^{-10} 秒，是机械钟表望尘莫及的。

θ_m(度)	T'/T	$(T'-T)/T'$
5	1.0005	0.05%
15	1.0043	0.42
20	1.0077	0.76
30	1.0174	1.71
45	1.0396	3.81

也许大家会问：单摆或复摆只在摆角很小时作谐振动，那么，摆角大到什么地步，才会尽致式(7-2-4)或(7-2-9)产生明显的误差呢？从这里给出的几组数字可以看出，当角振幅 θ_m 小于 5° 时，实测周期 T' 与上述公式的计算周期 T 相差甚微，误差也可忽略不计。在 20° 摆角时，已有接近 1% 的误差；而 30° 以上时的误差，就十分可观了。

（三） 连通管中液柱运动

不考虑粘滞阻力时，连通管中的液柱仅在压差作用下运动。