

“十二五”国家重点图书出版规划项目
现代声学科学与技术丛书

医学超声基础

章 东 郭霞生
马青玉 屠 娟 编著



科学出版社

014033196

R445.1
09

“十二五”国家重点图书出版规划项目

现代声学科学与技术丛书

医学超声基础

章 东 郭霞生 马青玉 屠 娟 编著



R445.1
09

科学出版社

北 京



北航

C1721982

01033708

目 录 内 容 简 介 “十二五”

本书介绍了生物医学超声学的基本物理原理,全书共12章。内容包括声波在生物组织中传播基础,声场的产生及其测量,衰减和吸收,声速,散射和反射,有限振幅声波在生物组织中的传播,超声在骨中的传播,超声成像技术,非线性超声成像,超声造影剂微气泡及其应用,超声生物效应的物理机制,高强度聚焦超声。

本书可作为高等院校医学超声、生物医学工程及相关专业高年级本科生和研究生教材,也可供相关专业的研究人员和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

医学超声基础/章东等编著. —北京: 科学出版社, 2014

(现代声学科学与技术丛书)

“十二五”国家重点图书出版规划项目

ISBN 978-7-03-040154-0

I. ①医… II. ①章… III. ①超声波诊断②超声波疗法 IV. ①R445.1
②R454.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 046611 号

责任编辑: 刘凤娟 / 责任校对: 宋玲玲 钟 洋

责任印制: 赵德静 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014年3月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2014年3月第一次印刷 印张: 28 1/2

字数: 551 000

定价: 158.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

超声成像技术以其独特的优点 (安全、方便及无创等), 已广泛应用于医学临床诊断实时成像, 例如, B 超及超声多普勒等。20 世纪 80 年代起, 超声造影剂的引入进一步促进了超声成像技术的迅速发展, 新型超声成像技术 (例如, 谐波造影成像、超声分子成像等) 不断涌现。并且, 超声波在治疗领域的应用也已展现出巨大的潜力, 其中的高强度聚焦超声治疗肿瘤已经在临床得以应用。

超声诊断及治疗新技术的发展需要系统掌握超声与生物组织相互作用相关的物理基础。本书的目的就是为读者介绍诊断及治疗超声的基本物理原理。本书的内容包括: 声波在生物组织中传播基础 (第 1 章), 声场的产生、描述及其测量 (第 2 章), 衰减和吸收 (第 3 章), 声速 (第 4 章), 散射和反射 (第 5 章), 有限振幅声波在生物组织中的传播 (第 6 章), 超声在骨中的传播 (第 7 章), 超声成像技术 (第 8 章), 非线性超声成像 (第 9 章), 超声造影剂微气泡及其应用 (第 10 章), 超声生物效应的物理机制 (第 11 章), 高强度聚焦超声 (第 12 章)。其中, 第 1 章至第 5 章的内容主要参考了 C. R. Hill 等编著的 *Physical Principles of Medical Ultrasonics*, 第 6 章至第 12 章则来自各学术刊物及我们的研究成果。

本书在编写过程中, 得到龚秀芬教授的悉心指导, 并进行了有益的讨论, 在此深表谢意。

编著者

2012 年 10 月于南京

目 录

前言

第 1 章 声波在生物组织中传播基础	1
1.1 引言	1
1.2 流体中的平面波	1
1.3 声波变量	5
1.4 特殊解	7
1.5 格林函数和瑞利积分	10
1.6 换能器的声场	11
1.7 平面边界的透射及反射	19
主要参考文献	25
第 2 章 声场的产生、描述及其测量	26
2.1 引言	26
2.2 压电装置	27
2.3 连续波激励的声场	29
2.4 脉冲声场	35
2.5 声束的聚焦	36
2.6 换能器阵列的波束形成	42
2.7 超声治疗场	51
2.8 声场变量的幅度	53
2.9 声场测量	54
2.10 压电换能器	54
2.11 质点位移检测	58
2.12 辐射力测量	59
2.13 量热法	61
2.14 光衍射法	63
2.15 生物体内有效辐射剂量测量	65
主要参考文献	65
第 3 章 衰减和吸收	73
3.1 引言	73

3.2 超声与组织的相互作用面积	73
3.3 超声纵波的吸收机理	75
3.4 组织声衰减及吸收系数的测量	86
3.5 声衰减和吸收数据	98
3.6 总结	105
主要参考文献	105
第 4 章 声速	117
4.1 引言	117
4.2 组织中超声速度测量	117
4.3 已发表的声速数据	123
4.4 总结	126
主要参考文献	127
第 5 章 散射和反射	132
5.1 引言	132
5.2 散射理论	133
5.3 散射测量	142
5.4 散射理论模型	146
5.5 散射和 B 超成像	148
5.6 总结	151
主要参考文献	151
第 6 章 有限振幅声波在生物组织中的传播	155
6.1 理想介质中有限振幅声波的传播	155
6.2 黏滞介质中有限振幅声波的传播	159
6.3 有限振幅超声波在生物组织中传播的非线性效应	163
主要参考文献	178
第 7 章 超声在骨中的传播	184
7.1 松质骨中的超声传播理论	184
7.2 超声波在人体长骨中的传播及其应用	209
主要参考文献	226
第 8 章 超声成像技术	228
8.1 超声成像原理	228
8.2 A 型扫描超声成像	231
8.3 B 型扫描超声成像	232
8.4 M 型扫描超声成像	236

8.5 C 型扫描超声成像	238
8.6 超声显微镜	240
8.7 超声多普勒成像	249
8.8 超声 CT	258
8.9 光声成像	265
8.10 微波热声成像	276
主要参考文献	285
第 9 章 非线性超声成像	290
9.1 非线性声参量成像	290
9.2 超声谐波特性	295
9.3 组织超声谐波成像	297
主要参考文献	315
第 10 章 超声造影剂微气泡及其应用	323
10.1 微气泡超声造影剂的发展	323
10.2 超声造影剂微气泡的基本特性	326
10.3 微气泡振动动力学模型	329
10.4 微气泡振动及数值计算	333
10.5 超声造影成像技术	337
10.6 超声分子成像	345
10.7 基于微气泡的药物/基因转染	351
主要参考文献	352
第 11 章 超声生物效应的物理机制	360
11.1 热效应	360
11.2 声辐射力	367
11.3 声流	370
11.4 空化效应	373
11.5 非线性效应	380
11.6 总结	385
主要参考文献	386
第 12 章 高强度聚焦超声	395
12.1 高强度聚焦超声的发展	395
12.2 高强度聚焦超声基本原理	396
12.3 理想流体中的线性声场	400
12.4 黏滞流体中有限振幅波的传播	404

12.5	大张角聚焦换能器的声场模型	411
12.6	生物组织中的声传播及其热效应	415
12.7	高强度聚焦超声声场测量	418
12.8	空化效应	424
	主要参考文献	432
	索引	436

第1章 声波在生物组织中传播基础

1.1 引言

在超声影像系统中,利用声波可以得到组织信息,而在超声治疗中,可以通过声波将能量传递给组织。我们在本书的多个章节将讨论声波是如何在生物组织中传播及声波与组织的相互作用。本章主要描述声波在生物组织中的线性传播特性,以及声波在界面上的透射及反射。在理论推导中首先考虑单频平面波传播,而复杂的声波声场可以通过傅氏级数和角谱方法构建。

生物组织主要由水、蛋白质及脂肪等组成,且含水量很高,通常可将声波在生物组织中的传播看作声波在流体中的传播,即可将生物组织看作似流体介质。但生物组织具有复杂的结构,可以有多种不同类型的波传播,例如,第7章中我们将会讨论声波在骨中的传播。

本章还假设声波遵循线性声学原理。线性意味着信号改变幅度时保持波形不变,以及在同一位置不同比例的波及信号可以形成更为复杂的波及信号。这种叠加原则是傅氏变换和各种超声成像系统的核心。事实上组织中的非线性效应不可忽略,但了解线性原理将为我们进一步学习非线性声传播奠定基础(见第6章)。

最后,本章假设介质无损耗。但实际上生物组织和水都有声衰减,我们会在第3章讨论生物组织的声衰减和吸收。

1.2 流体中的平面波

1.2.1 引言

图1.1表示了三种简单却重要的波形,即平面波、柱面波及球面波。平面波沿一个方向传播,波的形式改变可以通过一系列无限大垂直于传播方向的平面表示。柱面波的横截面就是一个扩散的圆波(例如,当一个石子投进水中,水面泛起的扩散的波纹)。球面波辐射像一个膨胀的球。当然实际波形会以复杂的形式变化而不是这些理想简单的形状。后面我们将会了解到采用傅氏变换或角谱方法可以合成复杂的波形。

1.2.2 理想流体中的声波方程

在一些假设条件下,可以得到简单的生物组织中声波传播方程。首先介质为理

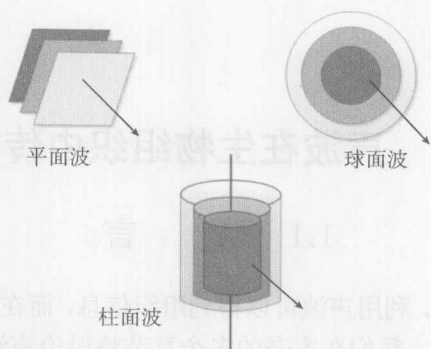


图 1.1 平面波、柱面波及球面波的示意图

想流体,即介质中不存在黏滞,声波在理想流体中的传播没有能量的损耗。其次介质是静态的,例如,空间分布的密度为 $\rho_0(\mathbf{r})$,这里 $\mathbf{r}$ 为矢量,在笛卡儿坐标系中为 (x, y, z) 。为避免三维描述的复杂性,我们先考虑一维的情况,然后再扩展至三维。因而,介质被定义为具有静态压力 p_0 及空间变化的密度 $\rho_0(x)$ 。静态介质在压力波的扰动情况下,距离 x 处随时间变化的总声压可表示为

$$p_T(x, t) = p_0 + p(x, t) \quad (1.1)$$

式中, t 表示时间; p 为声波引起的压力扰动,称作声压。此外,介质的静态密度也受到声波的扰动,在距离 x 处随时间变化的密度可表示为

$$\rho_T(x, t) = \rho_0(x) + \rho(x, t) \quad (1.2)$$

声波在传播中不仅改变介质的密度和压力,而且还影响介质质点的运动,定义介质质点的运动速度为 $u(x, t)$ 。这里值得注意的是表达式 $u(x, t)$ 为介质中某一质点在外力作用下的速度,而此质点具有单一的声压和密度。与质点速度相关联的是质点位移,用 $\xi(x, t)$ 表示位于 x 处的质点在 t 时刻的位移。在质点位移很小时,有

$$u(x, t) = \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} \quad (1.3)$$

1. 运动方程

在任何动力学问题中,首先要定义系统的作用力。作用在连续介质中任何质点上的力决定于压力梯度,根据牛顿第二定律有

$$-\frac{\partial p_T}{\partial x} = \rho_T \frac{du}{dt} \quad (1.4)$$

式中, $\frac{du}{dt}$ 包含了两部分:一部分是在空间指点上,由于该位置的速度随时间而变化所取得的加速度,即本地加速度 $\frac{\partial u}{\partial t}$;另一部分是质点位移一个空间距离以后,

因为速度随位置变化取得的速度增量而得到的加速度, 即 $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = u \frac{\partial u}{\partial x}$, 即迁移加速度, 因而式 (1.4) 改变为

$$-\frac{\partial p_T}{\partial x} = \rho_T \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_T u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.5)$$

假设声波只是引起介质的微扰, 即

$$|p/p_0| \ll 1; \quad |\rho/\rho_0| \ll 1 \quad (1.6)$$

略去二阶以上的高阶项, 则简化的运动方程可表示为

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.7)$$

该式即为有声扰动时介质的运动方程, 描述了声场中声压 p 与质点速度 u 之间的关系。

2. 连续性方程

除了牛顿第二定律之外, 另一个要使用的是质量守恒定律。介质中任何一处质量的改变必然是由于与相邻部分的质量交换。空间 x 处平面的质量流量为 $\rho_T(x, t) \times u(x, t)$, 根据质量守恒定律, 连续性方程为

$$-\frac{\partial \rho_T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [\rho_T u] \quad (1.8)$$

在线性情况下, 有

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.9)$$

式 (1.9) 为声场中介质的连续性方程, 描述了质点速度 u 与密度 ρ 的关系。

3. 物态方程

应用方程 (1.7) 及 (1.9) 可以消去质点速度 u , 给出一个 p 和 ρ 的关系式。但要获得只是变量 p 的方程, 还需要另一个将这两个变量联系的关系式。假设声波过程比热传导快得多, 在声传播过程中介质来不及与相邻部分进行热交换, 即假设声波过程是绝热过程。如果密度的改变是由于在声压 p 的函数 F 的力作用下引起的, 即

$$\rho = F(p) \quad (1.10)$$

考虑在小压力下产生的变化, 即有

$$F(p) = \left[\frac{dF}{dp} \right]_{p=0} p + \text{可忽略的高阶项} \quad (1.11)$$

对函数 F 取近似, 并且忽略高阶项。线性物态方程可写作

$$\rho = \left[\frac{d\rho}{dp} \right]_{p=0} \equiv \rho_0 \beta_0 p \quad (1.12)$$

式中, β_0 是介质的绝热体积压缩系数, 且

$$\beta_0 \equiv -\frac{1}{V} \left[\frac{\partial V}{\partial p} \right]_{\text{ad}} = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial p} \right]_{\text{ad}} \quad (1.13)$$

这里 V 表示介质的静态体积, 并且其值足够小, 使得密度可以认为在整个过程中是常数; 下标 “ad” 表示绝热过程。压缩系数是介质的体积弹性系数的倒数, 在均匀介质中是位置的函数。绝热条件作为一个假设, 虽然不是一个有效条件, 但在实验中可认为近似满足。尽管压力波可能引起介质中的温度变化, 但计入温度会要求更详细的热力学讨论, 导致模型更复杂。

4. 小振幅声波的波动方程

结合式 (1.7)、式 (1.9) 和式 (1.12) 可以给出以声压 p 为变量的方程:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \rho_0 \right) \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.14)$$

这里 $c_0^2(x) \equiv (\rho_0 \beta_0)^{-1}$ 。式 (1.14) 可以通过引入密度及体积压缩系数的微扰项 $\tilde{\rho}$ 及 $\tilde{\beta}$, 转化为规范化的物理显式方程:

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} \quad (1.15)$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta_0 - \beta}{\beta_0} \quad (1.16)$$

这里 $\tilde{\rho}$ 及 $\tilde{\beta}$ 表示空间平均的密度和压缩系数。通过一些代数变换可以得到均匀介质中的波动方程:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\bar{c}^2} \tilde{\beta} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\tilde{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right] \quad (1.17)$$

式中, $\bar{c} \equiv 1/\sqrt{\tilde{\rho} \cdot \bar{k}}$, 是一个正常数, 只取决于介质的平均物理特性。式 (1.17) 的三维形式是

$$\nabla^2 p - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\bar{c}^2} \tilde{\beta} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \nabla[\tilde{\rho} \nabla p] \quad (1.18)$$

式中, p 为三维矢量 $\mathbf{r}$ 的函数; t 为时间; ∇ 为梯度运算符, 且 $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ 为拉普拉斯算符。式 (1.18) 中随空间变化的项 $\tilde{\rho}$ 及 $\tilde{\beta}$ 只出现在公式的右边。在第 3 章中我们将阐述这样的微扰表示介质中的散射。在均匀介质中这些项将消失。因此, 均匀介质中的波动方程可简化为

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (1.19)$$

这里 $c \equiv 1/\sqrt{\rho_0 \beta_0}$ 。尽管生物软组织是非均匀介质, 但基于均匀介质中波动方程的解不仅可以为近似了解复杂的超声场提供基本理论, 而且可以为许多散射理论奠

定基础。

1.2.3 简谐波

声学应用中相当多的声源随时间作简谐振动, 并且任意时间函数的振动(例如, 脉冲波等)可以采用傅里叶分析的方法分解为许多不同频率的简谐函数的叠加(或积分)。因而, 在研究声场随时间的变化时, 我们感兴趣的是在稳定的简谐振动声源作用下产生的稳态声场, 这是分析随时间复杂变化的声场的基础。

简谐波可以写成如下复数的形式:

$$p(\mathbf{r}, t) = p_{\omega}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (1.20)$$

$$\omega = 2\pi f \quad (1.21)$$

其中, f 为声波的频率; ω 为声源简谐振动的角频率。在均匀介质中声波的振幅 $p_{\omega}(\mathbf{r})$ 满足亥姆霍兹方程:

$$\nabla^2 p_{\omega} + \frac{\omega^2}{c^2} p_{\omega} = 0 \quad (1.22)$$

在超声治疗中会经常使用长时脉冲, 这种情况用简谐波表示非常适合, 其声场可以采用如下的傅里叶分析方法表示:

$$p(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\omega}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.23)$$

p_{ω} 是复数形式, 包括相位信息, 所以又称为复数振幅。

1.3 声波变量

因为声压是大多数水听器及接收换能器所测量的基本变量, 声场测量经常采用声压描述。但描述声场还可采用其他时间及空间变量, 并且在某些场合下可能比声压更适合。当然, 这些变量与声压有联系, 因而我们需了解这些空间时间变量。本节主要讨论均匀介质中这些变量在线性近似下的关系。

1. 质点加速度

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad (1.24)$$

$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ 是位置 $\mathbf{r}$ 处的质点速度矢量, 由式 (1.7) 可将质点加速度表示为

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p \quad (1.25)$$

2. 压缩系数

$$s = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (1.26)$$

由式 (1.12) 可得到

$$s = \frac{p(\mathbf{r}, t)}{\rho_0 c^2} \quad (1.27)$$

3. 速度势

有些声波变量不方便用声压表示, 例如, 式 (1.7) 表明, 描述质点速度 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ 需求解压力波的一阶微分方程, 而对于 $\xi(\mathbf{r}, t)$ 则需求解二阶微分方程。为此, 可以定义:

$$\mathbf{u} = -\nabla\phi \quad (1.28)$$

这与声波方程中 p 是一致的。在式 (1.28) 中引入的新变量 $\phi(\mathbf{r}, t)$ 称作速度势 (从流体力学中引入)。很容易可得到

$$s = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) \quad (1.29)$$

以及

$$p = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) \quad (1.30)$$

可以证明 ϕ 也满足式 (1.19)。并且边界条件决定了速度势比声压的求解更简单。因为可以方便地求解质点速度, 速度势更适用于声场理论的描述。但速度势并无确切的物理意义, 不能够直接用物理方法测量, 进一步的计算可得到可测量的物理量, 如 s 和 p 。

4. 声能密度及平均声能密度

声波在原先静止的介质中传播, 使介质质点在平衡位置附近来回振动, 并且使介质中产生了压缩和膨胀的过程。前者使介质具有振动动能, 后者使介质具有形变势能。也就是说, 声波的传播过程就是声振动能量的传播过程。声振动传播能量的转移率可以计算得到。如在式 (1.7) 的两边用标量点乘 $\mathbf{u}$, 则可得

$$\nabla \cdot (p\mathbf{u}) - p\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{2}\rho_0 \frac{\partial u^2}{\partial t} \quad (1.31)$$

这时 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}$, 其中 $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ 是传播方向的单位矢量。调用式 (1.9) 和式 (1.12) 可得

$$\nabla \cdot (p\mathbf{u}) + \frac{p}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{2}\rho_0 \frac{\partial u^2}{\partial t} \quad (1.32)$$

可写作

$$\nabla \cdot \mathbf{Q} + \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (1.33)$$

其中,

$$\mathbf{Q} = p\mathbf{u} \quad (1.34)$$

$$E = \frac{1}{2} \rho_0 u^2 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{\rho_0 c^2} \tag{1.35}$$

式中， E 为单位体积的声能量密度；右式第一项为动能；第二项为势能。尽管式 (1.35) 采用线性理论推导得到，能量的表达式依然为二阶。式 (1.33) 是能量守恒的表达式， $\mathbf{Q}$ 可看作能量密度的流矢量，有时也称为“瞬时能量”或者“能流”。对于在很短时间内的能量变化，可将 $\mathbf{Q}$ 作时间平均得到平均声能密度

$$\mathbf{I} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \mathbf{Q} dt' \tag{1.36}$$

以这种方式引入声能量强度暗示其是矢量。对于脉冲声场，对时间的平均一般将 τ 选择在整周期内。声能量的方向由质点速度的方向决定，标量的能量可由下式得到

$$I(\mathbf{r}, t) = \mathbf{I}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \tag{1.37}$$

I 一般指某处的声波能量，但一般会进行空间或时间平均。

5. 声阻抗

此外，常用的变量还有声阻抗，定义为 $Z = p/u$ ，是指某种介质对入射声波的阻力，因而与位置相关。后面我们将会看到，对于简谐振动波可以简化为更简单的表达式。

表 1.1 总结了上述常用的声波变量 (为简单起见，只列举了平面波解)。

表 1.1 常用声学变量的表达式

名称	表达式	平面波解
声压	$p(\mathbf{r}, t)$	$A \exp[i(\omega t - kx)]$
质点速度	$\mathbf{u} = \left[-\frac{1}{\rho_0} \int \nabla p(\mathbf{r}, t') dt' \right] \cdot \mathbf{n}$	$\frac{A}{\rho_0 c} \exp[i(\omega t - kx)]$
压缩变量	$s = p/\rho_0 c^2$	$\frac{A}{\rho_0 c^2} \exp[i(\omega t - kx)]$
速度势	$\phi = \frac{1}{\rho_0} \int \nabla p(\mathbf{r}, t') dt'$	$-\frac{iA}{\rho_0 \omega} \exp[i(\omega t - kx)]$
声阻抗	$Z = p/u$	$\rho_0 c$
声强	$I = \overline{p\mathbf{u}}$	$A^2/2\rho_0 c$

1.4 特殊解

声波方程只在应用介质的基本物理特性基础上推导得到，并没有涉及声源的振动特性及边界条件。在某些对称性的情况下，由于维数的减少，声波方程可以得到相对简单的解。下面我们列举几种特殊情况下声波方程的解。

1.4.1 平面波

$$\mathbf{r} = ix + jy + kz \equiv (x, y, z) \quad (1.38)$$

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.39)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.40)$$

这里 i , j 和 k 表示 x, y, z 三个轴的单位矢量。假设声波只依赖于三个轴中的一个 (例如, x 轴), 则三维波动方程 (1.22) 可简化为

$$\frac{\partial^2 p_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_x}{\partial t^2} = 0 \quad (1.41)$$

式中, p_x 为平面波声压; c 为与介质相关的常量。式 (1.41) 的解为

$$p(x, t) = g(x - ct) + q(x + ct) \quad (1.42)$$

式中, g 和 q 是任意函数, 沿着正 x 方向以速度 c 传播, 无振幅及波形的变化。平面波的解是声学原理的基础。如果声源随时间作简谐振动,

$$p_{Hx}(x, t) = A \exp\{i(kx - \omega t)\} \quad (1.43)$$

其中, A 为波的振幅, 并且

$$k = 2\pi/\lambda = 2\pi f/c = \omega/c \quad (1.44)$$

k 为波数; λ 为波长。表 1.1 列出了声学各变量与简谐振动波的振幅和频率的关系。对于向前传播的声波 (正 x 轴), 特征声阻抗为 $\rho_0 c$, 该常数仅决定于介质特性。而沿着相反方向传播的平面波, 其特征声阻抗为负值, 但幅值不变。

当两个具有相同幅度和频率, 但传播方向相反的简谐振动的平面波相叠加时,

$$p_{swx}(x, t) = A \exp[i(kx - \omega t)] + A \exp[-i(kx + \omega t)] = 2A \cos(kx) \exp(i\omega t) \quad (1.45)$$

这种不传播的波称为驻波, 在某些确定的位置声压消失, 其位置称为节点。在某些位置出现极大值 $\pm 2A$, 其位置称为反节点。而位移节点出现在声压的反节点上, 反之亦然。

1.4.2 球面波

球极坐标中有

$$\mathbf{r} = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) \quad (1.46)$$

如考虑对称性, 则声波方程简化为

$$\frac{\partial^2(rp_r)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(rp_r)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.47)$$

这里 p_r 表示球面波声压。式 (1.41) 与式 (1.47) 相似, 式 (1.47) 的通解为

$$p_r(r, t) = \frac{1}{r}g(r - ct) + \frac{1}{r}q(r + ct) \quad (1.48)$$

该通解包括两个球面波, 一个向外辐射 (发散), 另一个向球心会聚。二者形式相同, 但幅度可以不同。对于简谐振动的波源, 如果向无界空间辐射的自由行波, 没有反射波出现, 式 (1.48) 可写为

$$p_{Hr}(r, t) = \frac{A}{r} \exp[i(kr - \omega t)] \quad (1.49)$$

其中, A 一般为复数, A/r 的绝对值为声压幅值。

1.4.3 柱面波

柱坐标系中有

$$\mathbf{r} = (h \cos \varphi, h \sin \varphi, z) \quad (1.50)$$

且 $h = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。声压场不依赖于 φ 和 z , 声波方程简化为

$$\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial h} \left[h \frac{\partial p_h}{\partial h} \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_h}{\partial t^2} = 0 \quad (1.51)$$

与平面波及球面波不同, 即使对于简谐振动波源式 (1.51) 也没有简单的解。但在这种情况下式 (1.51) 可改写为

$$\frac{\partial^2 p_{Hh}}{\partial h^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial p_{Hh}}{\partial h} + k^2 p_{Hh} = 0 \quad (1.52)$$

p_{Hh} 为简谐振动的柱面波的声压。该方程表明了一个包含贝塞尔函数的解。相对于平面波和球面波, 简谐振动的柱面波传播时形状不会变化。但考虑到 $q(h) = \sqrt{h}p_{Hh}(h)$, 其满足如下公式:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial h^2} + \left(\frac{1}{4h^2} + k^2 \right) q = 0 \quad (1.53)$$

在渐近条件下, $h \rightarrow \infty$, 式 (1.53) 的近似解的形式为 $\exp(ikh)$, 向外传播的柱面波可描述为

$$p_{Hh} = \frac{A}{\sqrt{h}} \exp[i(kh - \omega t)] \quad (1.54)$$