全国高等农林专科统编教材

全国普通高等农林专科课程建设委员会

线性代数及线性规划

农林各专业通用

吴坤明　主编

高等教育出版社

全国高等农林专科统编教材

线性代数及线性规划

（农林各专业通用）

吴坤明　主编

高等教育出版社

(京)112号

内容提要

本书是在全国普通高等农林专科课程建设委员会的统一组织下,根据全国高等农林教育研究协作组所制订的“线性代数及线性规划”课程教学基本要求编写的.主要内容为:n阶行列式、矩阵、线性方程组、线性规划问题的数学模型、单纯形法及其电算程序、对偶线性规划和多目标规划简介.

本书内容新颖,概念清晰,深入浅出,例题丰富,特别注重实际能力的培养,可作为农林专科教材,也可作为少学时的工、农本科基础课教材.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及线性规划/吴坤明主编.—北京:高等教育出版社,1999

全国高等农村专科统编教材

ISBN 7-04-007553-9

Ⅰ.线… Ⅱ.吴… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 ②线性规划-高等学校-教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CTP数据核字(1999)第30206号

线性代数与线性规划

吴坤明 主编

出版发行	高等教育出版社		
社 址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电 话	010-64054588	传 真	010-64014048
网 址	http://www.hep.edu.cn		
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	高等教育出版社印刷厂		
开 本	787×1092 1/16	版 次	1999年10月第1版
印 张	16.5	印 次	1999年10月第1次印刷
字 数	390 000	定 价	13.50元

前　言

本书是在全国普通高等农林专科课程建设委员会的统一组织下，根据全国高等农林教育研究协作组所制定的“线性代数及线性规划”课程教学基本要求编写的.

书中主要内容为 n 阶行列式、矩阵、线性方程组.线性规划问题的数学模型、单纯形法及其电算程序、对偶线性规划和多目标规划简介.

本书根据面向21世纪农林专科人才素质要求和专业培养模式改革的需要，力求内容新颖、结构合理、联系实际、注重能力的培养.向量间的线性相关性是线性代数中定理集中、内容抽象的部分，本书为突出重点，精选了4个定理和3条推论作为基础来展开，使这一难度较大的内容，既具有一定的理论严密性，又深入浅出、简明扼要、易于学生掌握理解.单纯形方法是解线性规划问题的一种有效算法，可是，真正线性规划实际问题，用理论单纯形法是很难实现的.为了使今日教学同飞速发展的电子计算机技术结合起来，并能最大限度地发挥模型的算法作用，我们采用了近年来国内外得到迅速推广使用的现代语言——C语言，专门编制了单纯形法的电算程序，本程序在微机上调试通过，并对书中例题进行了验证，效果甚好.我们在书中附上了源程序，为方便使用，还可提供软盘.学习线性规划，如果决策目标仅局限于单一的，显然是和现代经济社会的要求不相协调，所以，我们在本书最后两节，介绍了本世纪60年代才发展起来的一种数学规划——多目标线性规划.

全书内容可供60左右学时讲授，如只讲线性代数，则需36学时.带“*”内容，可根据时间多少，酌情选讲.本书可作为农林专科教材，也可作为少学时的工农本科基础教材.

在本书编写过程中，胡秉民教授详细审阅了全稿，并提出了极为宝贵的意见；吴澄工程师(Acer)为本书精心编制了单纯形法的电算程序，在此一并深表谢意.

由于水平有限，编写中难免有不妥之处，望读者批评指正.

编者

1999年1月

目　录

第一章　n 阶行列式

行列式产生于求解线性方程组，但随着它的理论及计算方法的完善，在数学本身及其它科学分支上都有广泛的应用，成为一种实用性很强的数学工具．就其数学本身，它是线性方程组和矩阵理论研究的重要工具，因而成为线性代数的基本组成部分之一．本章主要介绍行列式的概念、性质、计算方法和在解线性方程组中的应用．

§1.1　行列式的定义

一、n 级排列

为引入一般行列式的定义，我们先介绍 n 级排列的相关知识．

定义 1.1　以正整数$1,2,\cdots,n$ 为元素组成的一个无重复元素的有序排列称为一个 **n 级排列**．

例如　2 3 1 5 4 是一个 5 级排列，3 2 4 1 是一个 4 级排列．

容易计算，以 $1,2,\cdots,n$ 为元素共可组成$n!$ 个排列．其中把以正整数从小到大为顺序的排列 $1\ 2\ 3\cdots n$，称为 **n 级标准排列．**相对于标准排列，其它排列都将程度不同地破坏正整数从小到大的顺序，产生或多或少的所谓下述定义的“逆序”．

定义 1.2　在一个 n 级排列　$j_1j_2\cdots j_n$ 中，如果有某个较大的数码排在了某个较小数码的前面，则称这两个数码构成排列的一个逆序．一个排列中逆序的总个数，称为这个排列的**逆序数**，记作　$N(j_1j_2\cdots j_n)$．

例 1　求下列排列的逆序数．

(1) 3 1 2；(2) 4 3 1 2 5；(3) $n(n-1)\cdots 2\ 1$

解　根据定义 1.2 来分析各排列中数码的逆序，进而计算出逆序数．

(1) 与数码 1 构成的逆序有 1 个（较大数码 3 排在了它的前面）；与 2 构成的逆序有 1 个（较大数码 3 排在它的前面）；数码 3 是这个排列中的最大数码，再无较大数码排在它的前面，因此无逆序．综合起来排列 312 的逆序数为

$$N(3\ 1\ 2)=2$$

(2) 在排列 4 3 1 2 5 中，与 1 构成的逆序有 2 个（4，3 排列了它的前面）；与 2 构成的逆序有 2 个（4，3 排在了它的前面）；与 3 构成的逆序有 1 个（4 排在了它的前面）；其它无逆序．综合起来，排列 4 3 1 2 5 的逆序数为

$$N(4\ 3\ 1\ 2\ 5)=5$$

(3) 按照(1)、(2)的分析方法，显然排列 $n(n-1)\cdots 2\ 1$ 的逆序数为

$$N[n(n-1)\cdots 2\ 1]=\frac{1}{2}(n-1)n$$

按照例 1 对排列从小到大数码逐个分析寻找逆序的方法,可以不重不漏地找出排列中的所有逆序.

一个排列的逆序数是一个自然数,非奇即偶,为此,我们把逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.如例 1 的(1)是偶排列,(2)是奇排列.

在一个排列中,由于元素的排位是有序的,因此,将排列中某两个元素的位置互换,而其余元素的位置不变,就得到另一个排列.我们把互换排列中两个元素位置的变换称为一个**对换**.例如排列 2 3 1 4,对元素 1,2 的位置施行一个对换,就得到另一个排列 1 3 2 4.由此,我们可以想象,对给定的两个 n 级排列,对其中一个施行有限次对换,必然得到另一个.

关于对换与排列的奇偶性,我们可以给出如下的基本结论.

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性.

这就是说,一个排列,经过一次对换,奇排列将变为偶排列,反之偶排列将变为奇排列.例如排列 2 3 1 4,经过元素 1,2 的一个对换变成 1 3 2 4,而 $N(2\ 3\ 1\ 4)=2$,$N(1\ 3\ 2\ 4)=1$.

定理 1.2 当 $n\geqslant 2$ 时,在 $n!$ 个 n 级排列中,奇、偶排列各占一半.

***证** 设 $n!$ 个 n 级排列中共有 p 个奇排列,q 个偶排列.由于在 $n!$ 个排列中的每一个排列非奇即偶,所以 $p+q=n!$.又分别对 p 个奇排列都施行一次对换,则由定理 1.1 可得 p 个偶排列,而 $n!$ 个排列中共有 q 个偶排列,所以 $p\leqslant q$.同理,分别对 q 个偶排列都施行一次对换,则得 q 个奇排列,于是又有 $q\leqslant p$.故 $p=q=\dfrac{1}{2}n!$

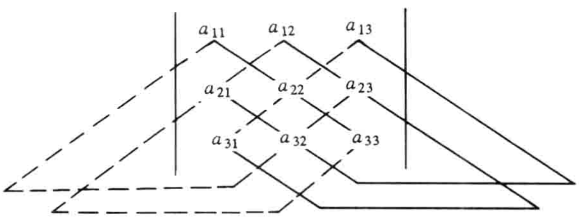
二、行列式的定义

为便于理解一般 n 阶行列式的定义,我们先从中学解线性方程组时已学过的具有一定代表性的三阶行列式入手,总结行列式的结构特点及其与排列的关系,进而自然引入一般 n 阶行列式的定义.

三阶行列式的记法符号及它代表的算式是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.1}$$

(1.1)式的左端是由 3^2 个数排成三行三列的三阶行列式的记法符号.其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 称为**元**,下标 i 称为**行标**,规定元所在的行;下标 j 称为**列标**,规定元所在的列.行、列标 ij 唯一决定元 a_{ij} 在行列式中的位置.如 a_{23} 在这个三阶行列式中的第 2 行第 3 列.



(1.1)式的右端是三阶行列式所表示的计算式,称为**展开式**.它由所谓的三阶行列式的**对角线规则**(又称为沙流氏规则)来规定.即每条线上的三个元的乘积构成展开式中的一项,并且主对角线方向——实线上三个元的乘积项前取正号;次对角线方向——虚线上三个元的乘积项前取负号.

例 2 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

解 由三阶行列式的对角线规则

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} &= 2\times1\times(-2)+(-3)\times1\times3+1\times1\times1-1\times1\times3-2\times1\times1 \\ &\quad -(-3)\times1\times(-2) \\ &= -23\end{aligned}$$

下面我们来看,这样规定的三阶行列式的展开式有什么基本特征及与排列的关系.

1. 首先我们可以看到,(1.1)式的右端——三阶行列式的展开式中共有 6 项,每一项都是由三阶行列式中位于不同行不同列的三个元的乘积构成.即每个乘积项中有且仅有不同行不同列的三个元为积因子,这样构成的全部可能项有且仅有六项.

2. 由于展开式中的每一项都是以行列式中不同行不同列三个元为积因子构成的乘积项,因此,我们总可以调整积因子的顺序,使每项中积因子元的行标如(1.1)中的一个 3 级标准排列,从而每一项除正负号外可以写成形式

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

展开式中各项元的列标组 $j_1j_2j_3$ 恰好是以 1,2,3 为元素的所有 3 级排列

$$1\ 2\ 3, 2\ 3\ 1, 3\ 1\ 2, 3\ 2\ 1, 1\ 3\ 2, 2\ 1\ 3 \tag{1.2}$$

每个 3 级排列恰好对应展开式中的一个项.这样我们得到结论:三阶行列式展开式中的项数与 3 级排列的总个数相等,即 $6=3!$.

3. 其次,我们再看三阶行列式展开式中每一项的正、负号规则与排列的关系.为此,我们计算(1.2)中列出的所有 3 级排列的逆序数

$$N(1\ 2\ 3)=0,\quad N(2\ 3\ 1)=2,\quad N(3\ 1\ 2)=2$$
$$N(3\ 2\ 1)=3,\quad N(1\ 3\ 2)=1,\quad N(2\ 1\ 3)=1$$

即 1 2 3,2 3 1,3 1 2 为偶排列,3 2 1,1 3 2,2 1 3 为奇排列.从而对应三阶行列式的展开式可以得出结论:所有 3 级排列,奇偶排列各占一半的性质恰好与三阶行列式展开式中正负项各占一半相对应,其中偶排列对应正项,奇排列对应负项.于是,三阶行列式展开式的一般代数项可以表示为

$$(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

因此三阶行列式概括地可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3)}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$ 表示对一切 3 级排列求和.

上面总结的关于三阶行列式的特征对于二阶行列式自然成立,读者可自行总结.

共性包含于个性之中.现在我们就根据三阶行列式所具有的特征来定义一般 n 阶行列式,从而使行列式概念有一个统一的定义.

定义 1.3 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 n 行 n 列表,记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做 ***n* 阶行列式**.其中 a_{ij} 称为它的**元**,i 称为**行标**,j 称为**列标**.行列标唯一决定元 a_{ij} 在行列式中的位置.并且 n 阶行列式是表示满足如下条件的各项的代数和.

1. 每一项由取自行列式中不同行不同列的 n 个元的乘积构成,当项中元的行标调整为标准排列时,一般项可表为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中列标组 $j_1j_2\cdots j_n$ 是某个 n 级排列.

2. 每项取正或负符号由 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}$ 规定.即当该项的列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时取正号,奇排列时取负号,则一般的代数项可表为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

3. 代数和中的项数与 n 级排列的个数相同,因此,全部项共有 $n!$ 个.则 n 阶行列式及其表示的各项的代数和是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.3}$$

其中符号 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对一切 n 级排列求和.

一般地,我们把(1.3)式统一地叫做 n 阶行列式的**定义式**.

另外,当我们调整每项中元素的列标为标准排列时,定义中的一般代数项也可以表为

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

因此,n 阶行列式也可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1i_2\cdots i_n)} (-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{1.4}$$

为了书写方便,我们一般把 n 阶行列式简记为 $D = |a_{ij}|_{n\times n}$ 或 $D_n = |a_{ij}|$,或 D_n,或 D.

显然,在 n 阶行列式的定义式(1.3)或(1.4)中,当 $n=2$ 和 $n=3$ 时,就是二阶行列式和三阶行列式.特别地,由一个元 a 构成的一阶行列式 $D=|a|$ 就是数 a 本身.

应用行列式定义计算行列式,一般的作法是:对应行列式的阶数 n,写出所有的 n 级排列,并计算其逆序数.再对应写出所有的排列,按照定义中一般代数项的结构写出全部项并加以计算.但要注意,对较多的元为零的行列式,并不需要写出全部项再对应做计算,我们只分析计算那些不为零的项就够了.另外我们指出,利用行列式定义计算行列式仅是理论上的需要,它不是计算行列式的基本方法.计算行列式的基本方法我们将在§1.2,§1.3 中介绍.

例 3 计算下列行列式

(1) $D_2=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$;(2) $D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解 (1) 由定义 1.3,二阶行列式 D_2 的一般代数项为

$$(-1)^{N(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

列标组 j_1j_2 对应的全部二级排列为

$$1\ 2 \text{ 和 } 2\ 1$$

而且

$$N(1\ 2)=0, N(2\ 1)=1.$$

所以

$$\begin{aligned} D_2=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \\ &= 3\times 4-(-2)\times 4 \\ &= 20 \end{aligned}$$

(2) 由定义 1.3,三阶行列式 D_3 的一般代数项为

$$(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

列标组 $j_1j_2j_3$ 对应的全部三级排列为

$$1\ 2\ 3, 1\ 3\ 2, 2\ 1\ 3, 2\ 3\ 1, 3\ 1\ 2, 3\ 2\ 1$$

而且

$$N(1\ 2\ 3)=0, N(1\ 3\ 2)=1, N(2\ 1\ 3)=1$$
$$N(2\ 3\ 1)=2, N(3\ 1\ 2)=2, N(3\ 2\ 1)=3$$

所以

$$D_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$=1\times3\times2-1\times1\times1-2\times2\times2+2\times1\times3+3\times2\times1-3\times3\times3$$
$$=-18$$

在求解例 1 中，我们的目的是为应用行列式的一般定义，加深对行列式定义的理解. 对于二、三阶行列式，在实际计算中，有效且便于记忆的方法仍为我们中学已学过的对角线规则.

例 4 计算四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}2&0&0&0\\0&3&0&-1\\0&2&2&0\\1&0&0&3\end{vmatrix}$$

解 由定义 1.3，四阶行列式 D_4 的一般代数项为

$$(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

根据这个四阶行列式中的零元的结构，列标组 $j_1j_2j_3j_4$，当 j_1 取 2,3,4 时的项中都将含零因子，因此，只有取 $j_1=1$ 时的项可能不为零；当 $j_1=1$ 时，由排列定义，j_2 只能取数码 2,3,4 中之一个，但取 3 时的项将含零因子，取 4 时，将使 j_4 明显无非零项的数码可取，因此，只有取 $j_2=2$；同理可分析，只有 $j_3=3$，$j_4=4$ 的项不为零. 所以综合起来，只有当列标组 $j_1j_2j_3j_4$ 对应排列 1 2 3 4 时的项不为零，其它项均为零. 所以

$$\begin{aligned}D_4&=(-1)^{N(1\,2\,3\,4)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\\&=2\times3\times2\times3\\&=36\end{aligned}$$

作为例子，我们再计算几种具有特殊形式的行列式的值，这些行列式的结果在今后计算行列式中将得到较多的应用.

例 5 形如

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

的 n 阶行列式称为**上三角形行列式**. 我们来求它的值.

解 由定义 1.3，n 阶行列式的一般代数项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

在这个 n 阶上三角形行列式 D_n 中的第 n 行，除元 a_{nn} 外，其余元均为零，因此，只需考虑 $j_n=n$ 的那些项；在 D_n 的第 $n-1$ 行中，除元 $a_{n-1\,n-1}$，$a_{n-1\,n}$ 外，其余元都为零，因此，只需考虑 $j_{n-1}=$

$n-1$ 或 n，但已有 $j_n=n$，因此，只需考虑 $j_{n-1}=n-1$ 的那些项；如此，我们逐行往上推可得，在上三角形行列式 D_n 中，除

$$(-1)^{N(1,2,3\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

一项外，其它项都为零. 而 $N(1\ 2\ 3\cdots n)=0$，所以这个上三角形行列式的值为

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即，上三角形行列式的值就等于主对角线上元的乘积.

类似地有

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

我们把这样形状的 n 阶行列式称为**下三角形行列式**，它的值也等于主对角线上元的乘积.

特别地，n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n$$

我们把这样形状的 n 阶行列式称为**对角行列式**，它的值也等于主对角线上元的乘积.

§1.2 行列式的性质

定义 1.4 设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则把 D 的行与列按原序号互换后所得的行列式，称为行列式 **D 的转置行列式**，记作 D^{T}（或 D'），即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如,行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

下面我们来介绍行列式的基本性质,这些性质不难用定义加以证明,只是有的论述起来较繁,我们从略.

1. 行列式的转置性质

$$D=D^{\mathrm{T}}$$

即把一个行列式取转置后,其值不变.

例如

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\times5-3\times4 \\ &= -2 \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} D_2^{\mathrm{T}} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\times5-3\times4 \\ &= -2 \end{aligned}$$

所以 $D_2=D_2^{\mathrm{T}}$

行列式的转置性质说明,行列式中的行与列其地位是平等的,凡行具有的性质,列也应该具有同样的性质.所以,下面我们仅对行列式的行加以讨论,所讨论的所有性质对于列完全成立.

2. 行列式的分和性质

如果把 n 阶行列式的第 i 行的每个元写成两个数的和

$$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$$

则这个 n 阶行列式可分为两个 n 阶行列式的和.其中,这两个 n 阶行列式的第 i 行的元分别为

$$b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in} \text{和} c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{in}$$

而其它行的元与原行列式相同.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 把上式左端的行列式记为 D,右端的两个行列式分别记为 D_1, D_2.则由行列式定义 1.3

$$\begin{aligned} D &= \sum(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n} + \sum(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= D_1 + D_2 \end{aligned}$$

行列式的这个性质可以推广,即如果行列式的第 i 行的元为 m 个数的和

$$a_{ij} = b_{ij}^{(1)} + b_{ij}^{(2)} + \cdots + b_{ij}^{(m)} \quad (j = 1,2,\cdots,n),$$

则这个行列式可分为 m 个行列式的和.其中,这 m 个行列式的第 i 行的元分别为

$$b_{i1}^{(k)}, b_{i2}^{(k)}, \cdots, b_{in}^{(k)} \quad (k = 1,2,\cdots,m)$$

而其它行的元都与原行列式的相同.

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1+2+3 & 3+1+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 1 + (-3) + (-4) = -6$$

3. 行列式的变换性质

(1) 用数 k 乘行列式的某一行(列),就等于用数 k 乘以这个行列式.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 设上式左端的行列式为 D,右端的行列式为 D_1.则由行列式定义 1.3

$$\begin{aligned} D &= \sum(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= k\sum(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\ &= kD_1 \end{aligned}$$

这个性质的等价说法是,行列式中某一行(列)的公因子可以提到行列式的外面.

例如 行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

根据这个性质,显然有

推论 1 如果行列式中有某行(列)的元全为零,则这个行列式的值为零.

(2) 互换行列式中的某两行(列),则行列式的值只改变符号.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如 二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

而互换它的两行后有

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad \\ &= -(ad - bc) \\ &= -D \end{aligned}$$

推论 2 如果行列式中有两行(列)元完全相同,则这个行列式的值为零.

证 如果行列式 D 中有两行相同,那么交换这两行后所得的行列式仍为 D,从而由变换性质(2)得 $D=-D$,所以只能有 $D=0$.

由变换性质(1)及推论 2 立即可得

推论 3 如果行列式 D 中有两行(列)元对应成比例,则这个行列式 D 的值为零.

(3) 如果把行列式中某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)上,则这个行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这个性质的结论，由行列式的分和性质以及变换性质(2)是非常显然的.

行列式的性质，特别是变换性质将是我们计算行列式的最基本的根据. 为使初学者准确熟练地学会应用，我们将在引例中引入作行列式行、列变换的记法符号，使计算过程简捷明了.

(1) kr_i——表示用数 k 乘行列式中第 i 行.

(2) (r_i, r_j)——表示互换行列式的第 i, j 两行.

(3) $r_j + kr_i$——表示行列式的第 j 行加上第 i 行的 k 倍.

对应地，把(1)——(3)中的 r 换为 c，则表示对列变换的记法. 即我们用 r 表示行变换，用 c 表示列变换.

例 1　计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 98 & 99 & 97 \\ 196 & 197 & 195 \\ 204 & 103 & 305 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal{r_2 + r_3} \begin{vmatrix} 98 & 99 & 97 \\ 400 & 300 & 500 \\ 204 & 103 & 305 \end{vmatrix} \xlongequal{\frac{1}{100} r_2} 100 \begin{vmatrix} 98 & 99 & 97 \\ 4 & 3 & 5 \\ 204 & 103 & 305 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 - r_2} 100 \begin{vmatrix} 98 & 99 & 97 \\ 4 & 3 & 5 \\ 200 & 100 & 300 \end{vmatrix} \xlongequal{\frac{1}{100} r_3} 100^2 \begin{vmatrix} 98 & 99 & 97 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1 + r_3} 100^2 \begin{vmatrix} 100 & 100 & 100 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{\frac{1}{100} r_1} 100^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3 - 2r_1]{r_2 - 4r_1} 100^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

例 2　计算下列行列式

(1) $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$；　(2) $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

解　(1)

$$D \xlongequal[r_4 - 2r_1]{r_3 + r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 + 3r_2]{r_3 + r_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\0&0&-2&4\\0&0&0&-2\end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)\times(-2)\times(-2)$$

$$=-4$$

（2）

$$D\xlongequal[\substack{r_4-r_1\\ r_5-r_1}]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-2r_1}}\begin{vmatrix}1&2&1&1&1\\0&-1&-1&0&1\\0&-3&-2&0&-1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&0\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+r_2]{r_3-3r_2}\begin{vmatrix}1&2&1&1&1\\0&-1&-1&0&1\\0&0&1&0&-4\\0&0&0&0&3\\0&0&0&1&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(r_4,r_5)}\begin{vmatrix}1&2&1&1&1\\0&-1&-1&0&1\\0&0&1&0&-4\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&3\end{vmatrix}$$

$$=-[1\times(-1)\times1\times1\times3]$$

$$=3$$

例 3　计算下列行列式

（1）$D=\begin{vmatrix}1/2&1&-1/2&0\\1&1&2&-1\\-1/2&2&1/2&-1/2\\0&-1&-1/2&1\end{vmatrix}$　（2）$D=\begin{vmatrix}0&1/3&1&1\\-1/3&0&-1/3&2\\-1&1/3&0&-1\\-1&-2&-1&0\end{vmatrix}$

解　（1）

$$D\xlongequal[(i=1,2,3,4)]{2r_i}\frac{1}{16}\begin{vmatrix}1&2&-1&0\\2&2&4&-2\\-1&4&1&-1\\0&-2&-1&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\frac{1}{16}\begin{vmatrix}1&2&-1&0\\0&-2&6&-2\\0&6&0&-1\\0&-2&-1&2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_2]{r_3+3r_2}\frac{1}{16}\begin{vmatrix}1&2&1&0\\0&-2&6&-2\\0&0&18&-7\\0&0&-7&4\end{vmatrix}\xlongequal{\frac{1}{18}r_3}\frac{9}{8}\begin{vmatrix}1&2&1&0\\0&-2&6&-2\\0&0&1&-7/18\\0&0&-7&4\end{vmatrix}$$