高等农林院校大学数学系列教材

应用概率论与数理统计同步辅导

主编　金惠兰 张振荣

南開大學出版社

高等农林院校大学数学系列教材

应用概率论与数理统计同步辅导

主编 金惠兰 张振荣

南开大学出版社
天 津

图书在版编目(CIP)数据

应用概率论与数理统计同步辅导 / 金惠兰，张振荣主编. —天津：南开大学出版社，2014.2

ISBN 978-7-310-04349-1

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①金…②张… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 268833 号

南开大学出版社出版发行

出版人:孙克强

地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339 23500755

营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200

*

天津午阳印刷有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2014 年 2 月第 1 版 2014 年 2 月第 1 次印刷

210×148 毫米 32 开本 8.5 印张 238 千字

定价:21.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

内容简介

本书是深入学习概率论与数理统计的辅导书. 全书共分八章，内容包括随机事件及其概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、样本及统计量、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析. 各章按重要概念、公式及结论，释难解惑，典型例题，考研真题，习题精解，模拟试题及模拟试题参考答案进行组织编写.

本书可用于学习概率论与数理统计的考研复习，同时也适合作为高校教师的教学参考书.

前 言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的数学学科，是高等学校理工科类、经管类等专业重要的基础理论课，也是全国硕士研究生入学的数学考试必考课程. 学生对它掌握的好坏，不仅直接关系到后续课程的学习，而且对提高教育质量和人才培养质量都有着深远的影响.

初学概率论与数理统计的同学往往不知如何去解题。本书的目的就是通过对释难解惑和经典例题的分析，帮助学生正确理解基本概念，掌握解题的方法与技巧，并通过适量的练习，达到培养分析问题解决问题能力的目的.

本书的内容与现行教材《应用概率论与数理统计》同步，共分八章，各章由重要概念、公式及结论，释难解惑，典型例题，考研真题，习题精解，模拟试题及模拟试题参考答案构成.

重要概念、公式及结论 对本章必须掌握的基本概念、性质、定理和公式进行归纳，使读者易学、易记、易掌握.

释难解惑 对重点、难点以及容易混淆的概念进行诠释，使读者掌握问题的本质.

典型例题 尽可能全面归纳这门课程所涉及的题型，逐一进行分析并给出了解题方法和规律. 对解法的获得过程给予了直观、简便的分析，帮助读者掌握解题思路、获得解题方法、提高解题能力.

考研真题 精选与本节内容有关的考研真题，试题涵盖了 2004 年至 2013 年的各类典型题型，并做了详细的解答，供考研的学生使用.

习题精解 主要对配套教材《应用概率论与数理统计》的习题做了详细的解答，使读者进一步提高解题能力.

模拟试题及模拟试题参考答案　每章都配置了难易度适中的模拟试题及参考答案，以填空题、选择题、计算题的形式给出，供读者自测本章内容掌握的程度.

本书是编者深入研究教学大纲和研究生考试大纲之后撰写而成的，它不仅是广大学生的辅导书、教师教学的参考书，而且也是硕士研究生入学考试必备的复习用书.

本书的第一、二、三章由张海燕编写，第四、五章由金惠兰编写，第六章由俞竺君编写，第七、八章由张振荣编写，金惠兰负责统稿.

编写本书时，参阅了许多书籍，引用了许多经典的例子和解题思路，在此向有关作者致谢！

由于编者水平有限，书中错误和不妥之处，敬请读者不吝指教.

编者

2013 年 10 月于天津农学院

目　录

第一章 随机事件及其概率

一、重要概念、公式及结论

1. 随机试验

具有以下三个特征的试验称之为随机试验，简称试验，常用 E 表示.

①可以在相同的条件下重复进行；

②每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

③进行试验之前不能确定哪一个结果会出现，但试验结束时能确定出现的结果.

2. 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 Ω. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点.

3. 随机事件

随机试验 E 的结果称为随机事件(即样本空间 Ω 的子集)，简称事件.

4. 事件的关系和运算

设试验 E 的样本空间为 Ω，$A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 E 的事件.

(1)包含与相等

若事件 A 发生必将导致事件 B 发生，则称事件 A 为事件 B 的子事件，记为 $A\subset B$，或称事件 B 包含着事件 A. 若事件 B 包含事件 A，且事件 A 也包含事件 B，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

(2)事件的和(或并)

事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的和(或并)，记为 $A\cup B$.

类似地，事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生的事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

(3)事件之差

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$. 不难看出 $A-B=A-AB$.

(4)事件之积(或交)

事件 A 与事件 B 同时发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件，记为 $A\cap B$ 或 AB；$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件.

(5)事件互不相容(或互斥)

若 $AB=\Phi$，则称事件 A 与事件 B 为互斥事件，也称事件 A 与事件 B 互不相容. 对于互不相容事件的和 $A\cup B$，记作 $A+B$.

(6)互为对立事件(或逆事件)

若 $AB=\Phi$，且 $A+B=\Omega$，则称事件 A 与事件 B 互为对立事件. 记为 $B=\overline{A}$ 或 $A=\overline{B}$. 显然，$A-B=A-AB=A\overline{B}$.

(7)互斥事件完备组

设 Ω 为某随机试验 E 的样本空间，如果一组事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足下列条件：

① $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，即 $A_iA_j=\Phi(i\neq j)$；

② $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$；

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个互斥事件完备组，或称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个部分.

(8)事件之间的运算规律

①交换律：$A\cup B=B\cup A$；

②结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$；

③分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，

$$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)；$$

④德・摩根(De Morgan)律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

⑤包含律：$A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$；

$AB \subset A, AB \subset B$;

⑥吸收律：$A \cup \Omega = \Omega, A \cup \Phi = A$;

$A\Omega = A, A\Phi = \Phi$;

⑦重叠律：$A \cup A = A, AA = A$;

⑧对立律：$A\overline{A} = \Phi; A \cup \overline{A} = \Omega$.

5. 古典概型

我们称满足以下两个条件的随机试验 E 为古典概型：

(1)有限性：试验的结果只有有限个，即试验产生有限个基本事件；

(2)等可能性：每个结果出现的可能性都相同，即每次试验中各个基本事件出现的可能性相同.

6. 随机事件的古典概率

设随机试验 E 是含有 n 个基本事件的古典概型，事件 A 包含 k 个基本事件，则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数}}{\text{样本空间中所含的基本事件总数}} = \frac{k}{n}.$$

在古典概型下定义的事件概率为古典概率.

7. 几何概型

我们称满足以下两个条件的随机试验 E 为几何概型：

(1)随机试验 E 的样本空间 Ω 可用一个几何区域 G 表示；

(2)每个样本点落在 G 中任一区域 D 中的可能性与区域 D 的几何测度(一维空间的长度，二维空间的面积，三维空间的体积)成正比，与其位置及形状无关.

8. 随机事件的几何概率

设随机试验 E 是几何概型，样本空间 Ω 用几何区域 G 表示，事件 A 对应的区域为 D，则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{D \text{ 的几何测度}}{G \text{ 的几何测度}}.$$

在几何概型下定义的事件概率为几何概率.

9. 随机事件的概率的公理化定义

设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，如果对于 E 的每一事件 A，都有

确定的实数 $P(A)$ 与之对应,并且满足以下条件

(1)(非负性) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(2)(规范性) $P(\Omega)=1, P(\Phi)=0$;

(3)(可加性)对于 Ω 中两两互斥的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 都有

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)=P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots.$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

10. 随机事件概率的性质

(1)设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个两两互斥的事件,则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(2)设 A 为任一事件,则有 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

(3)(减法法则)设 A,B 为两个事件,则 $P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$.

特别地,若 $B \subset A$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

(4)(加法法则)设 A,B 为任意两个事件,则 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

对于任意三个事件 A,B,C,有

$$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-$$
$$P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

11. 条件概率与乘法公式

如果 $P(A)>0$,则在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率为

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

如果 $P(B)>0$,则在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率为

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

由条件概率公式得到乘法公式:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B\mid A)=P(B)\cdot P(A\mid B).$$

$$P(ABC)=P(AB)\cdot P(C\mid AB)=P(A)\cdot P(B\mid A)\cdot P(C\mid AB).$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

12. 全概率公式与贝叶斯公式

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个互斥事件完备组，则对于任一事件 B，都有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i);$$

$$P(A_k\mid B)=\frac{P(A_k)P(B\mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

13. 事件的独立性

设 A,B 是两个事件，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与事件 B 相互独立，简称 A 与 B 独立.

显然，若 A 与 B 独立，且 $P(A)\neq 0,P(B)\neq 0$，则

$$P(B\mid A)=P(B),P(A\mid B)=P(A).$$

若事件 A 与事件 B 相互独立，则 $\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，以及 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，如果对于任意的 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$ $(2\leqslant k\leqslant n)$，都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的.

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n).$$

14. 贝努里概型

称具有下述特征的 n 次随机试验为 n 重贝努里概型（或 n 重贝努里试验）：

(1)每次试验的可能结果只有两个，记为 A 及 $\overline{A}$；

(2)各次试验的结果互不影响，或者称为相互独立的；

(3)事件 A 及 $\overline{A}$ 在每次试验中出现的概率相同，即

$$P(A)=p, P(\overline{A})=1-p \quad (0<p<1).$$

在n重贝努里试验中，事件A在n次试验中恰好发生k次的概率为

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,2,\cdots,n).$$

二、释难解惑

1. 怎样区分互逆事件和互斥事件？

答　事件A与B互斥指的是两者不可能同时发生，而事件A与事件B互逆指的是A与B不但不能同时发生，还需A与B中有一个事件必发生. 即

A与B互斥 $\Leftrightarrow AB=\Phi$;

A与B互逆 $\Leftrightarrow AB=\Phi$且$A+B=\Omega$.

2. 样本空间的选取是否唯一？

答　样本空间的选取一般不唯一. 在解题的过程中，选取恰当的样本空间，可简化计算，参见例 1.11 方法二.

3. 如何理解概率的公理化定义？

答　前苏联大数学家柯尔莫哥洛夫于 1933 年成功地将概率论实现公理化. 前面我们曾指出：事件与试验相联，试验的每个结果称为事件. 与此相应，在柯式的公理化体系中引进一个抽象的集合Ω，其元素ω称为基本事件；一个事件是由若干个基本事件构成的，与此相应，在柯氏的公理化体系中考虑由Ω的子集构成的一个集类F，F中的每个成员就称为"事件". 事件有概率，其大小随事件而异. 换言之，概率是事件的函数，与此相应，在柯式的公理化体系中引进一个定义在F上的函数P，对F中的任一成员A，$P(A)$之值即可理解为概率. 柯氏的公理化体系对此函数P加上几条要求（即公理）：

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(2) $P(\Omega)=1, P(\Phi)=0$;

(3) 对于Ω中两两互斥的事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$都有

$$P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n)=P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots.$$

我们举一简例说明概率的公理化定义的实现:掷一颗质地均匀的骰子,观察出现的点数.集合 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ 有 6 个元素构成,反应掷骰子的 6 个基本结果.作为 F,在本例中包括 Ω 的所有可能子集,故 F 有 $2^4 = 64$ 个成员,即该随机试验产生 64 个事件,此时概率函数 P 定义为

$$P(A) = \frac{A\text{ 中所含点数}}{6},$$

如 $A = \{1,2,3\}$,即表示出现的点数小于 4 这一随机事件,则

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

4. $P(AB)$与$P(B \mid A)$ 有何区别?

答　$P(AB)$ 表示事件 A 与 B 同时发生的概率,$P(B \mid A)$ 表示在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.它们的计算方法如下:

$$P(AB) = \frac{AB\text{ 所包含的基本事件数}}{\text{样本空间中所含的基本事件总数}};$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (\text{当 } P(A) > 0 \text{ 时})$$

$$= \frac{\text{事件 } B \text{ 在 } \Omega_A \text{ 中所含的基本事件数}}{\text{缩减的样本空间 } \Omega_A \text{ 中所含的基本事件总数}}.$$

5.全概率公式和贝叶斯公式适用于哪些问题?

答　全概率公式适用问题的一般特征是:随机试验可分为两个层次,第一层次的所有可能结果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个完备事件组,它们通常是第二个层次事件发生的基础或原因;需要求概率的事件是第二个层次中的事件 B. 而找到完备事件组是运用全概率公式的关键.

贝叶斯公式适用问题的特征与全概率公式相同,只是所求问题为全概率公式的逆问题:已知第二个层次中的事件 B 发生了,求它是由于第一层次中的事件 A_j 的发生而引起的条件概率 $P(A_j \mid B)$,使用公式的关键仍然是找到完备事件组.

6.事件 A 与 B 互斥(或互不相容),与事件 A 与 B 相互独立的区别和联系是什么?

答 事件 A 与 B 互斥即 $AB=\Phi$，描述的是两事件的关系，即两者不能同时发生.

事件 A 与 B 独立指事件 A 的发生与否与事件 B 的发生与否无关，即 $P(AB)=P(A)P(B)$ 或 $P(B\mid A)=P(B)$.

当 $P(A)>0$ 且 $P(B)>0$ 时，

(1)若 A 与 B 独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$，故 $AB\neq\Phi$，即 A 与 B 相容.

(2)若 A 与 B 互斥，即 $P(AB)=P(\Phi)=0$，而 $P(A)P(B)>0$，则 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，即 A 与 B 不相互独立.

三、典型例题

题型Ⅰ 通过事件的关系和运算用简单事件表示复合事件

例 1.1 设 A,B,C 为任意三个随机事件，则以下命题正确的是( ).

(A) $A\cup B-B=A-B$ (B) $(A-B)\cup B=A$

(C) $(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$ (D) $A\cup B=A\bar{B}\cup B\bar{A}$

解 由于 $A\cup B-B=(A\cup B)\bar{B}=A\bar{B}\cup B\bar{B}=A\bar{B}=A-B$，故应选(A)，其余三个为错，原因在于

$(A-B)\cup B=(A\bar{B})\cup B=(A\cup B)(\bar{B}\cup B)=A\cup B$，

$(A\cup B)-C=(A\cup B)\bar{C}=A\bar{C}\cup B\bar{C}=(A-C)\cup(B-C)$，

$A\cup B=A\bar{B}\cup\bar{A}B\cup AB$.

题型Ⅱ 由已知事件的概率求出另外一些与之有关系的事件的概率

例 1.2 设 A,B 满足 $A\subset B$，$P(A)=0.1$，$P(B)=0.5$，求 $P(AB)$，$P(A+B)$，$P(\overline{AB})$，$P(A\bar{B})$.

解 因 $A\subset B$，故 $AB=A$，$A+B=B$，从而

$P(AB)=P(A)=0.1$； $P(A+B)=P(B)=0.5$.

又由 $A\subset B$，得到 $\bar{A}\supset\bar{B}$，故 $P(\overline{AB})=P(\bar{B})=1-P(B)=0.5$.

因 $A\subset B$，$B\bar{B}=\Phi$， 故 $A\bar{B}=\Phi$， 从而 $P(A\bar{B})=0$.