最新版 经济数学基础(一)

微积分解题思路和方法

主　编：刘书田
葛振三

基础+题型
教学成功的保证

高等院校财经类专业核心课程辅导教材

原创　实用　严谨　科学

FOCUS
聚焦图书

世界图书出版公司

高等院校财经类专业核心课程辅导教材

最新版 经济数学基础（一）

微积分
解题思路和方法

主　编：刘书田
葛振三

北京 ·广州 · 上海 · 西安

图书在版编目(CIP)数据

微积分 解题思路和方法/刘书田,葛振三主编 .—北京:
世界图书出版公司北京公司,1998.2
(经济数学基础:1)
ISBN 7-5062-3664-8

Ⅰ.微… Ⅱ.①刘… ②葛… Ⅲ.微积分-解题 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 01680 号

微积分解题思路和方法
[最新版经济数学基础(一)]

主　　编:刘书田　葛振三
责任编辑:罗杨为
装帧设计:京 A 企划

出　　版:世界图书出版公司北京公司
发　　行:世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　邮编 100010　电话 010—62198079)
销　　售:各地新华书店
印　　刷:河北香河新华印刷有限公司

开　　本:850×1168 毫米　1/32　**印张**:16.5
字　　数:450 千字
版　　次:1998 年 2 月第 1 版
2003 年 9 月第 3 版第 1 次印刷
印　　数:57001—62000

ISBN 7-5062-3664-8/F·47　　定价:19.80 元

服务热线:010—62198078

使用说明

《微积分》是微分学与积分学的总称,是继欧式几何产生之后,全部数学中的最大的一个创造.微积分学在推动了数学的迅猛发展的同时,也极大的推动了天文学、力学、物理学、化学、生物学、工程学、经济学等自然科学、社会科学及应用科学各个分支学科的发展,并在这些学科中有越来越广泛的应用.因此,《微积分》成为高等学校财经类、管理类等专业必修的核心基础课程之一,也是硕士研究生入学数学考试中的一门必考科目.这门课程本身的基本理论、基本概念比较多且易混淆,而且在学习过程中,对读者的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和运算能力都有较高的要求,为帮助读者克服在学习过程中所遇到的这些困难,更加有效的掌握微积分的思想和方法,笔者根据多年的教学实践经验和研究成果倾心编著了这本与教学同步、与水平同步的辅导用书.

本书根据现行本科教学大纲和硕士研究生入学统一考试数学考试大纲编写而成,其主要特点如下:

一、以大纲为准 各章前均有＜要求与说明＞,它摘自国家教委颁布的《经济基础教学大纲》,让读者在明确学习要求和学习任务之后,进行有的放矢的学习.

二、与教材同步 各章节内容编排与教材紧密配合,注重条理性与逻辑性相结合,在详细概括主要概念、定理、公式等基本内容的同时,对一些在理解概念与掌握方法时所必须的重要结论进行了系统的归纳和总结,从而帮助读者在解题过程中实现事半功倍.

三、以题型为纲 对于数学来说,题是无穷多的,题型是有限的.本书归纳了这门课程所涉及的几乎所有的题型和经典例题(含研究

生入学考试试题),并逐一进行分析;并通过这种分析和归纳总结,帮助读者更好的把握典型题目和典型的处理方法和可能的各种延伸,从而达到举一反三、触类旁通的功效.

四、习题精选与精编 对于掌握一门课程并通过考试来说,做一定数量的习题是必不可少的.为此,在每章后面均配有专门的习题供读者练习.在较系统的指导读者"怎样进行思考"之后,使读者得到各种层次的训练,在增强自己解决问题的能力的同时,检验自己对所学知识掌握的程度.

在本书的成书和修订过程中,得到了很多专家和教授的支持和参与.参加《微积分》分册修订工作的有袁荫堂、范培华、胡显佑、李建平、赵惠斌、徐国元、金桂堂、唐声安.对他们的热诚帮助,再次表示诚挚的谢意.

书中如有不妥之处,恳请读者批评指正.

编者

2003年8月

目　　录

第一章　函　　数

要求与说明

1. 理解实数与实数绝对值的概念,掌握解简单绝对值不等式的方法.
2. 理解函数、函数的定义域和值域等概念,熟悉函数的表示法.
3. 了解函数的几何特性并掌握各几何特性的图形特征.
4. 了解反函数的概念;知道函数与其反函数的几何关系;给定函数会求其反函数.
5. 理解复合函数的概念;了解两个(或多个)函数能构成复合函数的条件;掌握将一个复合函数分解为较简单函数的方法.
6. 理解基本初等函数及其定义域、值域等概念;掌握基本初等函数的基本性质.
7. 理解初等函数的概念;了解分段函数的概念.
8. 会建立简单应用题的函数关系.

§1.1　函数概念

一　函数概念

1. 函数定义

设 D 是一个非空实数集,若按照某一确定的对应法则 f,对于每一个 $x \in D$,都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称对应法则 f 是定义在 D 上的函数,D 称为函数 f 的定义域,根据法则 f 与 D 中任一实数 x 相应的 y 值,记作 $f(x)$,称为函数 f 在 x 的函数值.全体函数值的集合

$$Z = \{y \mid y = f(x), x \in D\} \subset R$$

称为函数的值域.

由函数的定义可知,一个函数被给定要有三个因素:定义域 D、对应法则 f 和值域 Z.其中前二者为要素.因此,函数通常记作

$$y = f(x), x \in D$$

对函数定义,要掌握以下三方面的问题:

(1) 确定函数的定义域

思路 按函数定义,若自变量 x 取某一数值 x_0 时,函数 y 有确定的值 y_0 与之对应,则称函数 f 在 x_0 有定义.

当函数 $y = f(x)$ 用解析表达式给出,而又没给出自变量 x 的取值范围 D 时,确定函数的定义域时,就是求使该解析式有意义的自变量取值范围.

(2) 判定两个函数相同

思路 由于定义域 D 和对应法则 f 是确定一个函数的两个要素,因此,两个函数,当其定义域 D 和对应法则 f 都相同时,才表示同一个函数.

(3) 正确运用函数记号,求函数值

思路 按函数定义,对 D 中某一定值 x_0,根据法则 f 所对应的因变量称为函数 f 在 x_0 的函数值,记作 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$.

当函数 $y = f(x)$ 用解析表达式给出时,将表达式中之 x 代换以 x_0 便得到 $f(x_0)$.

2. 分段函数

在用公式法表示的函数中,若自变量 x 与因变量 y 之间的函数关系要用两个或多于两个的数学式子来表达,即在函数定义域的不同部分用不同数学式子表示的函数,称为分段函数.

分段函数的定义域是各个部分自变量 x 取值范围之总和.

对分段函数 $f(x)$,求函数值 $f(x_0)$ 时,要根据 x_0 所在的部分区间,用 $f(x)$ 相应的表达式求 $f(x_0)$.

【例 1】 (1) $y = \ln\cos x$ 的定义域是________;

(2) $y = \sqrt{\sin x - 1}$ 的定义域是________;

(3) 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,且 $0 < a \leqslant \dfrac{1}{2}$,则 $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域是________;

(4) 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0)$,则 $f(\ln x)$ 的定义域是________.

解 (1) 由 $\cos x > 0$ 可得函数的定义域是无限多个区间

$$\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

(2) 由 $\sin x - 1 \geqslant 0$ 知,须取使 $\sin x = 1$ 的 x 值,所以函数的定义域是点集

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$$

(3) 由 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$,即 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$

注意到 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$,所以 $1-a\geqslant\frac{1}{2}>a$,从而所求定义域为 $[a,1-a]$.

(4) 在 $f(\ln x)$ 中,若记 $u=\ln x$,按已知条件求 $f(\ln x)$ 的定义域,就是使 $-\infty<u<0$,即 $-\infty<\ln x<0$,由此知应有 $0<x<1$.故所求定义域是 $(0,1)$.

【例 2】 设函数 $y=\sqrt{g(x)}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域是 $[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$,则 $g(x)=($ $)$.

(A) $\sin x$ (B) $\cos x$ (C) $\tan x$ (D) $\cot x$

解 按题目所给条件,在 $[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$ 内必有 $g(x)\geqslant 0$,只有 $\sin x$ 满足这个条件.

$\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$,$\cot x$ 在 $x=0$ 或 $x=\pi$ 无意义;$\cos x$ 在 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 内非正.选(A).

【例 3】 判定下列各对函数是否相同,并说明理由.

(1) $f(x)=\ln(x^2-3x+2)$,$g(x)=\ln(x-1)+\ln(x-2)$

(2) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$,$g(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

(3) $f(x)=\arccos x$,$g(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$

(4) $f(x)=3-|3x-1|$,$g(x)=\begin{cases}4-3x & ,x\geqslant\frac{1}{3}\\2+3x & ,x<\frac{1}{3}\end{cases}$

解 (1) 按对数性质,有

$$\ln(x^2-3x+2)=\ln(x-1)(x-2)$$

$f(x)$ 的定义域由 $\begin{cases}x-1<0\\x-2<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-1>0\\x-2>0\end{cases}$ 得 $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.显然 $g(x)$ 的定义域只是 $(2,+\infty)$.故不相同.

(2) 按前述,两个函数的对应法则 f 相同,定义域都是 $(-1,1)$.故相同.

(3) 由于 $\cos(\arccos x)=x$,$\cos(\frac{\pi}{2}-\arcsin x)=\sin(\arcsin x)=x$,故相同.

(4) 根据绝对值的定义

$$\begin{cases} 当\ 3x-1\geqslant 0, 即\ x\geqslant \dfrac{1}{3}\ 时, |3x-1|=3x-1 \\ 当\ 3x-1<0, 即\ x<\dfrac{1}{3}\ 时, |3x-1|=1-3x \end{cases}$$

于是 $$f(x)=\begin{cases} 4-3x & ,x\geqslant \dfrac{1}{3} \\ 2+3x & ,x<\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同.

【例 4】 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,以 $f(x)$ 表示 $f(3x)$,则(　　)正确.

(A) $\dfrac{3f(x)}{3f(x)-1}$　　(B) $\dfrac{3f(x)}{3f(x)-3}$

(C) $\dfrac{3f(x)}{2f(x)+1}$　　(D) $\dfrac{3f(x)}{2f(x)-1}$

解 将 $3x$ 代以 $f(x)$ 表达式中之 x 得

$$f(3x)=\frac{3x}{3x-1}=\frac{\dfrac{3x}{x-1}}{\dfrac{2x+x-1}{x-1}}=\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

选(C).

【例 5】 设 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $f(\dfrac{y+z}{1+yz})=1$, $f(\dfrac{y-z}{1-yz})=2$,求 $f(y)$, $f(z)$.

分析 由于 $$f(\frac{y+z}{1+yz})=\ln\frac{1+\dfrac{y+z}{1+yz}}{1-\dfrac{y+z}{1+yz}}=\ln\frac{1+yz+y+z}{1+yz-y-z}$$
$$=\ln\frac{(1+y)(1+z)}{(1-y)(1-z)}=\ln\frac{1+y}{1-y}+\ln\frac{1+z}{1-z}$$
$$=f(y)+f(z)$$

同样,可推得 $f(\dfrac{y-z}{1-yz})=f(y)-f(z)$

所以,为求 $f(y)$ 和 $f(z)$,先求 $f(y)\pm f(z)$.

解 因 $$f(y)+f(z)=\ln\frac{1+y}{1-y}+\ln\frac{1+z}{1-z}=f(\frac{y+z}{1+yz})=1$$
$$f(y)-f(z)=\ln\frac{1+y}{1-y}-\ln\frac{1+z}{1-z}$$

$$= \ln \frac{1 + \frac{y - z}{1 - yz}}{1 - \frac{y - z}{1 - yz}} = f(\frac{y - z}{1 - yz}) = 2$$

于是 $\quad f(y) = \frac{1}{2}(1 + 2) = \frac{3}{2}, f(z) = \frac{1}{2}(1 - 2) = -\frac{1}{2}$

【例 6】 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2 + x & ,x \leqslant 0 \\ 2^x & ,x > 0 \end{cases}$,求:

(1) 函数的定义域;

(2) $f(0), f(-1), f(3), f(a), f(f(-1))$.

解 (1) 函数的定义域应是$(-\infty, 0] \cup (0, +\infty)$,即$(-\infty, +\infty)$.

(2) 因 $0 \in (-\infty, 0]$, $-1 \in (-\infty, 0]$ 由 $f(x) = 2 + x$,得

$$f(0) = 2 + 0 = 2, \quad f(-1) = 2 + (-1) = 1$$

因 $\exists \in (0, +\infty)$,由 $f(x) = 2^x$,得 $f(3) = 2^3 = 8$.

当 $a \leqslant 0$ 时,由 $f(x) = 2 + x$ 得 $f(a) = 2 + a$;

当 $a > 0$ 时,由 $f(x) = 2^x$,得 $f(a) = 2^a$

因 $f(-1) = 1$,所以 $f(f(-1)) = f(1) = 2^1 = 2$.

【例 7】 设 $f(x) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ x^2 & ,x \geqslant 0 \end{cases}$,求:

(1) $f(x - 1), f(x - 2)$

(2) $F(x) = f(x) - f(x - 1) - f(x - 2)$

解 (1) 将 $f(x)$ 表达式中及自变量 x 的取值范围之 x 代以 $x - 1$ 得

$$f(x - 1) = \begin{cases} 0 & ,x - 1 < 0 \quad 即\ x < 1 \\ (x - 1)^2 & ,x - 1 \geqslant 0 \quad 即\ x \geqslant 1 \end{cases}$$

同理,得

$$f(x - 2) = \begin{cases} 0 & ,x - 2 < 0 \quad 即\ x < 2 \\ (x - 2)^2 & ,x - 2 \geqslant 0 \quad 即\ x \geqslant 2 \end{cases}$$

(2) $F(x)$ 的表示式由各区间的函数的表示式来确定

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ x^2 - 0 = x^2 & ,0 \leqslant x < 1 \\ x^2 - (x - 1)^2 - 0 = 2x - 1 & ,1 \leqslant x < 2 \\ x^2 - (x - 1)^2 - (x - 2)^2 = -x^2 + 6x - 5 & ,2 \leqslant x \end{cases}$$

【例 8】 设 $f(x) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ x & ,x \geqslant 0 \end{cases}$, $g(x + 1) = x^2 + x + 1$,试求

$f(g(x)), g(f(x)), f(f(g(x))), f(g(f(x)))$.

解 按题目要求，先由 $g(x+1)$ 求 $g(x)$.

令 $x+1=u$，即 $x=u-1$，则

$$g(u)=(u-1)^2+(u-1)+1=u^2-u+1$$

所以 $$g(x)=x^2-x+1$$

由于对一切 x 有 $x^2-x+1>0$，所以，将 $f(x)=x(x>0)$ 中之 x 代以 $g(x)$ 的表达式，得 $f(g(x))=g(x)=x^2-x+1, -\infty<x<+\infty$

将 $g(x)$ 表达式中之 x 代以 $f(x)$ 的表示式，得

$$g(f(x))=\begin{cases}1 & ,x<0\\ x^2-x+1 & ,x\geqslant 0\end{cases}$$

由于对一切 x，有 $x^2-x+1>0$，所以，将 $f(x)=x, x>0$ 中之 x 代以 $f(g(x))$ 的表达式，得

$$f(f(g(x)))=f(x^2-x+1)=x^2-x+1, -\infty<x<+\infty$$

将 $f(x)$ 表达式中之 x 代以 $g(f(x))$ 的表示式，得

$$f(g(f(x)))=\begin{cases}1 & ,x<0\\ x^2-x+1 & ,x\geqslant 0\end{cases}$$

【例 9】 设函数 $f(x)$ 对一切正值都满足方程 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 试推证下列各式：

(1) $f(1)=0$ (2) $f(\frac{1}{x})=-f(x)$

(3) $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$ (4) $f(\sqrt[n]{x})=\frac{1}{n}f(x)$

证 (1) 在已知等式中，令 $x=1, y=1$，得

$f(1)=f(1)+f(1)$，由此，$f(1)=0$

(2) 在已知等式中，x 不变，y 换以 $\frac{1}{x}$，得

$f(1)=f(x)+f(\frac{1}{x})$，即 $f(\frac{1}{x})=-f(x)$

(3) 在已知等式中，x 不变，y 换以 $\frac{1}{y}$，得 $f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$，由(2)

$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$

(4) 在(3) 的等式中，x 不变，y 换以 $x^{\frac{1}{2}}$，得

$f(x\cdot x^{-\frac{1}{2}})=f(x)-f(x^{\frac{1}{2}})$， 即 $f(\sqrt{x})=\frac{1}{2}f(x)$.

在(3)的等式中,x 不变,y 换以 $x^{\frac{2}{3}}$,得

$$f(x \cdot x^{-\frac{2}{3}}) = f(x) - f(x^{\frac{2}{3}})$$

由 $f(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}f(x)$,可得 $f((\sqrt[3]{x})^2) = 2f(\sqrt[3]{x})$

于是 $$f(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3}f(x)$$

依此类推,可得 $f(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}f(x)$.

二　求已知函数的反函数

1. 反函数定义

已知函数 $y = f(x)$,$x \in D$,若其值域为 Z,它的反函数记作

$$x = f^{-1}(y), y \in Z$$

习惯上,函数 $y = f(x)$ 的反函数记作 $y = f^{-1}(x)$,$x \in Z$.

实际上,$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 互为反函数.

(1)　反函数的图形　在同一直角坐标系下,函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图形是同一条曲线;而 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

(2)　当函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 与值域 Z 之间按照对应法则 f 有一一对应关系(或 $f(x)$ 为单调函数)时,则其有反函数.

2. 求反函数的程序

首先,由已知函数式 $y = f(x)$ 解出 x,得到关系式 $x = f^{-1}(y)$;

其次,将字母 x 与 y 互换,便得到所求的反函数 $y = f^{-1}(x)$.

3. 求函数的值域

函数 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{(-1)}(y)$ 的定义域就是 $y = f(x)$ 的值域.

【例10】　设 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 互为反函数,则关系式成立的是(　　).

(A)　$x = f^{-1}(f(x))$　　　(B)　$y = f^{-1}(f(x))$

(C)　$x = f(f^{-1}(y))$　　　(D)　$y = f(f^{-1}(y))$

解　将 $f(x) = y$ 代入(A)中,有 $x = f^{-1}(y)$.将 $f^{-1}(y) = x$ 代入(D)中有 $y = f(x)$.故选(A),(D).

【例 11】　已知函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图形对称于直线 $y = x$,且 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,则 $g(x) =$ ________.

解　依题设知,这是求 $f(x)$ 的反函数.设 $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

由此式解出 x

得　　$ye^{2x}+y=e^{2x}-1$　或　$e^{2x}=\dfrac{1+y}{1-y}$,　$x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y}$

于是　　$g(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

【例 12】　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & ,-2<x<1\\ x^2 & ,\ 1\leqslant x\leqslant 2\\ 2^x & ,\ 2<x\leqslant 4\end{cases}$,求 $f^{-1}(x)$.

解　求分段函数的反函数,只要分别求出各区间段相对应函数表达式的反函数的表达式及其自变量的取值范围即可.

由 $y=\dfrac{x}{2},-2<x<1$,得　　$x=2y$,　$-1<y<\dfrac{1}{2}$

由 $y=x^2$,　$1\leqslant x\leqslant 2$,得　　$x=\sqrt{y}$,　$1\leqslant y\leqslant 4$

由 $y=2^x$,　$2<x\leqslant 4$,得　　$x=\log_2 y$,　$4<y\leqslant 16$

将以上所得各式字母 x 与 y 互换,得所求的反函数

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}2x & ,-1<x<\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{x} & ,\ 1\leqslant x\leqslant 4\\ \log_2 x & ,\ 4<x\leqslant 16\end{cases}$$

【例 13】　设 $f(x)=\dfrac{4x}{x-1}$,求 $f^{-1}(3)$.

分析　由例 10 知,$x=f^{-1}(f(x))$.由此式知,当 $f(x)=3$ 时所对应的 x 即为所求.

解　将 3 代入已知式 $f(x)=\dfrac{4x}{x-1}$ 的左端,所求 x 的值即为 $f^{-1}(3)$.于是

$$3=\frac{4x}{x-1}\quad 得\ x=-3,\quad 即\ f^{-1}(3)=-3.$$

【例 14】　已知 $f^{-1}(\log_a x)=x^2+1$,求 $f(x)$.

解　先求 $f^{-1}(x)$,再求 $f(x)$.

设 $u=\log_a x$,则 $x=a^u$,于是 $f^{-1}(u)=a^{2u}+1$,$f^{-1}(x)=a^{2x}+1$.

设 $y=a^{2x}+1$,求其反函数,得

$$x=\frac{1}{2}\log_a(y-1),\quad 即\ f(x)=\frac{1}{2}\log_a(x-1).$$

【例 15】 求函数 $y=\sqrt{x-x^2}$ 的值域.

分析 对函数 $y=f(x),x\in D$,若其反函数存在,其值域就是它的反函数的定义域.因此,求函数值域的一般方珐是,先求已知函数的反函数,再求这反函数的定义域.

解 由 $y=\sqrt{x-x^2}$,得 $y^2=x-x^2$,由此,有

$$x^2-x+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-y^2\text{或}(x-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}-y^2$$

于是 $$x=\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}+\frac{1}{2}\qquad x=-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}+\frac{1}{2}$$

对已知函数 $y=\sqrt{x-x^2}$,由 $x-x^2\geqslant 0$ 知 $0\leqslant x\leqslant 1$,因此,$x=-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}+\frac{1}{2}$ 是在区间 $[0,\frac{1}{2}]$ 反函数.$x=\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}+\frac{1}{2}$ 是在区间 $[\frac{1}{2},1]$ 反函数.由 $\frac{1}{4}-y^2\geqslant 0$,得 $|y|\leqslant\frac{1}{2}$.

注意到 y 只取非负值,故原函数的值域为 $[0,\frac{1}{2}]$.

【例 16】 已知 $f_1(x)=\frac{2x-1}{x+1}$,对于 $n=1,2,3,\cdots$,定义 $f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$;若 $f_{35}(x)=f_5(x)$,求 $f_{28}(x)$.

分析 由题设可知,应利用 $f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$ 由 $f_{35}(x)=f_5(x)$ 推出 $f_{28}(x)$.易想到,由 $f_{35}(x)$ 推出 $f_{34}(x)$、$f_{33}(x)$,$\cdots$,最后推出 $f_{28}(x)$.这当然要用到 $f_1(x)$.

注意到 $f^{-1}(f(x))=x$,便有 $f_1^{-1}(f_{n+1}(x))=f_1^{-1}(f_1(f_n(x)))=f_n(x)$ 对 $f_{35}(x)=f_5(x)$ 运用上式,可得 $f_{34}(x)=f_4(x)$.继续下去,便可推出 $f_{28}(x)$.

解 对 $f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$,有

$$f_1^{-1}(f_{n+1}(x))=f_1^{-1}(f_1(f_n(x)))=f_n(x)$$

对 $f_{35}(x)=f_5(x)$ 两边运用上式,有

$$f_1^{-1}(f_{35}(x))=f_1^{-1}(f_1(f_{34}(x)))=f_{34}(x)$$
$$f_1^{-1}(f_5(x))=f_1^{-1}(f_1(f_4(x)))=f_4(x)$$

由此得 $f_{34}(x)=f_4(x)$ 连续运用上式,有

$$f_{31}(x)=f_1(x),f_{30}(x)=f_1^{-1}(f(x))=x$$
$$f_{29}(x)=f_1^{-1}(x),f_{28}(x)=f_1^{-1}(f_1^{-1}(x))$$