普通高等教育“十二五”重点规划教材

国家工科数学教学基地　国家级精品课程使用教材

Nucleus

新核心

理工基础教材

高等数学

（上册）

第三版

上海交通大学数学系　组编

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”重点规划教材

国家工科数学教学基地　国家级精品课程使用教材

Nucleus 新核心

理工基础教材

高等数学

（上册）

第三版

上海交通大学数学系　组编

上海交通大學出版社

内容提要

上海交通大学是全国工科数学教学基地，本教材专为少学时本科编写，分上、下两册. 上册(六章)包括：函数，极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，积分学，微分方程. 下册(四章)包括：向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数.

本书特点是结合实际，由浅入深，推理简明，便于自学；每章后附有适量的习题，书末附有习题答案.

本书可作高等院校的工业、农业、林业、医学、经济管理等专业及成人、高职教育各非数学专业的教材或教学参考书，也可供自学读者及有关科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/ 上海交通大学数学系组编. —3版. —上海：上海交通大学出版社，2013
ISBN 978-7-313-10442-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①上… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 305538 号

高等数学(上册)
(第三版)

组　　编：上海交通大学数学系
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：韩建民
印　　制：昆山市亭林印刷有限责任公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×960 mm　1/16　　印　　张：15.5
字　　数：289 千字
版　　次：2001 年 8 月第 1 版　2013 年 12 月第 3 版　　印　　次：2013 年 12 月第 11 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-10442-7/O
定　　价：26.00 元

第 三 版 前 言

本教材是2001年第一版《高等数学》(上下册)的第三版,前两版《高等数学》(上下册)经过多年课堂教学实践,收到了不错的效果,也得到了广大读者的肯定.随着时间的推移、科技的进步,对教学和教材也提出了更高的要求.为了与时俱进,更好地适合教学的改革,提高教学的质量,我们对第二版《高等数学》(上下册)进行了修订.

由于教材的主要读者对象是高等院校非数学专业少学时类型及成人教育各专业,我们广泛听取了授课教师与上课学生的意见,在原教材基础上删除了一些要求较高的内容,对一些章节的次序也重新作了调整,特别在各章节增补了一些易于理解和难度适中的例题和习题,使学生在学习中更易循序渐进地理解、消化和掌握所学内容.

我们真诚地希望《高等数学》(上下册)的再版能给读者在学习上提供更好的帮助,也给高等数学教学适应时代发展带去裨益.

编　者

于上海交通大学

2013年8月

前　　言

21 世纪是科学技术迅速发展的时期，高等教育的教学改革也正朝着扩大办学规模、提高办学效益与质量的目标而不断深入. 本教材是编者在结合多年课堂教学实践的基础上，根据学校教育发展多层次、多标准要求而编写的.

本教材在编写过程中尽量从实际问题引入数学概念. 在叙述基本理论、基本概念时不失严密性，力求通俗易懂、由浅入深；在内容选取上，除保证必要的系统性外，尽量注意针对性与应用性，并注意加强处理实际问题的基本知识与基本方法；在例题与习题的配置上，紧密结合相关内容，难度适中，以利于读者对基本内容的理解、消化与吸收，并适量配置了部分经济管理方面应用的例题与习题.

本教材分为上、下两册. 上册内容为一元函数微积分与微分方程；下册为多元函数微积分与无穷级数. 上册约需 90 学时，下册约需 54 学时. 由于各学科的需求不一，对本教材中加 * 号的内容可根据具体情况取舍.

本教材可作高等院校全日制非数学类各专业（工科类、经济管理类、农科类等）及成人教育各专业学生的教材或教学参考书；也可供自学读者和有关科技工作者参考.

本教材上册第 1～2 章由郑麒海副教授撰写，第 3～4 章由钱芝蓁副教授撰写，第 5～6 章由汪静副教授撰写. 本教材下册第 7～8 章由郑麒海副教授撰写，第 9 章由汪静副教授撰写，第 10 章由钱芝蓁副教授撰写. 孙薇荣教授仔细审阅了本教材全稿，提出了宝贵的意见并始终给予指导，在此，编者深表感谢.

限于编者的水平与经验，本教材存在的不当之处恳请读者指正.

编　者

2001 年 4 月

目　　录

1　函数 …… 1

1.1　预备知识 …… 1
1.2　函数概念 …… 2
1.3　函数的简单性态 …… 5
1.4　反函数 …… 7
1.5　复合函数 …… 8
1.6　初等函数 …… 9
1.6.1　基本初等函数 …… 9
1.6.2　初等函数 …… 13
1.7　函数关系的建立 …… 13
习题 1 …… 14

2　极限与连续 …… 18

2.1　数列极限 …… 18
2.1.1　数列 …… 18
2.1.2　等差数列与等比数列 …… 18
2.1.3　数列极限 …… 19
2.1.4　收敛数列的性质 …… 21
2.2　函数的极限 …… 22
2.2.1　函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限 …… 22
2.2.2　函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限 …… 23
2.2.3　函数极限的性质 …… 25
2.2.4　函数极限与数列极限的关系 …… 25
2.3　无穷小量与无穷大量 …… 26
2.3.1　无穷小量 …… 26
2.3.2　无穷大量 …… 27
2.3.3　无穷小与无穷大的关系 …… 28
2.4　极限的运算法则 …… 28

2.5 函数极限存在准则 两个重要极限 …… 31
2.5.1 极限存在准则 1——单调有界数列必有极限 …… 31
2.5.2 极限存在准则 2——夹逼定理 …… 32
2.5.3 重要极限之一：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ …… 33
2.5.4 重要极限之二：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ …… 35
2.5.5 无穷小的比较 …… 36
2.6 函数的连续性 …… 38
2.6.1 函数连续的定义 …… 38
2.6.2 函数的间断点及其分类 …… 39
2.6.3 初等函数的连续性 …… 40
2.6.4 闭区间上连续函数的性质 …… 41
习题 2 …… 42

3 导数与微分 …… 49

3.1 导数的概念 …… 49
3.1.1 导数的定义 …… 49
3.1.2 可导与连续的关系 …… 52
3.1.3 导数的几何意义 …… 55
3.1.4 导函数 …… 56
3.2 求导法则 …… 58
3.2.1 导数的四则运算 …… 58
3.2.2 复合函数的求导法则 …… 61
3.2.3 隐函数求导法 …… 64
3.3 高阶导数 …… 67
3.4 微分及其应用 …… 70
3.4.1 微分的定义 …… 70
3.4.2 微分的几何意义 …… 71
3.4.3 微分的运算 …… 72
3.4.4 微分的应用 …… 73
习题 3 …… 74

4 中值定理与导数的应用 …… 82

4.1 中值定理 …… 82

4.1.1　罗尔中值定理 …… 82
4.1.2　拉格朗日中值定理 …… 84
4.1.3　柯西中值定理 …… 87
4.2　未定式的定值法——罗必塔法则 …… 88
4.2.1　未定式$\frac{0}{0}$的定值法 …… 88
4.2.2　未定式$\frac{\infty}{\infty}$的定值法 …… 91
4.2.3　其他未定式的定值法 …… 93
4.3　函数的单调性、极值与最值 …… 97
4.3.1　函数的单调性 …… 97
4.3.2　函数的极值 …… 98
4.3.3　极值的应用问题——最值 …… 100
4.4　曲线的凸性与拐点 …… 103
4.5　函数图形的描绘 …… 105
4.5.1　曲线的渐近线 …… 105
4.5.2　函数图形的描绘 …… 106
习题 4 …… 109

5　积分学 …… 114

5.1　不定积分概念 …… 114
5.1.1　原函数与不定积分 …… 114
5.1.2　不定积分的性质及基本积分表 …… 115
5.2　不定积分的计算 …… 118
5.2.1　第一类换元法 …… 118
5.2.2　第二类换元法 …… 121
5.2.3　分部积分法 …… 123
5.3　几种特殊类型函数的积分 …… 125
5.3.1　有理函数的积分 …… 126
5.3.2　三角函数有理式的积分 …… 128
5.3.3　简单无理函数的积分 …… 131
5.4　定积分概念 …… 132
5.4.1　引例 …… 132
5.4.2　定积分的定义 …… 133

5.4.3 定积分的几何意义 …… 135
5.5 定积分的基本性质 …… 135
5.6 微积分基本定理 …… 138
5.6.1 变上限函数 …… 138
5.6.2 微积分的基本定理 …… 140
5.7 定积分计算 …… 142
5.7.1 换元法 …… 142
5.7.2 分部积分法 …… 145
5.8 广义积分 …… 148
5.8.1 无穷区间上的广义积分 …… 148
5.8.2 无界函数的广义积分 …… 150
5.9 定积分的应用 …… 151
5.9.1 元素法 …… 151
5.9.2 平面图形的面积 …… 152
5.9.3 立体的体积 …… 155
5.9.4 平面曲线的弧长 …… 157
5.9.5 定积分在物理上的应用 …… 158
5.9.6 函数的平均值 …… 160
习题 5 …… 161

6 微分方程 …… 172

6.1 微分方程的基本概念 …… 172
6.2 一阶微分方程 …… 173
6.2.1 变量可分离方程 …… 174
6.2.2 齐次微分方程 …… 176
6.2.3 一阶线性方程 …… 177
6.3 特殊高阶微分方程 …… 180
6.3.1 $y''=f(x)$型 …… 180
6.3.2 $y''=f(x,y')$型 …… 181
6.3.3 $y''=f(y,y')$型 …… 182
6.4 线性微分方程解的结构 …… 183
6.4.1 二阶线性齐次方程解的结构 …… 183
6.4.2 二阶线性非齐次方程解的结构 …… 184
6.5 常系数线性微分方程的解法 …… 185

6.5.1 二阶常系数线性齐次方程的解法 …… 185
6.5.2 二阶常系数线性非齐次方程的解法 …… 187
6.6 微分方程应用举例 …… 192
习题 6 …… 197

附录　积分表 …… 202

习题答案 …… 212

1 函　　数

高等数学是一门研究变量与变量的关系——函数的学科.在初等数学中,对函数的概念、性质、图形已作了详细的叙述,本章只是对函数的主要内容作些复习和小结.

1.1 预备知识

1) 区间

设$\mathbb{R}$是实数集,$a,b\in\mathbb{R}$,且$a<b$,称

数集$\{x|a<x<b\}$是以a,b为端点的开区间,记为(a,b).

数集$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$是以$a,b$为端点的闭区间,记为$[a,b]$.

数集$\{x|a<x\leqslant b\}$和数集$\{x|a\leqslant x<b\}$是以a,b为端点的左开右闭和左闭右开区间,分别记为$(a,b]$和$[a,b)$.

上述四种区间都是有限区间.

数集$\{x|x>a\}$,$\{x|x\geqslant a\}$,$\{x|x<b\}$,$\{x|x\leqslant b\}$及$\{x|x\in\mathbb{R}\}$为无穷区间,分别记为$(a,+\infty)$,$[a,+\infty)$,$(-\infty,b)$,$(-\infty,b]$及$(-\infty,+\infty)$.

2) 邻域

设$a\in\mathbb{R}$,δ为正实数,称开区间$(a-\delta,a+\delta)$是a的δ邻域,简称a的邻域(见图1-1),记为$\bigcup(a,\delta)$,即$\bigcup(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$.

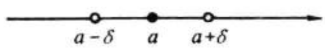

图1-1

称$\bigcup(a,\delta)-\{a\}$为a的δ去心邻域,记为$\mathring{\bigcup}(a,\delta)$,即$\mathring{\bigcup}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

3) 绝对值与绝对值不等式

数x到原点的距离称为x的绝对值,用$|x|$表示,即

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

绝对值有如下运算性质:

(1) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$,　　　(2) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$.

绝对值不等式:

(1) $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$.

证 $|x|<a \Leftrightarrow$ 当 $x \geqslant 0$ 有 $x<a$，当 $x<0$ 有 $-x<a$，即 $x>-a \Leftrightarrow -a<x<a$（见图 1-2）.

(2) $|x|>b \Leftrightarrow x>b$ 或者 $x<-b$.

证 $|x|>b \Leftrightarrow$ 当 $x \geqslant 0$ 时有 $x>b$，当 $x<0$ 时有 $-x>b$，即 $x<-b$，所以 $|x|>b \Leftrightarrow x>b$ 或者 $x<-b$（见图 1-3）.

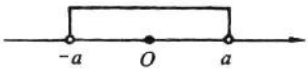

图 1-2

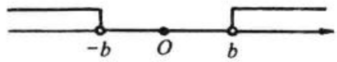

图 1-3

(3) $|x|-|y| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x|+|y|$.

证 因为 $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$，$-|y| \leqslant y \leqslant |y|$，相加得

$-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|$，由绝对值不等式(1)可得

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|.$$

又 $|x|=|x+y+(-y)| \leqslant |x+y|+|y|$，移项得

$$|x|-|y| \leqslant |x+y|,$$

故

$$|x|-|y| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|.$$

读者可自行证明 $|x|-|y| \leqslant |x-y| \leqslant |x|+|y|$.

绝对值不等式(3)通常被称为二边之和大于第三边，二边之差小于第三边.

(4) $||x|-|y|| \leqslant |x-y|$.

证 由绝对值不等式(3)有 $|x-y| \geqslant |x|-|y|$，

及 $|x-y| \geqslant |y|-|x|=-(|x|-|y|)$，即 $|x|-|y| \geqslant -|x-y|$，

由绝对值不等式(1)得 $||x|-|y|| \leqslant |x-y|$.

1.2 函数概念

定义 1.1 设 D 是实数 $\mathbb{R}$ 的非空子集，对 D 内每一个 x，根据一确定的法则 f，有唯一的实数 y 与之对应，则称 f 是一个函数，记为 $y=f(x)$，$x \in D$. 其中 x 是函数的自变量，y 是函数的因变量；D 是函数 f 的定义域，函数 f 的定义域通常也记为 $D(f)$. 数集 $\{y \mid y=f(x), x \in D(f)\}$ 为函数 f 的值域，记为 $Z(f)$.

需要指出的是：(1)这里 f 是函数，而 $f(x)$ 是函数 f 在 x 处的函数值；(2)当一个函数没有指出自变量 x 的范围时，该函数的定义域是使该函数有意义的点的全体，即该函数的自然定义域.

函数定义的精髓是"确定的对应法则及函数的定义域",即函数的两大要素.至于自变量和因变量各用什么字母是不重要的.如函数$y=f(x)$,$x\in D$;$u=f(t)$,$t\in D$的对应法则相同,都是f,且定义域都是D.因而这两个函数相同,可看作是同一个函数.而函数$y=\frac{x}{x}$和$g=1$,前者的定义域为$x\neq 0$,后者的定义域为一切实数,由于定义域不同,这两个函数是不相同的.

不同的法则可用不同的记号表示,例如$y=f(x)$或$y=g(x)$等.有时也用$y=y(x)$来表示y是x的函数.

根据函数定义,$y=\begin{cases}x+1, x\geqslant 0\\ x-1, x<0\end{cases}$是一个函数,其定义域为$(-\infty,+\infty)$.取定$(-\infty,+\infty)$内$x$后,有唯一的$y$值与它对应,只是在$(-\infty,0)$和$[0,+\infty)$内用两个解析式表示.这种表达形式的函数称为分段函数.注意:分段函数是一个函数,不能因为用了两个解析式而认为是两个函数.下面是两个常见的分段函数.

例 1.1 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

如图 1-4 所示.

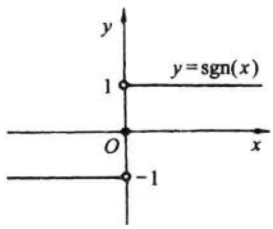

图 1-4

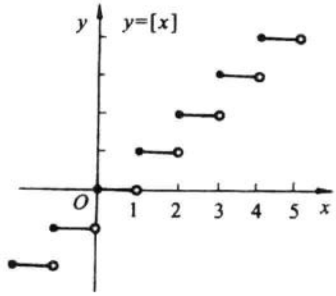

图 1-5

例 1.2 取整函数$y=[x]$,即对任意实数x,对应的y是不超过x的最大整数,如$[1.5]=1$;$[-1.5]=-2$;$[0.3]=0$.如图 1-5 所示.

下面再举求函数定义域和函数值的例子.

例 1.3 求函数$y=\sqrt{3x+2}+\arcsin\frac{x-1}{2}$的定义域.

解 由于二次根式的被开方数不能为负数,所以$3x+2\geqslant 0$,得$x\in\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$;

由反正弦函数的定义域知$-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant 1$,得$-2\leqslant x-1\leqslant 2$,即$x\in[-1,3]$,所以函数$y=\sqrt{3x+2}+\arcsin\frac{x-1}{2}$的定义域为$D(f)=\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)\cap[-1,3]=\left[-\frac{2}{3},3\right]$.

例 1.4 设函数$y=f(x)$的定义域为$[0,1]$,求函数:(1) $f(\sin x)$;(2) $f(x+a)-f(x-a)\ (a>0)$的定义域.

解 (1) $0\leqslant\sin x\leqslant 1$, $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$,$k$为整数.

(2) 由$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\a\leqslant x\leqslant 1+a,\end{cases}$ 可得 $a\leqslant x\leqslant 1-a$,

这里必须$1-a\geqslant a$,即$a\leqslant\frac{1}{2}$.所以

当$a<\frac{1}{2}$时,函数的定义域为$[a,1-a]$;

当$a=\frac{1}{2}$时,函数的定义域为$\left\{\frac{1}{2}\right\}$;

当$a>\frac{1}{2}$时,函数的定义域为$\varnothing$.

例 1.5 设分段函数$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & 0<|x|\leqslant\frac{2}{\pi},\\|x|, & |x|>\frac{2}{\pi}.\end{cases}$

求函数值$f\left(\frac{2}{\pi}\right)$,$f(-2)$.

解 当$x=\frac{2}{\pi}$时,$|x|=\frac{2}{\pi}$,

$$f\left(\frac{2}{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\sin\frac{1}{\frac{2}{\pi}}=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\pi};$$

当$x=-2$时,$|x|=2>\frac{2}{\pi}$,$f(-2)=|-2|=2$.

例 1.6 写出函数$f(x)=|2x+1|+|x-2|$的分段表示式.

解 由绝对值的定义:当$x<-\frac{1}{2}$,$|2x+1|=-(2x+1)$,当$x\geqslant-\frac{1}{2}$,$|2x+1|=2x+1$;当$x<2$,$|x-2|=2-x$,当$x\geqslant 2$,$|x-2|=x-2$;所以

$$f(x)=\begin{cases}1-3x, & x<-\frac{1}{2},\\x+3, & -\frac{1}{2}\leqslant x<2,\\3x-1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

1.3 函数的简单性态

1）单调性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D(f)$. 若对 $\forall x_1, x_2\in D(f)$，当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$，称函数 f 在 $D(f)$ 上为严格单调增函数；当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)>f(x_2)$，称函数 f 在 $D(f)$ 上为严格单调减函数. 严格单调增函数和严格单调减函数统称为严格单调函数.

当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，称函数 f 为单调增函数；当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)\geqslant f(x_2)$，称函数 f 为单调减函数. 单调增函数和单调减函数统称为单调函数.

显然，严格单调函数必然是单调函数.

此外，我们可以讨论函数在其定义域子集上的单调性. 例如函数 $y=x^2$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数，但其在 $(-\infty,0)$ 上是单调减函数，在 $(0,+\infty)$ 上是单调增函数，即函数 $y=x^2$ 是分段单调函数.

例 1.7 证明函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为严格单调增函数.

证 设 $\forall x_1, x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\\&=(x_1-x_2)\left[\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2\right]<0,\end{aligned}$$

得

$$f(x_1)<f(x_2).$$

所以 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为严格单调增函数.

2）有界性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D(f)$. 若存在正数 M，使得对 $\forall x\in D\subseteq D(f)$，有 $|f(x)|\leqslant M$，称函数 f 在 D 上有界. 若 f 在其定义域 $D(f)$ 上有界，则称函数 f 是有界函数.

若函数 f 在 D 上不是有界，则称 f 在 D 上为无界；也就是说，对 $\forall M>0$，总有一点 $x_0\in D$，有 $|f(x_0)|>M$.

例如函数 $y=\dfrac{1}{x}$，当 $\forall x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|<2$，故函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有界. 而 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内，不论对怎样大的正数 M，总存在 $x_0=\dfrac{1}{M+1}\in(0,1)$，有 $\left|\dfrac{1}{x_0}\right|=M+1>M$，故 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

函数 $y=\sin x$，因为对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$|\sin x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为有界函数.

函数 $y=f(x)$ 在 D 上有界，也可用如下的说法：

若存在常数 A，B，对 $\forall x\in D$，有 $A<f(x)<B$，则函数 f 在 D 上有界. 其中：A 称为函数 f 在 D 上的下界；B 称为函数 f 在 D 上的上界.

函数在 D 上的上、下界不是唯一的，显然任一个比 A 小的实数都能是 f 在 D 上的下界，而任一个比 B 大的实数也都能是 f 在 D 上的上界.

3）奇偶性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D(f)$，其中 $D(f)$ 关于原点对称. 若对 $\forall x\in D(f)$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 f 为偶函数；若对 $\forall x\in D(f)$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 f 为奇函数. 偶函数的图形对称于 y 轴，如图1-6所示；奇函数的图形对称于坐标原点，如图 1-7 所示. 例如：函数 $\sin x$ 和 x^{2n+1} 都是奇函数；函数 $\cos x$ 和 x^{2n} 都是偶函数.

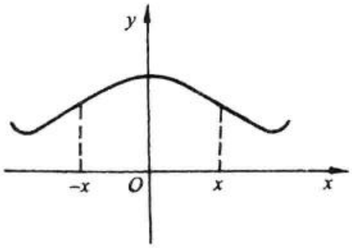

图 1-6

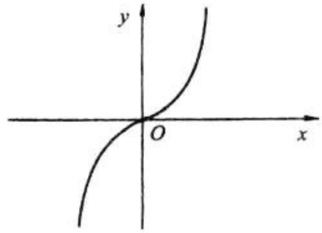

图 1-7

例 1.8 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　　(2) $f(x)=x\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$；

(3) $f(x)=xe^x$.

解 (1) 因为

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$$
$$=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x),$$

所以函数 $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

(2) 因为 $f(-x)=-x\dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}=-x\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

$$=x\frac{e^x+1}{e^x-1}=f(x),$$

所以函数 $x\frac{e^x+1}{e^x-1}$为偶函数.

(3) 因为 $f(-x)=-xe^{-x}=-\frac{x}{e^x}$,显然 $f(-x)\neq f(x)$且 $f(-x)\neq -f(x)$,所以函数 xe^x 为非奇非偶函数.

4) 周期性

设函数 $y=f(x)$,若存在非零正常数 T,使得对 $\forall x\in D(f)$,有 $x+T\in D(f)$,且$f(x\pm T)=f(x)$,则称 f 为周期函数,T 为函数的一个周期.

由定义可知,若 T 是 f 的周期,则 kT(k 为整数)也是 f 的周期,而通常所指的周期是最小的正周期. 例如:$\sin x$ 和 $\cos x$ 是周期函数,它们的周期是 2π;$\tan x$ 和 $\cot x$ 也是周期函数,它们的周期是 π.

例 1.9 求以下函数的周期:(1) $y=\sin\omega x\,(\omega>0)$;(2) $y=\tan px\,(p>0)$;(3) $y=\tan\frac{x}{4}+\sin 2x$.

解 (1) 因为 $\sin x$ 的周期是 2π,所以

$$f(x)=\sin\omega x=\sin(\omega x+2\pi)=\sin\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)=f\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right),$$

即函数 $y=\sin\omega x$ 的周期为$\frac{2\pi}{\omega}$.

(2) 因为 $\tan x$ 的周期是 π,所以

$$f(x)=\tan px=\tan(px+\pi)=\tan p\left(x+\frac{\pi}{p}\right)=f\left(x+\frac{\pi}{p}\right),$$

即函数 $y=\tan px$ 的周期为$\frac{\pi}{p}$.

(3) 由(1)和(2)可知函数 $\tan\frac{x}{4}$的周期 $T_1=4\pi$,函数 $\sin 2x$ 的周期 $T_2=\pi$. T_1 和 T_2 的最小公倍数为 4π,所以函数 $y=\tan\frac{x}{4}+\sin 2x$ 的周期为 4π.

1.4 反　函　数

定义 1.2 **设函数** $y=f(x)$,**其定义域为** $D(f)$,**值域为** $Z(f)$. **若对** $\forall y\in Z(f)$,**根据对应法则** f,**存在唯一的** $x\in D(f)$,**使** $f(x)=y$,**那么变量** x **是变量** y **的函数,记为** $x=f^{-1}(y)$,**称其为函数** $y=f(x)$**的反函数.**

由以上定义可知:$f(f^{-1}(y))=y$ 及 $f^{-1}(f(x))=x$.

习惯上总以 x 作为自变量,y 作为因变量,故通常用 $y=f^{-1}(x)$来表示函数