

中国地震局地震研究所科技发展基金资助

振动理论基础

曾心传 姚运生 编著

地震出版社

014035314

032
22

中国地震局地震研究所科技发展基金资助

振动理论基础

曾心传 姚运生 编著



地震出版社



032
22

图书在版编目 (CIP) 数据

振动理论基础/曾心传, 姚运生编著. —北京: 地震出版社, 2013. 12
ISBN 978-7-5028-4345-8

I. ①振… II. ①曾… ②姚… III. ①振动理论 IV. ①032

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 227265 号

地震版 XM3136

振动理论基础

曾心传 姚运生 编著

责任编辑: 董青

责任校对: 庞亚萍

出版发行: 地震出版社

北京民族学院南路 9 号

发行部: 68423031 68467993

门市部: 68467991

总编室: 68462709 68423029

<http://www.dzpress.com.cn>

邮编: 100081

传真: 88421706

传真: 68467991

传真: 68455221

经销: 全国各地新华书店

印刷: 北京地大天成印务有限公司

版(印)次: 2013 年 12 月第一版 2013 年 12 月第一次印刷

开本: 787 × 1092 1/16

字数: 576 千字

印张: 22.5

印数: 001 ~ 300

书号: ISBN 978-7-5028-4345-8/O (5034)

定价: 68.00 元

版权所有 翻印必究

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

序

振动是一种常见的运动形式，自然界和人类生产、生活中无处不在。振动理论是一种用统一的物理、力学观点和数学工具对这种现象进行描述，揭示其规律和本质，探求其对自然界和人类生产、生活影响的理论。振动理论有着广泛的应用，特别在地震科学以及地震工程领域中，更离不开振动理论。

地震科学和地震工程领域中的振动问题更有其独特性：从振动的对象来说，可以从大地因地质构造运动引起的地震振动到地表上工程建筑和基础设施的强烈受迫振动；从振动的复杂性来说，有质点的振动，杆件和杆系的振动，巨型的结构振动，乃至广袤无边的连续介质振动；从振动的性质来说，可以从弹性振动到弹塑性振动，线性振动到非线性振动，确定性的振动到具有不确定性的随机振动；从应用的范围来看，可以从解释地震发生的机制，地震波在介质中的传播规律，一直到引起地表的激烈振荡，进而造成土木工程和地基基础的大量破坏乃至倒塌以及探索工程建筑防震减灾的措施，等等，都离不开振动理论。因此，在地震科学以及地震工程科学中的振动理论已经形成一个相对独立的分支。但目前我们还很少见到一本专门应用于这个领域的振动理论著作，曾心传、姚运生的《振动理论基础》无疑能弥补这一不足。作为这一本特殊的《振动理论基础》还有如下的特点：

1. 振动可分为刚体振动和可变形物体（弹性体或弹塑性体）振动，由于研究对象的不同，研究方法亦有差异，在现有的振动理论书籍中对以上内容有所侧重，如前者侧重于单自由度和多自由度系统的振动，后者则侧重于杆件、杆件系统以及块状结构的振动，这已满足不了地震科学和地震工程科学对振动理论及其应用实际需求，本书将这两方面内容结合起来，在充分研究单自由度和多自由度振动形态的基础上自然延伸到杆件、杆件系统、连续体系统振动，从而形成较为完整的学科体系。

2. 为了能更好地反映振动理论的发展进程，本书在内容安排上充分注意博采众长，不拘一格地吸收名师、名著中的精华，填补通常教科书中难以见到的现代研究成果，书中关于非线性振动问题及利用格林函数、狄拉克 δ -函数和黑维赛阶梯函数求解振动问题的内容反映振动理论当前发展的新水平。

3. 本书作者长期在地震战线上从事地震工程和工程地震的研究，将振动理论和工程地震、地震工程中振动问题结合也是本书的一大特色。书中关于行波对土坝地震反应的影响以及弹性半空间有关的几个动力学问题等内容，既是作

者多年研究成果的总结，更体现出振动理论研究对地震工程和工程地震研究的重要意义。

本书结构简练，编排合理，内容丰富，叙述简洁，推演严谨、细致，结论扼要明确。对正在学习和研究地震科学以及地震工程科学的广大本科生、研究生来说是一本难得的好教材，对工作在这个领域的广大工程技术人员来说也是一本绝佳的参考书。

符礼立

2012年5月

前 言

自然界和现实生活中，振动无处不在，比如，打桩、动力机械基础、车辆行驶、机床运转、火山爆发、山坡崩塌、人工爆炸、天然地震……，均要产生振动（震动）。它们除了干扰我们的日常生活，比如，打桩、动力机械基础、车辆行驶、机床运转振动产生噪声污染外，火山爆发、山坡崩塌、人工爆炸，特别是地震，还可能产生灾难性的后果。另外，风的脉动压力，能使如超高层建筑、电视塔、烟囱、水塔、输电铁塔、大跨度桥梁等高耸大跨度结构产生较大的振动，严重时，可能造成倒塌；精密仪器的生产和使用，对环境噪声非常敏感。凡此种种，都需要对振动（震动）进行专门研究。

通常，关于振动理论的书籍内容往往侧重如下两个方面之一：其一是机械振动，包括动力机械基础振动，这方面的书籍多侧重于单自由度和多自由度系统的振动内容；其二是结构动力学，这方面的书籍则多侧重于杆件和杆系振动的内容。作者在给研究生讲课时发现，单纯讲授机械振动或结构动力学已经不能满足学生们的要求。因而，本书试图包容这二者，在充分研究单自由度和多自由度系统振动性态的基础上，自然延伸到对杆件、杆系和连续体的振动，以及随机振动的研究。同时，简略地介绍了诸如卸荷波在半无限土柱中的传播、行波对土坝地震反应的影响以及与弹性半空间有关的几个动力学问题。

本书作者之一多年前曾两次学习与振动理论有关的课程。第一次是在上大学时候，由业师杨金林教授讲授振动理论；第二次是在普林斯顿大学土木工程系（Department of Civil Engineering, Princeton University）进修学习的时候，由 Robert H. Scanlan 教授讲授高等振动理论（Advanced Theory of Vibration）。尽管两位老师讲课的风格不同，讲课的内容亦不尽一样，但他们那深入浅出的讲解，对概念的清晰剖析，给该作者留下了深刻印象。而两位老师的渊博学识，更使其受益匪浅。在关于振动理论的一般教科书中，通常欠缺非线性振动问题和利用格林（Green）函数、狄拉克（Dirac） δ -函数和黑维赛（Heaviside）阶梯函数求解振动问题的内容，为了弥补这一缺陷，本书第三章取材于杨金林教授的讲课材料，第四章和第五章第一节取材于 Robert H. Scanlan 教授的讲课材料，作

者们对它们进行整理，并汇集于本书中，以飨读者。为此，作者们对两位老师谨致以诚挚谢忱，并对两位老师表示深切的怀念。此外，本书中多处引用了钱培风教授专著《结构动力学》（第二版）的内容和图件，作者们同样对前辈学长钱培风教授表示衷心感谢。

本书难免存在缺点或错误，恳切地希望广大读者给予批评指正。

作者

2012年11月

目 录

第一章 单自由度系统的振动	1
第一节 无阻尼自由振动.....	1
第二节 阻尼自由振动.....	3
第三节 同方向振动的合成——拍现象.....	6
第四节 两个互相垂直的谐振动的合成.....	10
第五节 强迫振动.....	12
第六节 复频激振力和单位脉冲激振力.....	21
第七节 基础隔振原理简介.....	24
第八节 拾振器摆的工作原理.....	27
第二章 求解单自由度系统振动的相平面法	33
第一节 相平面.....	33
第二节 相图的做法.....	34
第三节 单自由度无阻尼振动的相图.....	35
第四节 单自由度阻尼振动的相图.....	38
第三章 非线性单自由度系统的振动	43
第一节 无阻尼自由振动.....	43
第二节 有阻尼自由振动.....	47
第三节 非线性微分方程的几个基本性质.....	50
第四节 非线性系统的受迫振动.....	57
第四章 格林函数、拉普拉斯变换及振动方程的解法	65
第一节 格林函数.....	65
第二节 拉普拉斯变换.....	71
第三节 狄拉克 δ -函数和黑维赛阶梯函数.....	78
第四节 利用格林函数和拉普拉斯变换求解振动方程.....	80
第五节 利用对单位函数反应的叠加求解振动方程.....	81
第五章 多自由度系统的振动	84
第一节 矩阵的基本知识.....	84
第二节 两个自由度弹性体系的自由振动.....	93
第三节 两个自由度弹性体系的强迫振动.....	101
第四节 多自由度弹性体系的振动.....	103
第五节 吸振理论基础.....	114
第六章 连续体的振动	122
第一节 等截面梁的自由振动.....	122
第二节 周期荷载下等截面梁的强迫振动.....	130
第三节 任意时间荷载下等截面梁的强迫振动.....	134
第四节 杆件的纵向振动.....	141

第五节	卸荷波在半无限土柱中的传播	149
第六节	在行波作用下土坝的地震反应	175
第七章	与弹性半空间有关的几个动力学问题	184
第一节	在垂直地面运动作用下土-结构动力相互作用:轴对称问题	184
第二节	在垂直地面运动作用下土-结构动力相互作用:平面问题	202
第三节	在摆动和移动耦联作用下结构物对水平周期运动的反应:平面问题	216
第四节	在土-结构-液体相互作用下贮液容器的动力反应	233
第五节	SH波作用下基础-土-基础的反平面动力相互作用	246
第六节	垂向周期力作用下柔性圆板与弹性半空间的相互作用	258
第七节	弹性半平面中埋藏力偶源所引起的表面位移	267
第八节	无限弹性介质中由运动裂缝所产生的位移场和应力场	280
第九节	饱水孔隙弹性空间中由瞬态源所产生的位移场和应力场	294
第八章	随机振动理论基础	308
第一节	随机过程概述	308
第二节	谱密度函数	312
第三节	单自由度系统的随机振动分析	317
第四节	等截面梁的随机振动分析	323
第五节	随机地震地面运动模型	330
第六节	土层对地震的随机反应分析	338
参考文献		350

第一章 单自由度系统的振动

第一节 无阻尼自由振动

如图 1.1 示, 令质量 m 从平衡位置移动了距离 x , 若弹簧的刚度系数为 k (弹簧常数), 则弹性恢复力为

$$S = -kx \quad (1.1)$$

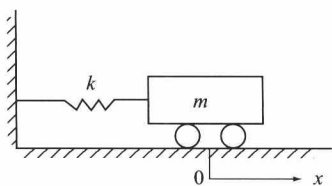


图 1.1

体系的惯性力为

$$I = -m\ddot{x} \quad (1.2)$$

力平衡方程为

$$S + I = 0 \quad (1.3)$$

把式 (1.1)、式 (1.2) 代入式 (1.3), 得

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.4)$$

或

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1.4')$$

式中

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.5)$$

由特征方程 $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ 得

$$\lambda = \pm i\omega$$

式 (1.4') 之解为

$$x = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \quad (1.6)$$

或

$$x = A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t \quad (1.6')$$

以 T 表示体系的自振周期, 即体系振动一周以后又恢复到原来状态所需的时间, 则有

$$\omega(t + T) - \omega t = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

称为频率，即单位时间振动次数，以赫兹（Hz）作单位。 $\omega = 2\pi f$ 称为圆频率或角频率，它表示 2π 秒振动的次数，单位为每秒弧度数。 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ 和 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 称为自振频率。

若以 δ 表示单位力所产生的位移（柔度系数），则

$$\delta = \frac{1}{k}, \quad k = \frac{1}{\delta}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta}} = \sqrt{\frac{g}{mg\delta}} = \sqrt{\frac{g}{Q\delta}} = \sqrt{\frac{g}{x_s}}$$

$$x_s = Q\delta$$

式中， $Q = mg$ 是质量 m 的重量， x_s 为静力位移，即在振动方向作用一个大小等于 Q 的力于质量 m 所产生的位移。

若 n 表示一分钟振动次数，则

$$n = 60f = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{x_s}} \approx \frac{300}{\sqrt{x_s}}$$

称为工程频率。

假定初始条件为

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0$$

则由式 (1.6') 得

$$A_1 = x_0, \quad A_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

式 (1.6') 变为

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (1.7)$$

令 $A_1 = A \sin \varphi$, $A_2 = A \cos \varphi$

式 (1.7) 变为

$$\begin{aligned} x &= A(\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t) \\ &= A \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (1.8)$$

式中， A 为振幅， $\omega t + \varphi$ 为相角或相位， φ 为初相角或初相位：

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \\ \tan \varphi &= \frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega x_0}{v_0} \end{aligned} \quad (1.9)$$

如图 1.2 所示，若自横轴正向按逆时针方向取一角度等于初始相角 φ ，得 OP ，以此为基始线，再按逆时针方向旋转角度 ωt ，得 OP' ，则 OP' 与横轴的交角即为相角 $\omega t + \varphi$ 。取矢量 \vec{OP} 的模 $|\vec{OP}|$ 等于振幅 A ，自 P' 点作横轴的垂线 $P'M'$ ，则

$$\begin{aligned} OM' &= OP' \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t + \varphi) \\ P'M' &= OP' \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

由式 (1.8) 得

$$\dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.10)$$

比较以上各式可得

$$OM' = \frac{\dot{x}}{\omega}, \quad M'P' = x$$

所以，如果以 x 为纵轴， $\frac{\dot{x}}{\omega}$ 为横轴，取一线段 $OP = A$ （振幅），且使 OP 与横轴相交成 φ 角，然后以 O 为圆心，使 OP 以等角速度 ω 按反时针方向旋转。设在 t 时刻转到 P' 点，则 P' 点在纵轴和横轴上的投影即为 x 和 $\frac{\dot{x}}{\omega}$ 之值，而 OP' 与横轴所夹之角即为相角。轴 x 和 $\frac{\dot{x}}{\omega}$ 所形成的平面称为相平面，图中之圆称为相轨迹（关于相平面和相轨迹将在后面详细叙述）。

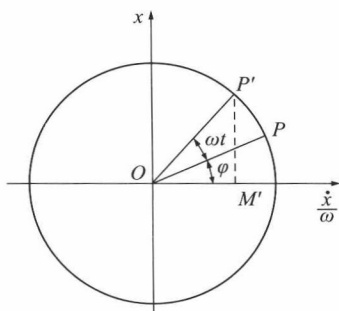


图 1.2

第二节 阻尼自由振动

在 1800 年，福格托（Voigt）对阻尼力作了如下假设：物体振动时将受到系统内部的粘滞阻尼力作用，此阻尼力与物体振动速度成正比，方向则与速度方向相反。如图 1.3 所示，设系统的阻尼系数为 c ，则其运动方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1.11)$$

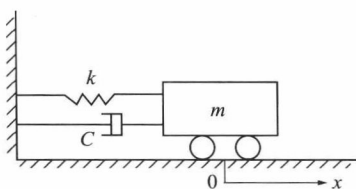


图 1.3

或

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1.11')$$

式中

$$2\varepsilon = \frac{c}{m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

式 (1.11') 的特征方程为

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + \omega^2 = 0$$

解之, 得

$$\lambda = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2} = -\varepsilon \pm i\omega_\varepsilon$$

从而得出式 (1.11') 的解为

$$\begin{aligned} x &= c_1 \exp(-\varepsilon + i\omega_\varepsilon)t + c_2 \exp(-\varepsilon - i\omega_\varepsilon)t \\ &= \exp(-\varepsilon t) (A_1 \cos\omega_\varepsilon t + A_2 \sin\omega_\varepsilon t) \end{aligned} \quad (1.12)$$

式中, $\omega_\varepsilon = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}$ 称为阻尼自振频率, ε 称为阻尼特性系数。

由初始条件

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0$$

可得

$$x = \exp(-\varepsilon t) \left(x_0 \cos\omega_\varepsilon t + \frac{v_0 + \varepsilon x_0}{\omega_\varepsilon} \sin\omega_\varepsilon t \right) \quad (1.13)$$

$T_\varepsilon = \frac{2\pi}{\omega_\varepsilon} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}}$ 称为有阻尼自振周期。

若令 $A_1 = A \sin\varphi$, $A_2 = A \cos\varphi$

则式 (1.12) 可以写为

$$x = A \exp(-\varepsilon t) \sin(\omega_\varepsilon t + \varphi) \quad (1.14)$$

由初始条件可得

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + \varepsilon x_0)^2}{\omega_\varepsilon^2}} \\ \tan\varphi &= \frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_\varepsilon x_0}{v_0 + \varepsilon x_0} \end{aligned}$$

从式 (1.14) 可见, 在阻尼振动情况下, 振幅 $A \exp(-\varepsilon t)$ 之值随时间增加而逐渐减小, 如图 1.4 示。图中实线表示实际的时间位移曲线, 虚线表示 $x = \exp(-\varepsilon t)$ 的变化曲线, 即振幅的包络线。

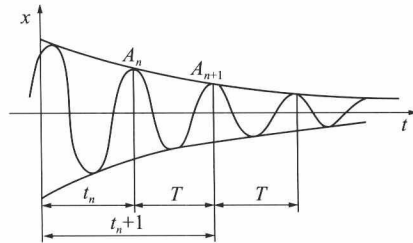


图 1.4

如以 A_n 表示在时刻 t_n 的振幅, A_{n+1} 表示经过一个周期 T 后的振幅, 则相应的时刻 t_{n+1} 为 $t_{n+1} = t_n + T$ 。由式 (1.14), 得

$$A_n = A \exp(-\varepsilon t_n), A_{n+1} = A \exp[-\varepsilon(t_n + T)]$$

从而得

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \exp(\varepsilon T) = \exp\left(\frac{2\pi\varepsilon}{\omega}\right) = \text{常数}$$

两端取对数, 并令 $\lambda = \varepsilon T$, 得

$$\lambda = \varepsilon T = \frac{2\pi\varepsilon}{\omega} = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} \quad (1.15)$$

λ 称为阻尼的对数递减量 (阻尼作用振幅的对数递减量)。由实测知道相邻二振幅及其周期 (或频率) 之后, 就可由式 (1.15) 得出系统的阻尼特性系数 ε 。

以上是以 $\varepsilon < \omega$ 的假定为基础导出的。若 $\varepsilon > \omega$, 则式 (1.11') 之解为

$$x = \exp(-\varepsilon t) (C_1 \cosh \omega_1 t + C_2 \sinh \omega_1 t) \quad (1.16)$$

式中

$$C_1 = y_0, C_2 = \frac{v_0 + \varepsilon x_0}{\omega_1}, \omega_1 = \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2}$$

从式 (1.16) 可见, 此时系统的运动由双曲线函数来描述, 是无周期的。即当体系离开它的静力平衡位置达到其极限位置后, 它将慢慢重新回到静力位置而不发生振动, 如图 1.5 示。

对于 $\varepsilon = \omega$ 的阻尼称为临界阻尼。 ε 与 ω 之间的四种关系相应的系统运动状态见图 1.5。在实用上, 常把阻尼写为如下几种形式

$$2\varepsilon = 2\zeta\omega, \varepsilon = \zeta\omega, \zeta = \frac{c}{2m\omega} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

可见, 当 $\varepsilon = \omega$, 即对应于临界阻尼时, 有 $\zeta = 1$, 即 $c_c = 2\sqrt{km}$ 。称 c_c 为临界阻尼系数, $\zeta = \frac{c}{c_c}$ 称为阻尼比, $Q = \frac{1}{2\zeta}$ 称为品质因子。

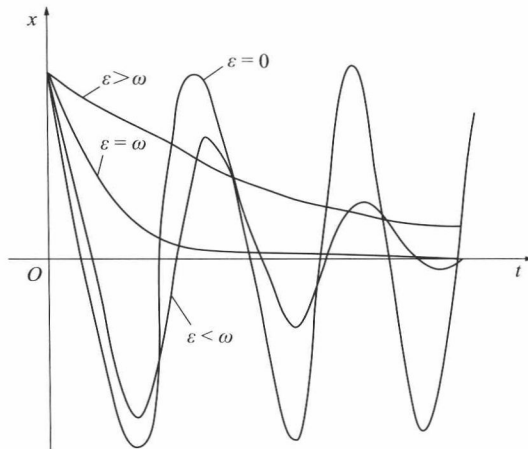


图 1.5

第三节 同方向振动的合成——拍现象

1. 两个同方向同频率振动的合成

设有两个同方向同频率的谐和振动如下：

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (1.17)$$

如图 1.6 所示, $OP_1 = A_1$ 及 $OP_2 = A_2$ 在 Ox 轴上的投影表示上式中 $t=0$ 时的 x_1 和 x_2 。如果 OP_1 和 OP_2 以等角速度 ω 绕 O 点作反时针旋转, 则它们与 Ox 轴的交角应为 $(\omega t_1 + \varphi_1)$ 和 $(\omega t_1 + \varphi_2)$, 故此时 OP_1 和 OP_2 在 Ox 轴上的投影即为 $t=t_1$ 时的 x_1 和 x_2 的值。因为 OP_1 ($=A_1$) 和 OP_2 ($=A_2$) 均以等角速度 ω 绕 O 点作反时针方向旋转, 所以 OP_1 和 OP_2 之间的夹角在任何时刻均保持不变, 即等于两个分振动的初相角之差 $(\varphi_2 - \varphi_1)$ 。合振动的振幅 A 为

$$A^2 = (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2)^2 + (A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2)^2 \quad (1.18)$$

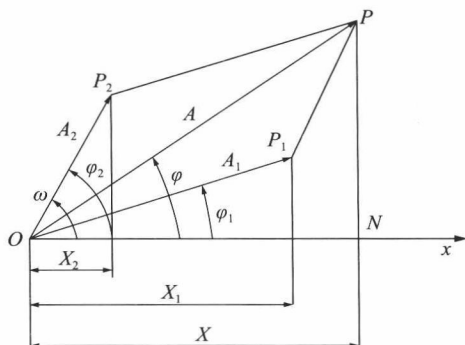


图 1.6

或

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (1.18')$$

合振动的初相位 φ 为

$$\tan\varphi = \frac{PN}{ON} = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \quad (1.19)$$

从式 (1.18') 和式 (1.19) 知, 合振动的振幅是一常数。合振动的振幅 $A(OP)$ 在横轴 Ox 上的投影即为合振动的位移 x , 所以, 合振动可以表示为

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.20)$$

从上式可见, 两个同方向同频率的谐和振动合成后, 仍是一个谐和振动, 其频率与两个分振动的频率完全相同。

两种特殊情形如下:

$$1) \varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2k\pi \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

从式 (1.18') 得

$$A = A_1 + A_2$$

显然, 这时合振动振幅 A 取得最大值。

$$2) \varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2k+1)\pi$$

从式 (1.18') 得

$$A = |A_1 - A_2|$$

显然, 这时合振动振幅 A 取得最小值。若 $A_1 = A_2$, 此时 $A = 0$ 。

3) 对于一般情形, 有

$$|A_1 - A_2| < A < |A_1 + A_2|$$

按照相同方法, 若干个同方向同频率的谐和分振动之合振动, 仍是一个谐和振动, 其振幅和初相角为

$$A^2 = \left(\sum_{i=1}^n A_i \cos \varphi_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n A_i \sin \varphi_i \right)^2 \quad (1.21)$$

$$\tan \varphi = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \sin \varphi_i}{\sum_{i=1}^n A_i \cos \varphi_i} \quad (1.22)$$

2. 两个同方向不同频率振动的合成

若两个分振动的频率不相同, 则两个分振动的相位之差随时间就不再是固定的了, 因此, 初相角是否相等, 对于问题不再重要。设

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi) \quad (1.23)$$

首先, 考查 ω_1 和 ω_2 之比是有理数的情形, 即

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$$

上式经过转换, 可以变为

$$m \frac{2\pi}{\omega_1} = n \frac{2\pi}{\omega_2}$$

其中, $\frac{2\pi}{\omega_1} = T_1$ 和 $\frac{2\pi}{\omega_2} = T_2$ 分别是两个分谐振动的周期。令

$$T = mT_1 = nT_2$$

则合振动为

$$\begin{aligned} x(t+T) &= x_1(t+T) + x_2(t+T) = x_1(t+mT_1) + x_2(t+nT_2) \\ &= x_1(t) + x_2(t) = x(t) \end{aligned}$$

可见, T 就是合振动 $x(t)$ 的周期, 即当两个谐振动的频率 ω_1 和 ω_2 之比是有理数时, 其合振动是周期函数, 但不是谐振动。

下面讨论两个分谐振动的频率 ω_1 和 ω_2 之比不是有理数的情形。这时, 经过时间 t 后, 两个分振动的相位差为 $(\omega_2 - \omega_1)t$ (设 $\omega_2 > \omega_1$)。此时, 合振动的振幅为

$$A^2(t) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t] \quad (1.24)$$

由此可见, 这种情况的合振幅 A 也随时间而改变, 因而由频率不同的谐和分振动所合成的振动不再是谐和振动, 如图 1.7 (a) 所示。

假设两个分振动的振幅及初相位均相等，频率相差很小，则在式 (1.24) 中，

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 = A_0 \\ A^2(t) &= 2A_0^2 \{ 1 + \cos[(\omega_2 - \omega_1)t] \} \\ &= 4A_0^2 \cos^2\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \end{aligned}$$

或

$$A(t) = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \quad (1.25)$$

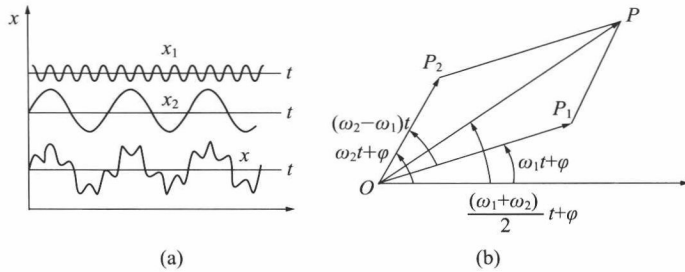


图 1.7

以 Ψ 表示合振动的相角，设 $A_1 \neq A_2$ ，则

$$\begin{aligned} \tan \Psi &= \frac{A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi)}{A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi)} \\ &= \frac{(A_1 + A_2) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi\right) \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + (A_1 - A_2) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi\right) \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t}{(A_1 + A_2) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi\right) \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - (A_1 - A_2) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi\right) \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t} \\ &= \frac{\tan\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi\right) + \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \tan \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t}{1 - \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \tan\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi\right) \tan \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t} \end{aligned}$$

若 $A_1 = A_2 = A_0$ ，则

$$\tan \Psi = \tan\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi\right)$$

从而得

$$\Psi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi$$

这时，合振动为

$$x(t) = x_1 + x_2 = A(t) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi\right) \quad (1.26)$$

$$= 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi\right) \quad (1.26')$$