"十二五"国家重点图书出版规划项目

中国科学技术大学精品教材

冯玉瑜　曾芳玲　邓建松／编著

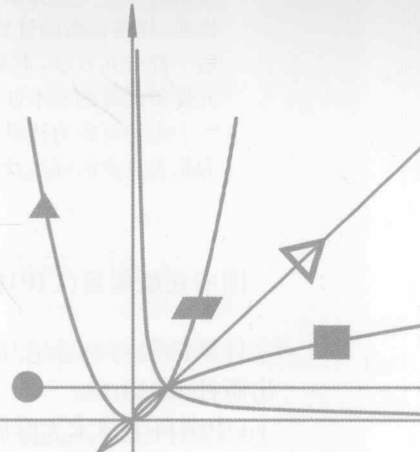
样条函数与逼近论

Spline Functions and Approximation Theory

中国科学技术大学出版社

"十二五"国家重点图书出版规划项目

中国科学技术大学精品教材



冯玉瑜　曾芳玲　邓建松／编著

Spline Functions and Approximation Theory

样条函数与逼近论

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书共18章，分为3部分.第1部分为前7章，系统地介绍了单变量函数逼近论的基本内容，即赋范线性空间中逼近的一般理论，包括一致逼近、最佳逼近的定量理论、最小平方逼近、有理逼近等重要内容.第8章到第13章为第2部分，主要讲述了单变量样条函数的基本理论，包括多项式样条的基本空间、B样条及其性质、样条函数的计算、对偶基和样条的零点、样条的插值与逼近等重要内容.最后一部分共5章，主要介绍了多元多项式插值以及贯穿剖分上、规则剖分下的二元样条函数的基本性质及其应用.

本书可作为计算数学和应用数学专业的高年级本科生和研究生教材，亦可作为相关专业的师生及科技人员、工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

样条函数与逼近论/冯玉瑜，曾芳玲，邓建松编著.—合肥：中国科学技术大学出版社，2013.8

(中国科学技术大学精品教材)

"十二五"国家重点图书出版规划项目

ISBN 978-7-312-03283-7

Ⅰ.样… Ⅱ.① 冯… ② 曾… ③ 邓… Ⅲ.① 样条函数—高等学校—教材 ② 逼近论—高等学校—教材 Ⅳ.① O241.5 ② O174.41

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第178973号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路96号，230026

http://press.ustc.edu.cn

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本：710 mm×960 mm 1/16 印张：29.5 插页：2 字数：516千

2013年8月第1版 2013年8月第1次印刷

印数：1—3000册

定价：52.00元

总序

2008 年, 为庆祝中国科学技术大学建校五十周年, 反映建校以来的办学理念和特色, 集中展示教材建设的成果, 学校决定组织编写出版代表中国科学技术大学教学水平的精品教材系列. 在各方的共同努力下, 共组织选题 281 种, 经过多轮、严格的评审, 最后确定 50 种入选精品教材系列.

五十周年校庆精品教材系列于 2008 年 9 月纪念建校五十周年之际陆续出版, 共出书 50 种, 在学生、教师、校友以及高校同行中引起了很好的反响, 并整体进入国家新闻出版总署的 "十一五" 国家重点图书出版规划. 为继续鼓励教师积极开展教学研究与教学建设, 结合自己的教学与科研积累编写高水平的教材, 学校决定, 将精品教材出版作为常规工作, 以《中国科学技术大学精品教材》系列的形式长期出版, 并设立专项基金给予支持. 国家新闻出版总署也将该精品教材系列继续列入 "十二五" 国家重点图书出版规划.

1958 年学校成立之时, 教员大部分来自中国科学院的各个研究所. 作为各个研究所的科研人员, 他们到学校后保持了教学的同时又作研究的传统. 同时, 根据 "全院办校, 所系结合" 的原则, 科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学, 为本科生授课, 将最新的科研成果融入到教学中. 虽然现在外界环境和内在条件都发生了很大变化, 但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变. 正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针, 并形成了优良的传统, 才培养出了一批又一批高质量的人才.

学校非常重视基础课和专业基础课教学的传统, 也是她特别成功的原因之一. 当今社会, 科技发展突飞猛进、科技成果日新月异, 没有扎实的基础知识, 很难在科学技术研究中作出重大贡献. 建校之初, 华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行, 亲自为本科生讲授基础课. 他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德, 带出一批又一批杰出的年轻教员, 培养了一届又一届优秀学生. 入选精品教材系列的绝大部分是基础课或专业基础课的教材, 其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育

家的教诲和影响, 因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念与科学探索精神.

改革开放之初, 学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习, 他们在带回先进科学技术的同时, 也把西方先进的教育理念、教学方法、教学内容等带回到中国科学技术大学, 并以极大的热情进行教学实践, 使“科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合”的方针得到进一步深化, 取得了非常好的效果, 培养的学生得到全社会的认可. 这些教学改革影响深远, 直到今天仍然受到学生的欢迎, 并辐射到其他高校. 在入选的精品教材中, 这种理念与尝试也都有充分的体现.

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点, 用创新的精神编写教材. 进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生, 针对他们的具体情况编写教材, 才能更加有利于培养他们的创新精神. 教师们坚持教学与科研的结合, 根据自己的科研体会, 借鉴目前国外相关专业有关课程的经验, 注意理论与实际应用的结合, 基础知识与最新发展的结合, 课堂教学与课外实践的结合, 精心组织材料、认真编写教材, 使学生在掌握扎实的理论基础的同时, 了解最新的研究方法, 掌握实际应用的技术.

入选的这些精品教材, 既是教学一线教师长期教学积累的成果, 也是学校教学传统的体现, 反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果. 希望该精品教材系列的出版, 能对我们继续探索科教紧密结合培养拔尖创新人才, 进一步提高教育教学质量有所帮助, 为高等教育事业作出我们的贡献.

侯建国

中国科学技术大学校长

中国科学院院士

第三世界科学院院士

前　言

函数逼近论有着悠久的历史. 20 世纪 50 年代以来, 样条函数的产生以及计算机的发展为经典的逼近论增添了新的活力, 使其逐步发展成为一个既有深刻的数学理论, 又在科学计算、工程技术、计算机辅助几何设计、国民经济乃至生物医学等领域有广泛应用价值的数学分支, 受到国内外众多数学工作者和工程技术人员的关注, 研究和应用成果层出不穷.

我们长期从事"计算机辅助几何设计和图形学""应用逼近论"等方面的研究, 从 1981 年开始即为中国科学技术大学数学系计算数学和应用数学专业以及相关专业的高年级本科生和研究生开设了函数逼近论和样条函数的课程. 几十年来, 该课程经过不断地发展更新, 我们最终编写了此书.

本书系统地阐述了单变量函数逼近论最重要的内容, 详尽地介绍了多项式样条的基本理论, 并概述了多元多项式插值和多变量样条, 特别是二元样条的重要成果, 也指出了一些有待解决的研究问题. 我们设置这门课程的初衷是为大多数读者提供函数逼近和样条函数的基本知识, 用来解决在科学计算、计算机辅助几何设计等实际应用中的问题; 当然, 也为少数有兴趣在该方向展开进一步研究的读者提供较为坚实的理论知识. 几十年的实践表明, 我们基本上已达到了上述目标.

本书提供了每周 4 学时、为期 1 年的教学内容, 可作为高校计算数学和应用数学及相关专业高年级本科生的选修课以及硕士研究生的必修课的参考用书. 第一学期讲授前 10 章, 系统地讲解单变量函数逼近论的基本内容, 包括多项式样条函数的基本空间、B 样条及其性质等重要内容. 第二学期首先进一步讲述多变量样条的性质和应用, 对第 13 章其他多项式样条空间可作简单的介绍, 但这部分内容对拓宽学生的思路、提高分析问题和解决问题的能力极为重要. 从第 14 章到第 18 章, 我们介绍多元多项式插值以及多变量样条已取得的一些重要成果. 由于

多元情况的发展还很不成熟, 故这部分主要关注已有的相对成熟的成果, 以此来解决实际问题, 同时用来了解尚待解决的问题, 从而激发有兴趣的读者进一步开展研究.

为完整起见, 本书也写入了一些不必详细讲解的内容, 例如定理 1.6 证明 L_p 是匀凸空间以及定理 12.6 关于弱的 Tchebycheff 特征定理等. 类似的内容还有很多处. 这些内容可留给有兴趣的读者进一步学习. 是否讲解这些内容, 并不影响学生对基本内容的掌握, 可由教师灵活掌握.

由于笔者的水平有限, 本书的选材和内容可能有不当、甚至错误和不妥之处, 敬请专家、读者不吝赐教, 笔者不甚感激.

作　者

2012 年 12 月于中国科学技术大学

目　次

第 2 部分 单变量样条函数

第 1 部分

单变量函数逼近论

第 1 章　赋范线性空间中的逼近问题引论

1.1　逼近问题的提出

设 X 是赋范线性空间, M 是 X 的非空子集. X 中的范数记为 $\|\cdot\|$. 我们希望从 M 中选取元素逼近 X 中的元素, M 称为 X 的一个**逼近集**.

定义 1.1　对任意 $x \in X$, 如果有元素 $m^* \in M$ 使得

$$\|x-m^*\| = \inf_{m\in M} \|x-m\| = d(x,M),$$

则把 m^* 称为由子集 M 逼近 x 的**最佳逼近元**, 简记为 $m^* \in \mathcal{B}_M(x)$. 这里

$$\mathcal{B}_M(x) \triangleq \{m \in M:\ \|x-m\| = d(x,M)\},$$

表示由 M 逼近 x 的最佳逼近元的集合, 用 $\#\mathcal{B}_M(x)$ 记集合中元素的个数.

把量 $d(x,M)$ 称为由 M 来逼近 x 的最佳逼近. 我们今后用“最佳逼近”一词既表示 m^*, 也表示 $d(x,M)$, 具体意义可从上下文判断.

赋范线性空间中逼近问题所讨论的主要内容就是:

(1) 存在性. 即是否有 $\#\mathcal{B}_M(x) \geqslant 1$?

(2) 唯一性. 即是否有 $\#\mathcal{B}_M(x) \leqslant 1$?

(3) 表征定理. 即最佳逼近元的特征是什么?

(4) 构造. 当 x, M 给定时, 如何计算最佳逼近元?

在进一步讨论之前, 我们先对几个常用的名词解释如下:

- **存在性集**　是指如果对每一个 $x \in M$, 都有 $\mathcal{B}_M(x) \neq \emptyset$;
- **唯一性集**　是指对每一个 $x \in M$, 都有 $\#\mathcal{B}_M(x) \leqslant 1$;

· **Tchebycheff**[1] **集 (T 集)** 是指对任意 $x\in X$, 都有 $\#\mathcal{B}_M(x)=1$.

对赋范线性空间中的一个逼近问题, X 和 M 是给定的, 不同的 X 和 M 对应着不同的逼近问题. 下面给出几个典型的不同范数下逼近问题的例子. 设 I 是一列紧[2]的距离空间, 一般可认为是区间 $[a,b]$. 常用的线性赋范空间有:

(1) $L_2(I)\quad \|x\|\triangleq\|x\|_2\triangleq\sqrt{\int_I |x(t)|^2\mathrm{d}t}$, 相应的是最小平方逼近, 见第 6 章;

(2) $C(T)\quad \|x\|\triangleq\|x\|_\infty\triangleq\sup\limits_{t\in T}|x(t)|$, 相应的是一致逼近, 见第 2 章;

(3) $L_1(T)\quad \|x\|\triangleq\|x\|_1\triangleq\int_I |x(t)|\mathrm{d}t$, 相应的是最小平均逼近.

M 常常可以取为 X 的真子空间, 例如:

(1) $\mathcal{P}_n\triangleq\left\{\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_it^{i-1},a_i\in\mathbb{R}\right\}$ 为 n 阶的实多项式的全体;

(2) $\mathring{\mathcal{P}}_n\triangleq\left\{a_0+\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i\cos it+b_i\sin it),a_i,b_i\in\mathbb{R}\right\}$ 为不超过 n 次三角多项式的全体;

(3) $\mathcal{S}(\mathcal{P}_m,\mathfrak{M},\Delta)\triangleq\{S(t):\ S|_{I_i}=S_i(x)\in\mathcal{P}_m,S_i^{j-1}(t_i)=S_{i+1}^{j-1}(t_i)(i=0,1,\cdots,k-1;j=1,2,\cdots,m-m_i)\}$ 是 m 阶的分割为 Δ 的重度向量为 $\mathfrak{M}=(m_0,m_1,\cdots,m_k)$ 的多项式样条空间, 其中 $\Delta\triangleq a=t_0<t_1<\cdots<t_{k-1}<t_k=b$. 关于多项式样条空间的详情, 见本书第 2 部分;

(4) $\mathcal{R}_{m,n}\triangleq\left\{\dfrac{p(x)}{q(x)}:\ p(x)\in\mathcal{P}_m,q(x)\in\mathcal{P}_n\right\}$ 表示阶为 (m,n) 的有理函数的全体.

1.2 最佳逼近元的存在唯一性

1.2.1 存在性

定理 1.1 设 $M\subset X$ 是 X 中的列紧集, 则 M 是存在性集, 即 $\mathcal{B}_M(x)\neq\emptyset$.

---

① P. L. Chebyshev(1821 ~ 1894), 俄罗斯数学家. 其姓翻译成英文后有多种版本, 如 Chebychev, Chebysheff, Chebyshov, Tchebychev 或者 Tchebycheff 等. 本书采用最后一种写法.

② 任意序列都有收敛子列的空间称为列紧空间.

证明　若 $x\in M$, 显然 $x\in\mathcal{B}_M(x)$. 下设 $x\in X\backslash M$. 由于

$$d(x,M)=\inf_{y\in M}\|x-y\|,$$

所以存在 $m_n\in M$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x-m_n\|=d(x,M)$. 这里$\{m_n\}$ 称为 x 在 M 内的**一个极小化序列**. 由列紧性 (必要时取其子列) 知

$$\lim_{n\to\infty}m_n=m\in M.$$

所以

$$\|x-m\|=\lim_{n\to\infty}\|x-m_n\|=d(x,M),$$

即 $m\in\mathcal{B}_M(x)$. □

推论 1.1　若 $M\subset X$ 是 X 的子空间, 且 $\dim(M)<+\infty$, 则对任意 $x\in X$, 有 $\mathcal{B}_M(x)\neq\emptyset$.

但如果 $M\subset X$ 是 X 中的无限维子空间, 那么即使 M 是闭的, 也不能保证对任意的 $x\in X$ 都有 $\mathcal{B}_M(x)$ 非空. 下面给出一个 M 是无限维子空间且使得对任意 $x\in X\backslash M$, 都有 $\mathcal{B}_M(x)=\emptyset$ 的例子.

例 1.1　设 $X\triangleq\left\{x:(x(1),x(2),\cdots,x(n),\cdots),\lim\limits_{n\to\infty}x(n)=0\right\}$. 对范数 $\|x\|\triangleq\sup\limits_n|x(n)|$, X 为赋范线性空间. 取 $M\triangleq\left\{m\in X:\sum\limits_{n=1}^{\infty}m(n)/2^n=0\right\}$ 是 X 中的线性子空间. 现证明:

(1) 对任意 $x\in X\backslash M$, 都有 $\mathcal{B}_M(x)=\emptyset$;

(2) M 是闭集.

证明　(1) 由于 $x\in X\backslash M$, 我们可以记

$$\alpha\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x(n)}{2^n}\neq 0.$$

任取 $m\in M$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x(n)=\lim\limits_{n\to\infty}m(n)=0$, 所以存在 $n_0>0$, 使得当 $n>n_0$ 时, $|(x-m)(n)|<|\alpha|/2$. 而

$$\begin{aligned}|\alpha|&=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x(n)}{2^n}\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-m)(n)}{2^n}\right|\\&\leqslant\left|\sum_{n\leqslant n_0}\frac{(x-m)(n)}{2^n}\right|+\left|\sum_{n>n_0}\frac{(x-m)(n)}{2^n}\right|\end{aligned}$$