瞿 波 著

分形几何与流体

Fractal Geometry and Fluids

Bo Qu

- 浅显易懂的分形中文介绍
- 深入浅出的原版博士论文
- 短篇分形应用论文

BO QU

上海社会科学院出版社

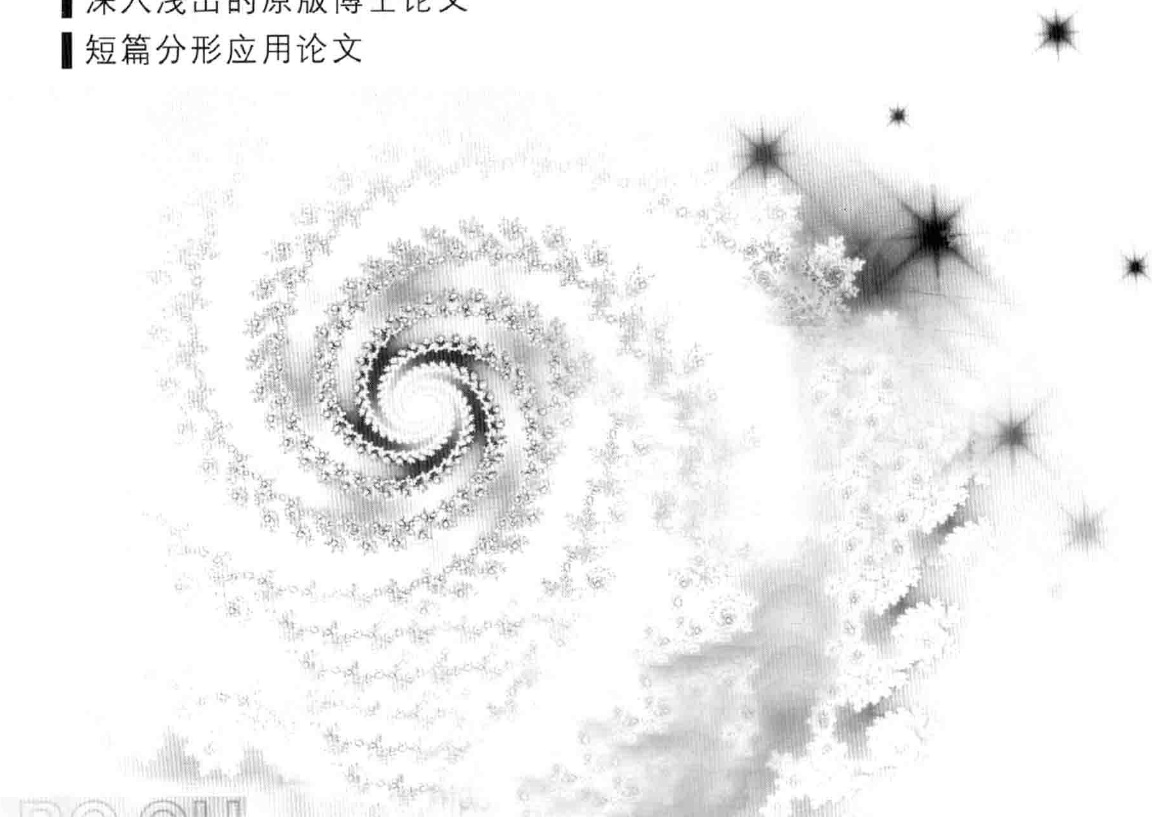
瞿 波 著

分形几何与流体

Fractal Geometry and Fluids

Bo Qu

- 浅显易懂的分形中文介绍
- 深入浅出的原版博士论文
- 短篇分形应用论文



上海社会科学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

分形几何与流体/瞿波著. —上海：上海社会科学院出版社，2013

ISBN 978-7-5520-0474-8

Ⅰ.①分… Ⅱ.①瞿… Ⅲ.①分形几何 Ⅳ.①O189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 286956 号

分形几何与流体

著　　者：瞿　波
责任编辑：董汉玲
封面设计：顾　凡
出版发行：上海社会科学院出版社
上海淮海中路 622 弄 7 号　电话 63875741　邮编 200020
http://www.sassp.org.cn　E-mail:sassp@sass.org.cn
排　　版：南京展望文化发展有限公司
印　　刷：上海颛辉印刷厂
开　　本：710×1010 毫米　1/16 开
印　　张：25
插　　页：2
字　　数：504 千字
版　　次：2014 年 2 月第 1 版　2014 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5520-0474-8/O·001　定价：79.80 元

序

——为《分形几何与流体》而作

诞生于20世纪70年代的分形(fractal)学科，至今已有40多年了。其间不乏介绍分形基本知识、分形在各领域中应用的优秀书籍与学术论文，推动了一门新兴学科——分形及其应用的崛起与蓬勃发展。

40多年，在历史的长河中只是一个瞬间，然而，从B. B. Mandelbrot提出“分形”一词至今，分形研究已经从分形几何的范畴发展成为一个极具生命力的交叉学科，不仅在分形的数学基础理论建立方面有显著进展，而且在多学科中的应用方面获得了更可喜的成就。瞿波博士的工作就是这些出色成就中的一份。

分形的数学基础理论非常重要，没有坚实的数学基础，分形就得不到实质性进展；但分形应用却丝毫不能忽略，其重要性决不亚于数学理论的研究。只有两者紧密结合、相辅相成，才能使得分形研究真正登上科学的巅峰，真正成为人类征服大自然的利器。瞿波博士的博士论文和她获得学位后的工作都体现了这一重要思维。她在熟练掌握分形数学基础理论后，致力于分形在流体力学中的应用研究(包括海湾水流轨迹和粒子分布轨迹)、分数布朗运动模型的研究(包括随机分数布朗运动)、加速分数布朗运动粒子追踪模型的研究(包括对海洋污染物传播、水面污染物扩散)等与国计民生息息相关的最热门课题，获得了值得称道的优秀成果。

更难能可贵的是，瞿波博士作为一位科学研究与大学教学紧密结合的教师，她奉献了自己宝贵的时间，尽心尽力，多思多想，把难以理解的数学概念与方法，用通俗易懂的语言文字编写了这本分形入门书籍。她期盼更多的人认识分形，利用分形，因为她深知，在大自然中，在你我的生活中，是“处处有分形”啊！

我祝贺这本书的出版，希望更多的人从中受益，并能为分形研究的美好未来奉献一份力量。

南京大学　苏维宜

2013年12月于南京

自　序

在英国爱丁堡大学读完博士的14年后的今天，我作了一个重要的决定，就是出版我的博士论文。我的初衷就是让更多的人了解分形这一新兴的数学学科。近年来有关介绍分形的书不多，但仅有的那几本对分形介绍的书籍又过于专业化。一大堆的数学测度论、集合论的公式把原本不复杂的分形复杂化了，让非数学界的读者望而生畏。而我要讲的分形理论和应用其实是很简单的东西，我把分形以最简单明了的方式介绍给大家，即使没有学过微积分的读者也能知道分形是怎么回事，也能计算出分形的维数。我的博士论文的思想也很简单，没有太多繁琐复杂的数学公式。所以，我想把我的研究成果与大家分享。

大概是和几何有缘，我在华东师范大学数学系读研究生时读的是微分几何，导师是年迈的钱端壮教授。其实当时钻研了一些微分几何的姊妹学——积分几何。和欧氏几何一样，微分几何、积分几何都是经典的规则几何。微分几何是运用微积分的理论研究空间的几何性质的数学分支。积分几何是通过各种积分研究图形性质的一门学科。它们都是在欧几里得空间研究的。去英国留学时，我想继续深造微分几何，可令我吃惊的是，英国的学校大多开设应用数学学科，数学中的统计学比较热门，因为它实用，几乎找不到学校研究微分几何的。当时我所在的英国苏格兰首府爱丁堡，是一座美丽的以城堡和街心花园加上一条王子大街著名的历史名城，我便决定在完成国内的数学硕士学位后先攻读一下计算机科学。于是，我选了龙比亚大学(Napier University)的计算机信息系统专业的硕士课程。学业之余，兼职在英国苏格兰皇家银行审计总部工作，负责和参与开发数据库软件模型，耳濡目染并感受了英国中级阶层的白领生活。在完成计算机硕士课程后，我的银行工作也告一段落。没有意向去拿第二个硕士学位，我选择了攻读博士。当时还是面临着此前同样的问题，就是英国的纯数学研究很少，基本上都是应用数学。我去了两所学校面试，最后选择了在我所居住的城市就读。我被爱丁堡龙比亚大学的土木工程系录取了，我的导师是比我小4岁的英俊的爱迪生博士。和国内的师生关系不同，这里师生总是直呼其名的，我的导师只许我叫他小名保尔(Paul)，他也直

呼我波，这样才显得亲切和平等。我的导师虽然年轻，但我很钦佩他的思路敏捷、作风严格。保尔有很多新点子，他后来把分形应用到了医疗器械上，用来诊断心脏病和高血压病，获得了美国专利。他由此成立了自己的公司，独树一帜地用分形这一数学工具造福于人民，并在经济上获利。

分形(fractal)是20世纪70年代发展起来的用于描述一些不能用传统的欧几里得几何描述的复杂几何图形的一门新学科。分形图形的特点是极不规则，分布不均，但在各种放大和缩小的尺度上都有着近乎相似的形状，如天空的浮云、起伏的地面、连绵的山峦等。分形的应用很广，几乎涉及包括物理、化学、生物学、材料科学、地质学、水文气象、医学、地理学、天文学等众多学科。大到宇宙星际，小到微生物粒子，可以说，这些貌似高深莫测的数学分形，就遍布于我们的生活中。基于此，我投身于数学分形研究，也基于此，我把貌似神秘的分形介绍给大家。

本书由分形几何介绍、我的英文博士论文和我的一部分有关分形研究的论文三部分构成。

在本书的第一部分，我用通俗的语言介绍了分形，只有高中数学基础的读者也能看懂，而且可以通过所介绍的简单方法来计算分形维数。

第二部分是我的博士论文，研究的是用分形中的分数布朗运动(fBm)模拟流水中污染物的轨迹。这是流体力学的范畴，但所用的是数学方法和分形思想。而分形中对曼德尔布罗特(Mandelbrod)的分数布朗运动模型的改进(FBMINC模型)是论文的核心所在。不同于传统的布朗运动，粒子的运动是随机的，分数布朗运动是基于布朗运动的具有长期记忆的随机运动。许多随机的运动都是分数布朗运动，而不是布朗运动，比如海洋上浮标的漂浮轨迹。攻读博士学位期间，先后和导师爱迪生博士联名在国际一流应用数学杂志上发表了几篇文章。其间，先和格拉斯哥大学研究人员合作，用他们的海湾模型的速度数据加上我的模型，用分数布朗运动粒子追踪模型来模拟海湾的水流轨迹和粒子分布轨迹。后用了英国诺森比亚(Northumbrian)水利局提供的海洋表面的污染散布的等高图，采用一种新型的加速分数型布朗运动的粒子追踪技术，来模拟沿开阔海水域中水流的传播，并成功地用粒子云来模拟沿海水域中污染物的扩散。通过将实际观测的数据与英国HR Wallingford传统的扩散模型计算出来的结果对比，我的模拟结果更胜一筹。我的导师爱迪生博士在此期间也出版了一本名为《分形和混沌》的专著，是作为教科书使用的。

我的博士论文的基本结构如下：

第一章，论文的结构和研究目的。

第二章，有关流体中分散（Diffusion）和传播（Dispersion）的背景文献介绍。

第三章，介绍布朗运动、分数布朗运动（fBm）和分形几何。其中的重点是我改进了曼德尔布罗特的 FBM 模型，使我的 FBMINC 模型成为更好、更精确的模型。关键的公式就是第三章中的（28）和（29）。我把曼德尔布罗特的 FBM 模型的积分公式调整了内核，变成了简单且更精确的离散型公式，只需要叠加就可以计算出分数布朗运动的轨迹。

第四章，沿海湾水流和粒子的模拟。

第五章，用加速分数布朗运动粒子追踪模型来模拟海洋上的污染物的传播。

第六章，结论和展望。

第三部分是为了让读者更好地理解我的博士论文内容，所附的几篇曾发表过的分形应用研究论文，有中文的，也有英文的，主要介绍了分形在流体中扩散的轨迹的模拟研究。不懂英文的读者也能从我的中文文章及分形的中文介绍中基本了解博士论文的内容。

书后附有模拟的 Fortran 程序和相当数量的参考文献。

这是一本很有启迪和实用性的分形入门书。对于如何把分形应用到实际问题中，此书能起到抛砖引玉的作用。当然，研究中难免有不足的地方，恳请读者对本书提出宝贵的批评意见。

通过《分形几何与流体》的出版发行，愿分形这一新型的数学分支能走出象牙塔，走向大众，给人们带来一个崭新的应用数学研究世界。愿你的思维冲破传统的羁绊，让我们一起来领略分形这一缤纷世界的风采。

本书的出版得到了国家自然科学基金的资助，得到了南通大学学术著作出版基金的资助，同时也得到了南通大学数学与应用数学重点专业建设资助。特此感谢！

瞿 波

2014 年 1 月于江苏南通

目 录

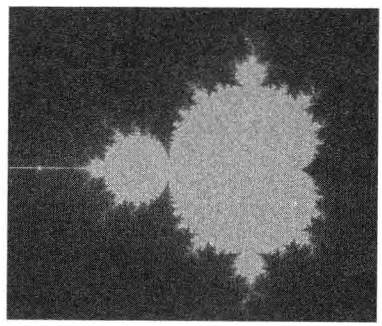
分形应用论文选

分形几何介绍

此部分只需有初等数学的基础知识

"Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line." (Mandelbrot, 1983).

"云层不是圆形的,山不是圆锥体,海岸线不是圆圈,树皮不是光滑的,光不是以直线传播的。" (曼德尔布罗特,1983年)



分形的创始人 Mandelbrot 和他著名的 Mandelbrot 集

一、不同于欧几里得空间的分形

欧几里得几何学的研究对象为几何物体，但它们具有特征长度。比如，零维的点、一维的线段、二维的面、三维的立体乃至四维的时空。自然界中很多的物体具有特征长度，如人有高度，山有海拔高度等。

最近二三十年来，产生了新兴的分形几何学，空间不一定是整数维的，而存在一个分数维数，这是几何学的新突破。

现在，你将进入一个新的几何学世界。在这个世界里，你碰到的将不再是欧几里得几何学的直线、圆、球体等简单规则的图形，而是海岸线、云彩、花草树木等复杂的自然形体，它们具有分数维空间，它们被称为分形(fractal)。

分形概念的形成，把人们带进了不规则的奇妙世界。分形几何学成为探索复杂性的有效工具。在这个充满新奇的几何学世界里，你将受到一种挑战传统教育的影响和冲击，你的思维将冲破传统的羁绊，让我们一起来领略分形的奇妙风采吧！

维数是几何学的基本概念。欧氏几何研究规则的图形，长度、面积、体积是它们最合适的特征量。但对海岸线这类不规则的分形，长度、面积和体积已经不能解释它了。维数才是最好的量化表征。

曼德尔布罗特(Mandelbrot)就提出了这样一个问题：英国的海岸线到底有多长？

海岸线长度最初是由英国数学家理查逊(Lewis Fry Richardson)提出的。他发现在估计一个国家的同一个海岸线长度时，竟然有 20%的误差。理查逊觉得，这种误差是因为他们使用不同长度的量尺所导致的。他同时发现海岸线长度 L 与测量尺度 s 的关系是 log(1/s)与 log(L)呈线性关系，其斜率为一定值 d。

曼德尔布罗特在理查逊的基础上，给出了相似维数的概念：如果把曲线(或曲面或立体)等分为 N 个小的自相似的线段(小曲面，小立体)，每一段长度为 s，则曲线的自相似维数 D (可以是分数)为

$$D = \log(\mathrm{N})/\log(1/\mathrm{s}) \tag{1}$$

这就可以描述海岸线的特征了，这就是著名的分数维数，这一维数不会随量尺的变化而变化。这一问题的研究，成为曼德尔布罗特思想的转折点，分形概念从这里萌芽生长。

二、分形的发展

分数维的概念已经有 80 年历史了，但"fractal"一词以及对分形的兴趣还是到了 1980 年早期才形成。最近一些年，分形几何科学已经涉及大量的领域。分形几何是具有分形物特点的几何学，一般简称为分形。分形在自然界中无所不在，例

如，喧闹的都市生活、变幻莫测的股市变化、复杂的生命现象、蜿蜒曲折的海岸线、坑坑洼洼的地面等，都表现了客观世界特别丰富的现象。分形一词(fractal)是曼德尔布罗特(B. B. Mandelbrot)于 1975 年由拉丁语“Frangere”一词创造而成，词本身具有“破碎”、“不规则”等含义。曼德尔布罗特意识到许多自然界的东西是不可能用传统的欧几里得几何来表示的，因为在欧几里得几何学中总是把研究对象想象成一个个规则的形体，而我们生活的世界竟如此不规则和支离破碎，与欧几里得几何图形相比，拥有完全不同层次的复杂性。曼德尔布罗特创立了分形(fractals)和分形几何，则可被用来描述真正的物体，如树叶的分布、树皮的粗糙、弯曲的河流和海岸线等。

有许多分形的定义。最简单的分形定义可能就是为一个物体在任意放大后都是自相似(self-similarity)。事实上，具有纵观上的对称性，每个小部分都能再现整体。这可能是一个最放松的定义。然而，这抓住了**自相似**的最基本的特征。如果我们把图形的细微部分放大后，还可观察到图形的每一小片段和整体本身都具有相同的结构，局部和放大的过程可以重复下去，就称此物体具有自相似性。**具有自相似性质的物体就是分形**。自相似性质还可以分为绝对自相似和统计自相似。绝对自相似的例子可以举一片蕨类植物的叶子，从大的分叉到小的分叉，再到更小的分叉，每次分叉都和原来的叶子有绝对的相似性。每一个蕨类的叶是整个蕨类的缩小。自然界中具有统计自相似的物体很多，比如云的边界、墙的裂缝、复杂的海岸线等。这些自然的分形有同样的统计特点，即放大后都有同样程度的不规则性。它们具有统计上的自相似性。

许多自然的分形是在三维世界里存在的。分形有自己的维数，叫作分形维(fractal dimension)，这通常是大于拓扑维数而小于欧几里得维数的非整数维。

三、几类最基本的分形图形

为了介绍分形维数，先介绍几种最基本的分形图形。

1. 三分康托集 (cantor set)

把一根单位线段分成三段，去掉中间的一段，再在剩下的两端中，分别作同样的分割和取舍，这样就得到图 1 中的 $k=1$。

图 1 无限次地分割下去，就得到著名的康托集(名字取自德国数学家康托，Georg Cantor，1845～1918)。无限次分割取舍下去，就会得到很多点，那些点就像尘埃一样细小。

在构造康托集时，原来的单位线段($k=0$)叫引发剂(initiator)，第一步($k=1$)叫发生器(Generator)。因为此后的过程都是反复迭代此步骤，因此第一步很重要，为了说明由此发生器所构造的分形，我们没有必要无止境地迭代下去，只需要迭代有限步，以满足眼球的需要。这种一路反复迭代构成分形的物体叫预

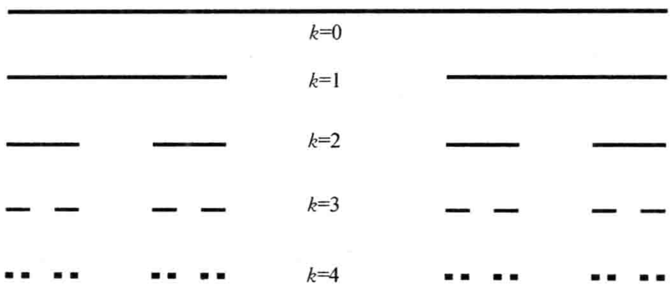


图 1　三分康托集（Cantor Set）

分形(prefractals)。

计算一下所去掉的长度总和：

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\frac{8}{81}+\frac{16}{243}\cdots=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)=1 \qquad (2)$$

很有意思的是，康托集最后留下来的无数个尘埃点集的长度是零！

2. **柯西曲线**(Koch curve)

柯西曲线是由瑞典数学家 Helge von Koch 发现的，它的构造方式如图 2 所示。

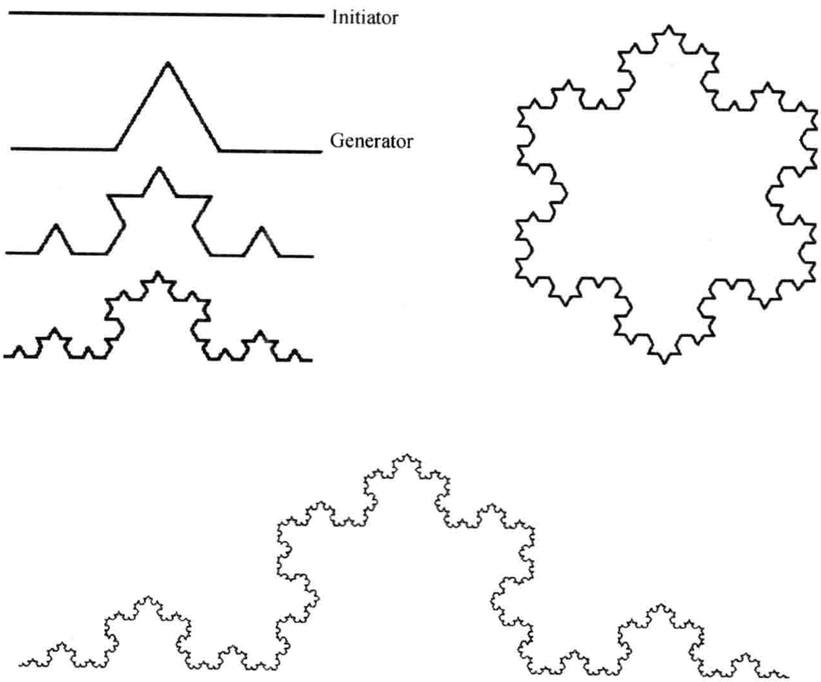


图 2　柯西曲线

图 2 左上方展示了构造柯西曲线的前 4 步。柯西曲线是由单位线段中间的 1/3 段用两个新的成 60 度角的 1/3 段重新连接而成。第三步以后就可以看出柯西曲线的基本形状了。图 2 的右方是由左上方的最后一步(第三步)的三个组合成的柯西岛，也叫雪花图，柯西岛的边长是趋于无穷的，而其面积是有界的(Addison, 1997)。图 2 的下方图是第四步，是在第三步的基础上继续延伸的。

可以看出，柯西曲线具有很强的自相似性，即不同的局部经过放大，会和整体相似。柯西曲线有多长？可以看出，每次长度都增加了 4/3，经过无限次延伸，总长度会趋于无穷。这让我们联想起曼德尔布罗特提出的问题：英国的海岸线到底有多长？英国的海岸线有无数的细节，和柯西岛有相似之处。用不同的尺去量海岸线的长短，会得到不同的答案。尺度越短，量出来的海岸线越长。当量尺越来越短时，量出来的海岸线就越来越长，乃至于没有边界。因此，用长度来尺量分形是不科学的。为此，曼德尔布罗特发明了分形维数这个概念。

四、分形维数

在欧几里得空间，维数都是整数，一维的直线，二维的平面，三维的空间，而空间中的点都可以用相互垂直的坐标系来一一对应。拓扑空间是欧几里得空间的推广，而豪斯多夫维数则给了分形维数一个严格的定义。

1. 拓扑维数

先介绍什么是拓扑，抽象地说，一个集合 X 的拓扑 T 就是由 X 的一些子集组合而成的集合，而这些子集的有限交和无限并还是属于 T。具体而言，二维欧氏空间中的所有开集就是该空间的拓扑，因为开集的有限交和无限并还是开集。

拓扑学(topology)是近代发展起来的研究连续性和连通性的一个数学分支，它也叫橡皮几何学。拓扑学研究几何图形在一对一的双方连续变换下不变的性质。在 20 世纪，拓扑学发展成为数学中一个非常重要的领域。拓扑学也叫地志学，即是和研究地形、地貌相类似的有关学科。拓扑学是几何学的一个分支，但是这种几何学又和通常的解析几何(平面几何、立体几何)不同。通常的解析几何研究的对象是点、线、面之间的位置关系以及它们的度量性质。拓扑学对于研究对象的长短、大小、面积、体积等度量性质和数量关系都无关。

举例来说，在通常的平面几何里，把平面上的一个图形搬到另一个图形上，如果完全重合，那么这两个图形叫做全等形。但是，在拓扑学里所研究的图形，在运动中无论它的大小或者形状都发生变化，也可能在拓扑空间里是等价的。在拓扑学里没有不能弯曲的元素，每一个图形的大小、形状都可以改变。例如，欧拉在解决哥尼斯堡七桥问题的时候，他画的图形就不考虑它的大小、形状，仅考虑点和线的个数。这些就是拓扑学思考问题的出发点。

比如画在橡皮膜上的两条相交曲线，对橡皮膜施以拉伸或挤压等形变，但在不