高等院校信息技术规划教材

离散数学

王卫红 李曲 郑宇军 沈瑛 张永良 编著

清华大学出版社

高等院校信息技术规划教材

离散数学

王卫红 李曲 郑宇军 沈瑛 张永良 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书系统地介绍了计算机科学与技术等相关专业所必需的离散数学知识。全书共8章。第1章介绍命题及命题逻辑，第2章介绍谓词逻辑及其推理理论，第3章介绍集合与关系的基本概念和性质，第4章介绍函数，第5章介绍代数系统，第6章介绍格与布尔代数，第7章介绍图论的基本概念及其性质，第8章介绍离散数学在计算机科学中的一些具体应用。

本书适合作为高等学校计算机专业及相关专业的本科生教材，也可以供对离散数学有兴趣的读者自学。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学／王卫红等编著. --北京：清华大学出版社，2013

高等院校信息技术规划教材

ISBN 978-7-302-33523-8

Ⅰ. ①离…　Ⅱ. ①王…　Ⅲ. ①离散数学　Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 199045 号

责任编辑：焦　虹　战晓雷

封面设计：常雪影

责任校对：焦丽丽

责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社

网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com

地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084

社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者：北京嘉实印刷有限公司

经　　销：全国新华书店

开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：14　　**字　　数**：320千字

版　　次：2013年9月第1版　　**印　　次**：2013年9月第1次印刷

印　　数：1～2000

定　　价：25.00元

产品编号：055002-01

前言 Foreword

离散数学是现代数学的重要分支，也是计算机科学的重要理论基础。离散数学作为应用计算机求解实际问题的重要工具，在离散建模中具有重要的意义。随着计算机技术的日益普及，越来越多的行业开始采用计算机解决实际问题，学习和掌握离散建模的重要性日益凸显。学好离散数学，不仅能为计算机相关专业的学生后续课程的学习打下坚实的基础，也能培养学生的逻辑推理和抽象思维能力，为学生今后从事相关专业的学习和工作打下坚实的数学基础。

离散数学的主要研究对象是计算机相关学科中离散量的结构及其相互关系。本书主要包括数理逻辑、集合与函数、代数系统及布尔代数、图论等主要内容，内容涵盖计算机科学技术中常用的离散结构的数学基础。本书在注重离散数学体系的基础上，强化证明思想和方法的介绍，在讲解基本内容及基本概念的时候尽可能结合实例，重视理论和方法的实用性。本书除在每章中增加了一些实例的讲解和习题之外，还专门在第 8 章讨论了数理逻辑、集合论、代数系统以及图论在计算机科学中的应用。

本书系统地介绍了计算机科学与技术等相关专业所必需的离散数学知识。全书共 8 章，第 1 章介绍命题及命题逻辑，第 2 章介绍谓词逻辑及其推理理论，第 3 章介绍集合与关系的基本概念和性质，第 4 章介绍函数，第 5 章介绍代数系统，第 6 章介绍格与布尔代数，第 7 章介绍图论的基本概念及其性质，第 8 章介绍离散数学在计算机科学中的一些具体应用。

本书适合作为高等学校计算机专业及相关专业的本科生教材，也可以供对离散数学有兴趣的读者自学。

限于作者水平，书中不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者

2013 年 8 月

目录 Contents

第1章 chapter 1

命题逻辑

本章要点

- 命题的概念和表示
- 命题联结词、命题公式
- 真值表、重言式
- 等价公式与蕴含式
- 对偶与范式
- 推理理论

本章学习目标

- 掌握命题及其联结词的基本概念
- 掌握命题公式的基本概念与翻译方法
- 掌握范式的推演和变化方法
- 掌握命题演算的推理理论和规则

1.1 命题及联结词

1.1.1 命题的概念

数理逻辑是用数学方法研究逻辑思维的一门学科，它研究的中心问题是推理。而推理的前提和结论都是表达判断的陈述句，因而表达判断的陈述句就成了推理的基本要素。可以说，命题是命题逻辑研究的基本对象。在数理逻辑中，把具有唯一真值的陈述句称为**命题**。

可以把上面的这句话作为判定一个句子是否为命题的依据，换言之，如果要判断给定的句子是否为命题，应首先判断它是否为陈述句，再判断它是否有唯一的真值。作为命题的陈述句所表达的判断只有两种结果，称这种判断结果为命题的**真值**。真值只能取两个值：真(用 T 或 1 表示)或假(用 F 或 0 表示)。真对应正确的判断，假对应错误的判断。根据命题定义可知，任何命题的真值都是唯一的，也就是不仅不能既真又假，也不能既非真又非假。真值为真的命题称为**真命题**，真值为假的命题称为**假命题**。

下面先介绍几个实例。

例 1.1 判断下列句子中哪些是命题。

(1) 中国是亚洲最大的国家。

(2) 雪是黑色的。

(3) 生活多么美好啊!

(4) $x+y>10$。

(5) 你喜欢打篮球么?

(6) 我正在说谎。

(7) 请跟我来!

根据上面的说明知道,判断给定的句子是否为命题,应该分为两步:首先判定它是否为陈述句,其次判断它是否有唯一的真值。

在以上例子中,(3)是感叹句,(5)是疑问句,(7)是祈使句,它们都不是陈述句,因而都不是命题。

除了(3)、(5)、(7)之外的 4 个句子虽然都是陈述句,但并不都是命题。

对于(4),由于 x 与 y 的不确定性,使得该陈述句没有唯一的真值。因为当 $x=5$,$y=8$ 时,$5+8>10$ 正确;而当 $x=5$,$y=4$ 时,$5+4>10$ 不正确。也就是说,该陈述句的真值会根据 x 和 y 的取值发生变化,也就是没有唯一的真值。因而(4)不是命题。

在剩余的 3 个陈述句(1)、(2)和(6)中,(1)和(2)的真值能够确定,是命题。其中(1)是正确的判断,所以(1)是真命题。(2)是错误的判断,所以(2)是假命题。若(6)的真值为真,即"我正在说谎"为真,则(6)的真值应为假;反之,若(6)的真值应为假,也就是"我正在说真话"为真,则又推出(6)的真值应为真。所以(6)的真值无法确定,所以它不是命题。像(6)这种由真推出假,又由假推出真的陈述句称为**悖论**。凡是悖论都不是命题。

值得注意的是,一个句子真值是否唯一与我们是否知道它的真值并不是一回事。也就是说,有些时候,由于某些客观条件的限制,我们可能无法判定它的真值,但是它的真值本身却是唯一的。

例如下面的这个例子:

(8) 地球以外的星球上也有生物。

虽然现在没有办法证实外星上是不是真的有生物,暂时不知道这个句子的真值情况。但是,随着科学技术的发展,它的真值也会知道的。因而(8)的真值也是唯一的,所以它也是命题。

同样,现在还有许多科学问题,虽然今天暂时没有办法判断它们是正确的或者错误的,但是将来总有一天它们会被证明或者证伪,因而它们的真值是唯一的,所以这些答案还未知的科学问题也是命题。因而,必须注意,命题的真值有时可以明确地给出,有时还需要根据环境、条件和实际情况等才能确定其真值情况,但是这并不影响这些问题真值的唯一性。

例 1.2 判断下列命题的真假。

(1) 第二十九届夏季奥运会在北京举办。

(2) 每个素数都是奇数。

(3) 太阳从东方升起。

(4) 中国是世界上国土面积最大的国家。

解：根据实际情况，不难判断，上述命题的真值分别为

(1) T； (2) F； (3) T； (4) F。

在数理逻辑中，为了抽象和演算的方便，命题可以用大写字母或者带下标的大写字母来表示，例如，P、A_i 都可以用来表示命题：

P：张三是大学生。

A_i：4 是素数。

这些用来表示命题的符号称为**命题标识符**。一个命题标识符如果表示确定的命题，就称为**命题常量**，如果命题标识符只表示任意命题的位置，就称为**命题变元**。由于命题变元可以表示任意命题，所以命题变元的真值不能确定，因此命题变元不是命题。命题变元虽然没有确定的真值，但是当用一个具体的命题带入的时候，它的真值就可以得到确定。

1.1.2 原子命题和复合命题

前面介绍了命题的概念。为了更准确地对命题的种类进行划分和表示，在命题逻辑中，把命题分为两种类型：第一种类型是不能分解为更简单的陈述句，称作**原子命题**，例如，"小张是大学生"。第二种类型是由联结词、标点符号和原子命题构成的命题，称作**复合命题**。例如，"张华和李强都是大学生"。这个命题表示的是"张华是大学生而且李强也是大学生。"一个原子命题可以用一个命题标识符来表示。为了表达复合命题，必须使用命题联结词，下面介绍几种基本的命题联结词。

1.1.3 联结词

定义 1.1 设 P 为任一命题。复合命题"非 P"(或"P 的否定")称为 P 的否定式，记作 $\neg P$。符号 $\neg$ 称为**否定联结词**。

由定义可知，若 P 为真，则 $\neg P$ 为假；若 P 为假，则 $\neg P$ 为真。

命题 P 与其否定 $\neg P$ 的关系也可以用表 1.1 来表示。把这种列出命题的各种真值情况的表格称为真值表。

表 1.1 否定联结词的真值表

P	$\neg P$
T	F
F	T

例 1.3

(1) P：鲸是哺乳动物。

$\neg P$：鲸不是哺乳动物。

(2) P：重庆市是直辖市。

$\neg P$：重庆市不是直辖市。

"否定"的意义仅仅是修改了命题的内容，仍把它看作联结词，并称它是一元运算。

例如，对于例 1.3 中的(1)，由于"P：鲸是哺乳动物。"的真值为真，所以它的否定"$\neg P$：鲸不是哺乳动物。"的真值就相应为假。

定义 1.2 设 P，Q 为两个命题。复合命题"P 并且 Q"(或"P 与 Q")称为 P 与 Q 的**合取式**，记作 $P \wedge Q$，符号 $\wedge$ 称为**合取联结词**。

$P \wedge Q$ 的逻辑关系为 P 与 Q 同时成立，因而 $P \wedge Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 同时为真。

合取联结词的定义也可以用表 1.2 来表示。

表 1.2 合取联结词的真值表

P	Q	$P\wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

例 1.4

P：北京是直辖市。

Q：北京是中国的首都。

则上述命题的合取为 $P\wedge Q$：北京是直辖市且北京是中国的首都。而且，由于 P 和 Q 的取值都为真，所以根据真值表可以看出，$P\wedge Q$ 的取值也为真。

例 1.5 将下列命题符号化。

(1) 王强既勤奋又聪明。

(2) 王强不但聪明而且勤奋。

(3) 王强不勤奋但是很聪明。

解：首先将原子命题符号化：

P：王强很勤奋。

Q：王强很聪明。

则(1)和(2)都可以符号化为 $P\wedge Q$。(3)则应该符号化为 $\neg P\wedge Q$。

需要注意的是，合取的概念与自然语言中的"和"或者"与"的意思相似，但并不完全相同。例如：

P：5是奇数。

Q：牛顿是英国人。

上述命题的合取为

$P\wedge Q$：5是奇数与牛顿是英国人。

这句话在自然语言中是没有意义的，但是作为数理逻辑中 P 和 Q 合取 $P\wedge Q$ 来说，它仍然可以作为一个新的命题。并且，由于这里 P 和 Q 的真值都为 T，所以 $P\wedge Q$ 的真值也为 T。显然，新构成的复合命题同样是一个命题，而且具有唯一的真值。

由此可以看到，在命题逻辑中，我们并不关心用联结词联系起来的几个命题之间是否具有内在的实质联系，我们关心的是命题的真值情况。

另外，有些自然语言中的"和"或者"与"表示简单命题，不能用合取来表示。例如，命题：

P：刘鹏和刘翔是兄弟。

因为"刘鹏是兄弟"和"刘翔是兄弟"都不能成为一个命题，所以命题 P 是一个原子命题，不能用合取表示为复合命题。

定义 1.3 设 P、Q 为任意两个命题，复合命题"P 或 Q"称作 P 与 Q 的**析取式**，记作 $P\vee Q$，符号 $\vee$ 称为**析取联结词**。

$P\vee Q$ 的逻辑关系为 P 与 Q 中至少一个成立，因而 $P\vee Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 中至少一个为真。换言之，只有当 P 和 Q 都为假的时候 $P\vee Q$ 的真值才取假。

析取联结词的定义也可以用表 1.3 来表示。

表 1.3 析取联结词的真值表

P	Q	$P\vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

例 1.6 将下列命题符号化。

(1) 张华学过英语或法语。

(2) 王伟是足球运动员或排球运动员。

上述两个命题都可以用析取式 $P \vee Q$ 表示。

请注意,并不是所有的自然语言中的"或"都可以直接用析取来表示。有些自然语言中的"或"与数理逻辑中的析取并不完全对应。

例如,当我们说"小王在图书馆或运动场"的时候,因为小王某一时间只能出现在一个位置,所以"P:小王在图书馆"和"Q:小王在运动场"这两个命题不可能同时取真,所以不能简单地使用 $P \vee Q$ 来翻译该命题,而必须将该命题符号化为 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$,表示"小王在图书馆不在运动场或者小王不在图书馆在运动场"。将这种两个命题不能同时成立的"或"称为"不可兼或"。

这一类的例子还有很多。例如:

这个星期二是 16 号或者 17 号。

武昌到北京的 Z38 次列车是晚上 7 点或者 8 点出发。

定义 1.4 设 P、Q 为两个命题,其**条件命题**是一个复合命题,记作 $P \to Q$,读作"如果 P,则 Q"。$\to$称作**条件联结词**。称 P 是命题的**前件**,Q 是命题的**后件**。

$P \to Q$ 为假当且仅当 P 为真且 Q 为假。

条件联结词的定义也可以用表 1.4 来表示。

表 1.4 条件联结词的真值表

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

从表 1.4 可以看出,条件命题 $P \to Q$ 的前件 P 为假时,不论后件 Q 是真是假,$P \to Q$ 均为真。这一点与自然语言中的"如果……那么……"是不同的。在自然语言中,通常要求"如果……"为真,才能进行某种判断,当"如果……"为假时,往往无法判断。在这里,把命题逻辑中的这种前件为假的情况称为"善意的推定"。

在自然语言中,"如果……"与"那么……"之间常常是有因果关系的,否则就没有意义,但是对于数理逻辑中的条件命题 $P \to Q$ 来说,只要 P、Q 能分别确定真值,$P \to Q$ 即成为命题。

例 1.7

(1) 只要你认真学习,就能学好离散数学这门课。

(2) 如果太阳从西边升起,那么乌鸦是白色的。

(3) 如果 $5+4=7$,则今天是星期天。

以上 3 个句子都能采用条件命题 $P \to Q$ 的形式表达出来。虽然(2)和(3)命题中的前件和后件之间没有直接的联系,但是条件命题的真值都是确定的。所以,这两句话都是命题,而且都是真命题。

定义 1.5 设 P、Q 为两个命题,复合命题 $P \leftrightarrow Q$ 称作 P 与 Q 的**双条件命题**,读作"P 当且仅当 Q"。$\leftrightarrow$称作**双条件联结词**。

$P \leftrightarrow Q$ 的逻辑关系是 P 与 Q 互为充分必要条件。$P \leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 的真值相同。很容易发现,$P \leftrightarrow Q$ 与 $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ 的逻辑关系一致。关于这一点,将在后面予以证明。

双条件联结词与 P、Q 的真值关系也可以用表 1.5 来表示。

表 1.5 双条件联结词的真值表

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

例 1.8

(1) 3+5=8 当且仅当国庆节是十月一日。

(2) 一个三角形是等边三角形当且仅当三角形的内角均为 60°。

不难看出，以上两个例子都可以用双条件命题 $P\leftrightarrow Q$ 来表示。

以上定义了5种最基本、最常用的联结词，它们构成了一个联结词的集合：$\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$，其中$\neg$是一元联结词符号，其余的都是二元联结词符号。

以上 5 个联结词的真值情况总结在表 1.6 中，以方便读者记忆。

表 1.6 联结词的真值表

P	Q	$\neg P$	$P\wedge Q$	$P\vee Q$	$P\rightarrow Q$	$P\leftrightarrow Q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

1.2 命题的合式公式和翻译

1.2.1 命题公式

1.1 节介绍了命题变元的概念并采用基本的命题联结词对较简单的复合命题进行了命题的符号化。为了解决更复杂的命题表示和演算的问题，需要对公式的构成法则进行一些规定。

由命题变元、命题联结词和圆括号所组成的字符串可构成命题公式，但是并不是由这 3 类符号所组成的任何符号串都能成为命题公式。下面给出有效的命题逻辑演算的公式的概念。

定义 1.6 命题演算的合式公式规定为：

(1) 单个的命题变元本身是一个合式公式；

(2) 若 A 是合式公式，则 $\neg A$ 也是合式公式；

(3) 若 A、B 是合式公式，则 $A\wedge B$、$A\vee B$、$A\rightarrow B$ 和 $A\leftrightarrow B$ 也是合式公式；

(4) 只有有限次地应用(1)～(3)形成的符号串才是合式公式。

这个合式公式的定义是以递归形式给出的。其中(1)称为基础，它约定了最基本的命题公式，即单个命题变元。(2)和(3)称为归纳，它约定了形成命题公式的基本规则，即进行 5 种基本的命题逻辑联结词的演算。(4)称为界限，它约定了合式公式只能通过有限次地应用(1)、(2)、(3)才能得到。

合式公式也称为**命题公式**，简称**公式**。

为了简便起见，通常省略最外层的括号。为了运算的方便，一般规定联结词的优先次序由高到低分别为$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$。

例 1.9 根据上面定义，请判断下列哪些公式是合式公式。

(1) $Q\rightarrow(P\rightarrow\neg R)$

(2) $PQ\rightarrow R$

(3) $\neg(P\wedge Q)$

(4) $P\wedge Q\wedge\rightarrow\neg P$

(5) $(Q\rightarrow)\vee(P\wedge Q)$

(6) $(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow\neg R)\wedge(\neg R\rightarrow(P\vee Q))$

解：根据合式公式的定义，不难看出(1)、(3)、(6)都是合式公式，而(2)、(4)、(5)都不是合式公式。

由以上的定义和例子可以看到：命题公式本身是没有真值的，只有对命题公式的变元进行指派之后，公式才有真值。

1.2.2 命题公式的翻译

数理逻辑中推理的对象都是命题及公式。有了合式公式的概念，就能够把自然语言中的许多语句翻译成数理逻辑中的符号形式，并根据需要进行运算。

例 1.10 将下列命题符号化。

(1) 李平既会唱歌又会跳舞。

(2) 李平会唱歌，但不会跳舞。

(3) 李平既不会唱歌，又不会跳舞。

解：命题符号化的基础是首先将原子命题符号化，在此首先找出原子命题：

P：李平会唱歌。

Q：李平会跳舞。

不难发现，虽然上面3个命题采用的叙述形式不相同，但是都包含了合取的含义。则根据句子的意思，以上3个命题可以分别符号化为

(1) $P\wedge Q$

(2) $P\wedge\neg Q$

(3) $\neg P\wedge\neg Q$

在自然语言中，有许多语句表达的其实是相同的逻辑关系。例如，"只要P，就Q"，"因为P，所以Q"，"除非Q，才P"，"除非Q，否则非P"等。这些语句表达的都是Q是P的必要条件，因而都可以符号化为$P\rightarrow Q$。

例 1.11 除非你努力，否则你将失败。

解：这个命题的意义，也可以理解成：如果你不努力，那么你将失败。

首先对原子命题符号化。设

P：你努力。

Q：你失败。

本例可以表示为

$\neg P\rightarrow Q$

还可以将一些更加复杂的句子符号化。

例 1.12 将下列命题符号化。

小王在图书馆看书，除非今天是星期天或者小王在上课。

解：设

P：小王在图书馆看书。

Q：今天是星期天。

R：小王在上课。

则该句应该翻译为

$\neg(Q \vee R) \rightarrow P$

例 1.13 设 P、Q、R 的意义如下：

P：苹果是甜的。

Q：苹果是红的。

R：我买苹果。

请用自然语言描述以下复合命题：

(1) $(P \wedge Q) \rightarrow R$

(2) $(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg R$

解：

(1) 如果苹果是红的而且很甜，那么我就买苹果。

(2) 苹果既不红又不甜，所以我没买苹果。

命题符号化是数理逻辑中的一个基础，特别是命题推理中不可或缺的重要步骤，请读者多加练习，熟练掌握。

1.2.3 真值表

前面在介绍联结词的时候使用了很多列出真值的组合情况的表，并没有给出定义，这里给出这些表的定义。

定义 1.7 在命题公式中，对于分量指派真值的各种可能的组合，就确定了这个命题公式的各种真值情况，把它汇列成表，就是命题公式的**真值表**。

一个公式不是命题，因此也没有真值。如果把公式中的所有原子命题变元都替换成命题，可以得到一个相应的真值。逐个写出原子命题变元的真值，根据不同的命题联结词的运算规则，则可得到更复杂的合式公式的真值情况。

例如，可以将前面已经讨论过的基本命题联结词的真值列表出来。

例 1.14 写出 5 个基本联结词的真值表。

真值表如表 1.7 所示。

表 1.7 联结词的真值表

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T