球面几何导引与题解100道

左铨如 束荣盛 著

南京大学出版社

球面几何导引与题解100道

左铨如 束荣盛 著

南京大学出版社

内 容 简 介

本书依据教育部颁发的中学数学课程标准，有关“球面上的几何”部分采用度量几何结构，以向量计算为主要工具，科学通俗地介绍了球面几何的基本知识和基础理论以及几何模型的应用和推广，这有助于读者迅速登上解析非欧几何的殿堂．本书还精心配备了100道习题，为方便自学全部给予解答．附录中，介绍了如何将2维球面几何推广到n维非欧几何，其中包括天文数学家祖冲之的精妙算法和其在天文历法上若干有趣的应用．

本书可作为中学数学教师、教研员的培训教材，高等师范院校数学专业的选修课教材，亦可作为高中学生和数学、天文爱好者的学习参考书．

图书在版编目(CIP)数据

球面几何导引与题解100道/左铨如，束荣盛著．一南京：南京大学出版社，2010．8

ISBN 978-7-305-07043-3

Ⅰ．① 球…　Ⅱ．① 左…② 束…　Ⅲ．①几何课一中学一教学参考资料　Ⅳ．①G634.633

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第085991号

出版发行　南京大学出版社

社　　址　南京市汉口路22号　　　邮编　210093

网　　址　http://www.NjupCo.com

出 版 人　左　健

书　　名　球面几何导引与题解100道

著　　者　左铨如　束荣盛

责任编辑　吴　华　　　　编辑热线　025-83592146

照　　排　南京玄武湖印刷照排中心

印　　刷　南京京新印刷厂

开　　本　850×1 168　1/32　印张6.125　字数154千

版　　次　2010年8月第1版　2010年8月第1次印刷

ISBN　978-7-305-07043-3

定　　价　15.00元

发行热线　025-83594756

电子邮箱　Press@NjupCo.com

Sales@NjupCo.com(市场部)

序

球面几何是研究球面图形性质的几何学分支.它在天文、航海、航空、测量和卫星定位等方面有着广泛的应用.

在高中阶段,将球面几何的有关知识作为选修课内容向学生介绍是值得尝试的.为了适应教改的需要,左铨如与束荣盛合作编著了《球面几何导引与题解100道》一书,这是他们十余年来教学实践和科研创新的经验总结.

该书系统介绍了球面几何的基本知识和基本理论,还介绍了球面几何模型的应用和推广,这有助于读者迅速登上解析非欧几何的殿堂.

全书条理清晰、语言生动、概念准确、推理严谨、特色明显,是一本球面几何方面的好教材,建议尽快出版.此书可作为中学数学教师培训教材,也可作为高等师范院校数学专业的选修课教材.

南京师范大学　数学与计算机科学学院
方锦暄(教授,博士生导师)
2006年12月8日

前言

球面几何又叫**椭圆几何**，它是曲率为正的常数的**常曲率空间几何之一**，而另一类曲率为负常数的则称为**双曲几何**. 椭圆几何和双曲几何合称为**非欧几何**，而熟知的平面几何、立体几何、解析几何等是非欧几何的极端情形——曲率为零的一类称为**欧氏几何**. 常曲率空间几何为爱因斯坦的相对论提供了数学框架，相对论改变了人类对空间和时间的绝对观念，也打破了古典欧氏几何的绝对地位.

从 1989 年开始，本人就考虑到未来中学开设球面几何的需要，对"初等几何研究"课程进行了改革试验. 本书积笔者二十多年实践之经验，以球面为几何的模型，用度量几何结构的观点，取距离、角度、面积三条公理为出发点，简捷地、富有逻辑性地展开了球面几何的理论，**仅用(1.1 至 1.5)五节的篇幅，系统地讲解了应该熟练掌握的球面几何的基本知识**. 本书以向量法为主，兼顾三角法和综合法，用"机械化的"向量代数计算代替经典几何中的演绎推理，从定性层面上升到定量层面. 书中标注星号"*"部分是供有兴趣深入探讨的读者参考的.

在第 2 章介绍双曲几何的庞加莱模型之前，我们先介绍了"双曲面模型"，又通过球极投影给出双曲几何这两个模型之间的同构映射以及相应的距离公式. 附录 7 中还给出了**双曲矩阵和双曲变换群**，这包含了非常著名的广义**洛伦兹变换**，它允许超光速运动.

做适量的习题对于理解和丰富几何理论及方法都是十分有益的,但过量了则会让人心烦而不喜欢数学.本书在十一节之中精心配备了100道习题,并全部给出解答,它们是本书的有机组成部分.与平面几何类似,球面几何也有解三角形,三角形的高、中线、角平分线,几何不等式,共点共线等问题,对于这些问题,我们也给读者留下了自由发挥的空间.

中国古算源于天文历法和测量.书后六篇附录是本人的近作.其中四篇是有关初等数论问题及解不定方程组的祖冲之算法,它们用精妙的算法解决了古天文历法(有关时间)的多个实际问题;另两篇有关空间的数学问题,是将2维球面几何和双曲几何推广到高维,这样便于读者迅速登上解析非欧几何的殿堂.

笔者用余生潜心写成的《球面几何导引与题解100道》,其动机是想让广大读者花较少的时间,能获得更有用的知识和新的思维方法;更希望能将新开发的祖冲之算法永远传承下去!

左铨如

2004年12月25日写于南京

2009年8月2日修改于百家湖滨

目　　录

0 球面几何的直观模型和解析工具

著名数学家华罗庚先生曾对青年学生说①：要学会自学，要学会独立思考．要肯动脑筋，碰到问题都要想一想．比如 1961 年 9 月 1 日报上刊载了前苏联要向太平洋发射火箭的消息，我们学数学的人，就不妨根据前苏联所预报的火箭降落区域（四边形）的顶点经纬度（见表 0－1），来计算一下火箭发射场处在什么地方、射程多少、精确度如何，等等．②

表 0－1 火箭降落区域（四边形）的顶点经纬度

	A	B	C	D
西经	170°30′	169°20′	167°55′	166°45′
北纬	10°20′	8°5′	11°30′	9°10′

这些问题在当时都是国家机密，解决了很有价值．假设这四点的坐标是火箭瞄准点加上偏差确定的，反过来推测，前苏联的火箭发射场可能就位于球面大圆 AB 与 CD 的交点 P 处，即火箭发射场 P 与 A，B 三点在一直线上，与 C，D 也在地面一直线上，故直线 AB 与 CD 的交点 P 就是发射场的位置．但是这个问题不宜用已学过的欧氏几何（平面几何、立体几何、解析几何等）的方法解决，因为地球表面在小范围内可以看做平面，而在大范围内，只能将地球表面近似地看做球面．当我们读到本书 1.2 节，有了计算球面上

① 见怀念华罗庚[M]．北京：中国大百科全书出版社，2004：446．原文载学・思・锲而不舍[J]．中国青年，1961(21)．

② 华罗庚．高等数学引论[M]．一卷一分册．北京：科学出版社，1963：57．

两直线交点的公式,上面的问题就好解决了.

学习“球面几何”要先准备好直观模型(地球仪)和解析工具——向量与坐标,这正是设置本章的目的和要求.

0.1 球面上的简单几何图形

三维欧氏空间(记作 E^3)中,到定点距离等于定长 r 的点的集合称为**球面**,记作 $S_r^2 \subset E^3$,定点称为球面的中心或球心,r 是球半径的长.连结球面上两点的直线段称为弦,过球心的弦称为球的直径.球的同一条直径的两个端点称为**对径点**(或对心点),图 0-1 中地球的南北极 S 与 N 就是对径点.

如果平面与球面 S_r^2 相交,交线必为圆,称它为**球面圆**.当平面过球心时,所得球面圆称为**球面大圆**;当平面不过球心时,称为**球面小圆**.

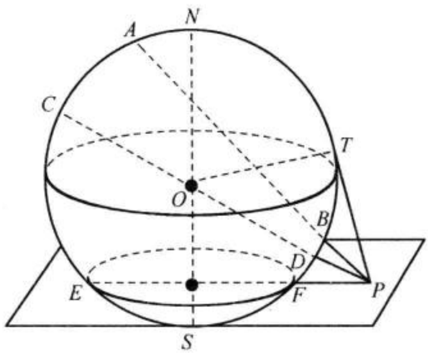

图 0-1

球面上不同的三点确定唯一的球面圆.不在同一大圆上的三点确定唯一的小圆.球面上不同的两点(非对径点)确定唯一的大圆.

由平面几何中的圆幂定理和图 0-1 即得

定理 0-1(球幂定理) 过一定点 P 作球 $O(r)$ 的任一条割线,与球面交于两点,自定点至两交点的两条有向线段的积为定值,即

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PO^2 - r^2.\text{(称为点对球的幂)}$$

球面大圆把球面分成对称的两个**半球面**.

大圆的任一条直径的两端必为一对对径点.

球面小圆把球面分成两个区域,一个是小半球(即这个区域的所有点都属于某个半球),一个是大半球(即不存在这样的半球能包含它的所有点).

球面上连结两点 A,B(非对径点)的线中,大圆劣弧的长度最短(证明见附录1). 记号$\overset{\frown}{AB}$既表示以 A,B 为端点的大圆劣弧,又表示球面线段 AB 的长度,也称为两点 A,B 间的**球面距离**. 显然它具备下列性质:

① 非负性:$\overset{\frown}{AB}\geqslant 0$,且$\overset{\frown}{AB}=0$ 的充要条件是点 A 与 B 重合(记作 $A=B$);

② 对称性:$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BA}$;

③ 三角不等式:$\overset{\frown}{AM}+\overset{\frown}{BM}\geqslant\overset{\frown}{AB}\quad(M\in S_r^2)$.

由于球面大圆与欧氏几何中的直线都具有上述三条性质,于是也把球面大圆称为**球面直线**.

球面直线段看起来似乎并不"直"(曲与直是相对比较而言的),况且球面线段的长度有界,$\overset{\frown}{AB}\leqslant\pi r$. 然而,当 r 无限增大时,与欧氏直线段一样,可以无限长.

定理 0-2 任意两条球面直线必相交于两点,且这两点是一对对径点.

在球面上,具有公共端点的两条大圆弧(或称射线)构成的图形称为**球面角**. 两个半球面的非空交集称为**二角形**(又称月形),它的边界是由一对对径点为顶点的两个半大圆(称为月形的边)构成的. 二角形的两边所成的两个球面角称为二角形的顶角. 二角形的两个顶角相等. 设顶角的大小为 α,则 $\alpha\in(0,\pi)$.

因为半径为 r 的球面面积是 $4\pi r^2$,所以顶角大小为 α 的二角

形的面积

$$\varepsilon_{二角形} = 2\alpha r^2. \qquad (0-1)$$

注意这里 α 是弧度数.

定义 0-1　球面 S_r^2 上,有限个互不相同的半球面 S_i 的非空交集 $\Omega=\bigcap\limits_{i=1}^{n}S_i(S_i\cup S_j\neq S_r^2,i\neq j$ 且 Ω 不含对径点)称为凸球面多边形(简称为多边形). 三个不相同的半球面的交集习惯上称为球面三角形.

与平面三角形类似,球面三角形的边界是由球面上连结不在同一直线上的三点 A,B,C 的球面线段构成的图形. 点 A,B,C 称为三角形的顶点,线段 BC 称为顶点 A 所对的边,顶点为 A 的球面角$\angle BAC$ 称为三角形的内角,简记作$\angle A$. 球面$\triangle ABC$ 的三边长$\overset{\frown}{BC}=a,\overset{\frown}{CA}=b,\overset{\frown}{AB}=c$,三个内角(大小也用记号$\angle A,\angle B,\angle C$ 表示)称为三角形的六个元素.

与欧氏平面三角形不同,球面三角形的面积是有界的,总小于半球面的面积 $2\pi r^2$. 一般地,有

定理 0-3　S_r^2 上球面$\triangle ABC$ 的面积

$$\varepsilon_{ABC} = r^2(\angle A+\angle B+\angle C-\pi). \quad (\text{Girard},1625\text{ 年}) \qquad (0-2)$$

证明　设球面$\triangle ABC$ 的三个顶点 A,B,C 的对径点依次为 A_1,B_1,C_1(如图 0-2),则$\triangle ABC_1$ 与$\triangle A_1B_1C$ 是关于球心 O 为中心对称的全等的图形,它们的面积相等,即

$$\varepsilon_{A_1B_1C} = \varepsilon_{ABC_1},$$

据公式(0-1),

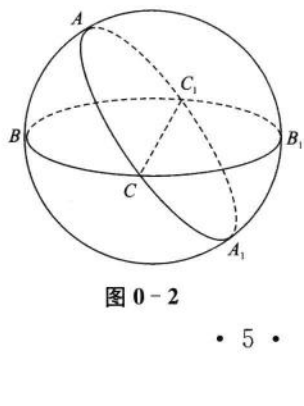

图 0-2

$$\varepsilon_{ABC}+\varepsilon_{CBA_1}=\varepsilon_{\text{二角形}ABCA_1}=2r^2\angle A,$$
$$\varepsilon_{BCA}+\varepsilon_{ACB_1}=\varepsilon_{\text{二角形}BCAB_1}=2r^2\angle B,$$
$$\varepsilon_{CAB}+\varepsilon_{BAC_1}=\varepsilon_{\text{二角形}CABC_1}=2r^2\angle C.$$

又半球面的面积为

$$2\pi r^2=\varepsilon_{ABC}+\varepsilon_{CBA_1}+\varepsilon_{A_1B_1C}+\varepsilon_{ACB_1}.$$

上述五个等式相加,消去等量得

$$2\varepsilon_{ABC}+2\pi r^2=2r^2(\angle A+\angle B+\angle C).$$

故(0-2)式成立.

习题 0.1

1. 球面直角正三角形的面积是所在球面面积的 1/8.

2. 验证球面三角形的面积具有可加性.

3. 球面凸 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的面积 $\varepsilon=[\angle P_1+\angle P_2+\cdots+\angle P_n-(n-2)\pi]r^2$.

4. 球面直角三角形的三个内角之和小于 2π.

习题解答

1. 三个内角都是直角,故直角正三角形面积为$(\frac{3\pi}{2}-\pi)r^2$,球面面积为 $4\pi r^2$,它们的比为 1/8.

2. 设球面$\triangle ABC$被内部任一点 P 与三顶点的连线分成三个球面$\triangle ABP$,$\triangle BCP$ 和$\triangle CAP$.

$$\varepsilon_{\triangle ABP} = (\angle ABP + \angle BPA + \angle PAB - \pi)r^2,$$

$$\varepsilon_{\triangle BCP} = (\angle BCP + \angle CPB + \angle PBC - \pi)r^2,$$

$$\varepsilon_{\triangle CAP} = (\angle CAP + \angle APC + \angle PCA - \pi)r^2,$$

又 $$\angle BPA + \angle CPB + \angle APC = 2\pi,$$

故 $$\begin{aligned}\varepsilon_{\triangle ABP} + \varepsilon_{\triangle BCP} + \varepsilon_{\triangle CAP} &= (\angle A + \angle B + \angle C - \pi)r^2 \\ &= \varepsilon_{\triangle ABC}.\end{aligned}$$

3. 大圆弧 $P_1P_2, P_1P_3, \cdots, P_1P_{n-1}$ 将 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 分成 $(n-2)$ 个球面三角形，据球面三角形面积公式和角的可加性、面积可加性即得欲证公式.

4. 顶角为直角的二角形面积 πr^2 大于球面直角三角形的面积.

0.2 球面上的点的定位法

如果把半径为 r 的球面放在三维欧氏空间直角坐标系中，球心取作坐标原点 $O(0,0,0)$，那么坐标为 (x,y,z) 的点 M 在球面上的充要条件是

$$|OM| = r,$$

也就是

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

因此球面上任一点可用有序实数组 (x,y,z) 来定位，但是这里 x,y,z 三个数受条件 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 的限制，实际上给定两个数 x,y，第三个数 $z=\pm\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ 是确定的. 换句话说，球面上的点只需用一对有序实数就可以定位了.

天文、地理常用的定位法就是在球面上建立球面坐标系. 如图 0－3 所示，选定球面的一对对径点 S,N，在以 S,N 为极的大圆（称为基圆或赤道）上选定一原点 A 及一个正方向（站在北极 N 看赤道正向为逆时针方向），这样就在球面上建立了一个坐标系，称为**球面坐标系**.

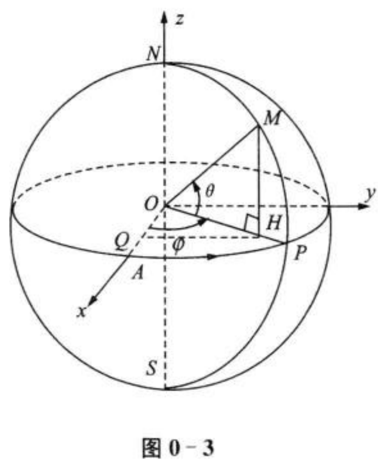

图 0－3

设 M 是球面上异于两极的任一点，半大圆 SMN（称为子午线或经线）交基

圆于点 P,于是有向大圆弧$\overset{\frown}{AP}$的度数 φ ($|\varphi|\leqslant180°$),称为点 M 的经度(经度的正负视有向弧 AP 和基圆的正方向是否一致而定),大圆弧$\overset{\frown}{PM}$的度数θ($|\theta|\leqslant90°$)称为点 M 的纬度(纬度的正负视有向弧 PM 与 MN 是否同向而定). 点 M 的经度、纬度所组成的有序数组(φ,θ)就称为点 M 的**球面坐标**. 极点 N,S 其纬度分别为$+90°$,$-90°$,但经度不确定.

把地球看做一个球面,经过英国格林尼治天文台的经线(称为本初子午线)与赤道的交点选为球面坐标系的原点 A,这样地面上任一点的经纬度就与现行地图上的经纬度一致. φ 的正负表示东经、西经,θ 的正负表示北纬、南纬,所以又称(φ,θ)为点的地理坐标.

上述两种给点定位的方法有紧密的关系. 设点 M 的直角坐标为 (x,y,z),球面坐标为(φ,θ). 如图 0-3 所示,过点 M 作赤道平面的垂线,H 为垂足,再过 H 作 x 轴的垂线,Q 为垂足,则

$$z = HM = |OM|\sin\theta, \qquad |OH| = |OM|\cos\theta,$$
$$x = OQ = |OH|\cos\varphi, \qquad y = QH = |OH|\sin\varphi.$$

故有如下关系式:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi, \\ y = r\cos\theta\sin\varphi, \\ z = r\sin\theta. \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} |\varphi| \leqslant 180° \\ |\theta| \leqslant 90° \end{matrix}\right) \tag{0-3}$$

今后也常常将上式写成

$$M(x,y,z) = r\,(\cos\theta\,\cos\varphi, \cos\theta\,\sin\varphi, \sin\theta). \tag{0-4}$$

运用(0-3)式将点 M 的球面坐标(φ,θ)化为直角坐标(x,y,z)($x^2+y^2+z^2=r^2$). 反过来,也可以由下式:

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \varphi=\pm\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \qquad (y>0\text{ 时取“}+\text{”号},y<0\text{ 时取“}-\text{”号}) \\ \theta=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \end{cases} \tag{0-5}$$

计算出半径$|OM|=r$和点M的经纬度(φ,θ).

显然，当且仅当点$M'(x',y',z')$在射线OM上，即$\dfrac{x'}{x}=\dfrac{y'}{y}=\dfrac{z'}{z}=t>0$时，点$M'$与$M$的经纬度相同.

习题 0.2

1. 从某港口A沿正东方向航行到同一纬度θ的某港口B，设A，B的经度之差为$\Delta\varphi$，求证A到B的航程为$r\Delta\varphi\cdot\dfrac{\pi}{180}\cos\theta$.

2. 设A，B两地同在北半球，A地距赤道较B地更远. 自A到B的方向比与A在同一纬度其他地点都更接近正东方向，问自B到A的方向如何？

习题解答

1. 经线和纬线的切线方向表示当地的南北方向和东西方向. 所以沿正东方向航行就是沿纬线（以地球南北极为极的球面小圆）航行. 纬度θ的球面圆半径是$c=r\cos\theta$，又$\Delta\varphi$是角度数，化为弧度数是$\Delta\varphi\cdot\dfrac{\pi}{180}$，故$A$到$B$的纬圆弧长为$c\cdot\Delta\varphi\cdot\dfrac{\pi}{180}$.

2. 自A到B的方向是指连结AB的大圆弧在各点处的切线