

英文版·原书第4版

PEARSON

时代教育·国外高校优秀教材精选

工程中的有限元方法

(美) T. R. 钱德拉佩特拉 (Tirupathi R. Chandrupatla) 著
A. D. 贝莱冈度 (Ashok D. Belegundu)

INTRODUCTION TO
FINITE ELEMENTS IN ENGINEERING



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

时代教育·国外高校优秀教材精选

工程中的有限元方法

Introduction to Finite Elements in Engineering

(英文版·原书第4版)

T. R. 钱德拉佩特拉
(美) (Tirupathi R. Chandrupatla) 著
A. D. 贝莱风度
(Ashok D. Belegundu)



机械工业出版社

Original edition, entitled INTRODUCTION TO FINITE ELEMENTS IN ENGINEERING. 4E. 9780132162746 by CHANDRUPATLA, TIRUPATHI R. ; BELEGUNDU, ASHOK D. , published by Pearson International Limited, Copyright © 2012 by Pearson Higher Education, Inc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

China edition published by PEARSON EDUCATION ASIA LTD. , and CHINA MACHINE PRESS Copyright © 2013.

This edition is manufactured in the People's Republic of China, and is authorized for sale and distribution in the People's Republic of China exclusively (except Taiwan, Hong Kong SAR and Macao SAR).

本书影印版由培生教育出版集团 (Pearson Education) 授权给机械工业出版社出版发行。

本书封面贴有 Pearson Education (培生教育出版集团) 激光防伪标签, 无标签者不得销售。

授权版本仅在中华人民共和国境内 (中国台湾地区、中国香港、澳门特别行政区除外) 销售。

北京市版权局著作权合同登记号: 图字 01-2013-0608

图书在版编目 (CIP) 数据

工程中的有限元方法: 第4版: 英文/ (美) 钱德拉佩特拉 (Chandrupatla, T. R.) 等著. —北京: 机械工业出版社, 2013. 6

时代教育·国外高校优秀教材精选

ISBN 978-7-111-43091-9

I. ①工… II. ①钱… III. ①有限元法—应用—工程技术—高等学校—教材—英文 IV. ①TB115

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 144587 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 刘小慧 责任编辑: 刘小慧 丁昕祯

版式设计: 霍永明 封面设计: 张 静

北京振兴源印务有限公司印刷

2013 年 11 月第 1 版第 1 次印刷

180mm×235mm · 32.25 印张 · 630 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-43091-9

定价: 66.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心: (010) 88361066

教材网: <http://www.cmpedu.com>

销售一部: (010) 68326294

机工官网: <http://www.cmpbook.com>

销售二部: (010) 88379649

机工官博: <http://weibo.com/cmp1952>

读者购书热线: (010) 88379203

封面防伪标均为盗版

目 录

序

前言

第 1 章 基本概念	17	3.6 整体刚度矩阵和载荷列阵的集成	82
1.1 引言	17	3.7 刚度矩阵 K 的性质	85
1.2 历史背景	17	3.8 有限元方程: 边界条件的处理	86
1.3 本书概要	18	3.9 二次形状函数	101
1.4 应力与平衡方程	18	3.10 温度效应	108
1.5 边界条件	20	3.11 实际问题的建模与边界条件的施加	112
1.6 应变位移关系	21	习题	115
1.7 应力应变关系	22	程序清单	127
1.8 温度效应	24	第 4 章 桁架	133
1.9 势能与平衡方程: Rayleigh-Ritz 法	25	4.1 引言	133
1.10 Galerkin 方法	30	4.2 平面桁架问题	134
1.11 圣维南原理	34	4.3 三维桁架问题	145
1.12 Von Mises 应力	35	4.4 带状法和特征顶线法组装整体刚度矩阵	147
1.13 叠加原理	35	4.5 实际问题的建模与边界条件的施加	150
1.14 计算机程序	36	习题	155
1.15 小结	36	程序清单	163
历史性文献	36	第 5 章 梁和框架结构	166
习题	37	5.1 引言	166
第 2 章 矩阵代数与高斯消元法	44	5.2 有限元列式	169
2.1 矩阵代数	44	5.3 载荷列阵	174
2.2 高斯消元法	51	5.4 边界条件的考虑	175
2.3 方程求解的共轭梯度法	61	5.5 剪切力和弯矩	176
习题	63	5.6 具有弹性支承的梁	178
程序清单	65	5.7 平面框架	179
第 3 章 一维问题	67	5.8 三维框架	185
3.1 概述	67	5.9 实际问题的建模与边界条件的施加	189
3.2 建立有限元模型	68	5.10 评论	190
3.3 形状函数与局部坐标	71	习题	192
3.4 势能方法	75		
3.5 Galerkin 方法	80		

程序清单	199	9.6 问题的建模	340
第6章 三角形常应变单元与二维问题求解	204	9.7 有限元矩阵的波前法	342
6.1 引言	204	习题	348
6.2 有限元模型	205	程序清单	352
6.3 常应变三角形单元 (CST)	207	第10章 标量场问题	361
6.4 实际问题的建模与边界条件的施加	228	10.1 引言	361
6.5 拼片试验与收敛性	231	10.2 稳态热传导问题	362
6.6 正交各向异性材料	232	10.3 扭转	386
习题	241	10.4 位势流、渗流、电磁场以及管道中的流动问题	392
程序清单	254	10.5 小结	405
第7章 轴对称问题	258	习题	407
7.1 引言	258	程序清单	418
7.2 轴对称列式	259	第11章 动力学分析	424
7.3 有限元建模: 三角形单元	261	11.1 引言	424
7.4 实际问题的建模与边界条件的施加	272	11.2 基本公式	424
习题	279	11.3 单元质量矩阵	427
程序清单	287	11.4 特征值与特征向量的求解	432
第8章 二维等参单元与数值积分	289	11.5 与有限元程序的接口及确定轴旋转临界速度的程序	448
8.1 引言	289	11.6 Guyal 缩减	449
8.2 四节点四边形单元	289	11.7 刚体模态	452
8.3 数值积分	295	11.8 小结	454
8.4 高阶单元	302	习题	456
8.5 轴对称问题中的四节点四边形单元	310	程序清单	462
8.6 四边形单元的共轭梯度法	311	第12章 前处理和后处理	469
8.7 关于收敛性的主要结论	311	12.1 引言	469
8.8 有关收敛性方面的参考文献	313	12.2 网格的生成	469
习题	316	12.3 后处理	477
程序清单	324	12.4 小结	482
第9章 应力分析中的三维问题	328	习题	484
9.1 引言	328	程序清单	486
9.2 有限元分析列式	329	附录 $dA = \det J d\xi d\eta$ 的证明	499
9.3 应力的计算	333	参考文献	502
9.4 网格划分	334	部分习题答案	506
9.5 六面体单元和高阶单元	338	索引	508

时代教育·国外高校优秀教材精选

工程中的有限元方法

Introduction to Finite Elements in Engineering

(英文版·原书第4版)

T. R. 钱德拉佩特拉

(Tirupathi R. Chandrupatla)

(美)

A. D. 贝莱风度

(Ashok D. Belegundu)

著



机械工业出版社

Original edition, entitled INTRODUCTION TO FINITE ELEMENTS IN ENGINEERING. 4E. 9780132162746 by CHANDRUPATLA, TIRUPATHI R. ; BELEGUNDU, ASHOK D. , published by Pearson International Limited, Copyright © 2012 by Pearson Higher Education, Inc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

China edition published by PEARSON EDUCATION ASIA LTD. , and CHINA MACHINE PRESS Copyright © 2013.

This edition is manufactured in the People's Republic of China, and is authorized for sale and distribution in the People's Republic of China exclusively (except Taiwan, Hong Kong SAR and Macao SAR).

本书影印版由培生教育出版集团 (Pearson Education) 授权给机械工业出版社出版发行。

本书封面贴有 Pearson Education (培生教育出版集团) 激光防伪标签, 无标签者不得销售。

授权版本仅在中华人民共和国境内 (中国台湾地区、中国香港、澳门特别行政区除外) 销售。

北京市版权局著作权合同登记号: 图字 01-2013-0608

图书在版编目 (CIP) 数据

工程中的有限元方法: 第4版: 英文/ (美) 钱德拉佩特拉 (Chandrupatla, T. R.) 等著. —北京: 机械工业出版社, 2013. 6

时代教育·国外高校优秀教材精选

ISBN 978-7-111-43091-9

I. ①工… II. ①钱… III. ①有限元法—应用—工程技术—高等学校—教材—英文 IV. ①TB115

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 144587 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 刘小慧 责任编辑: 刘小慧 丁昕祯

版式设计: 霍永明 封面设计: 张 静

北京振兴源印务有限公司印刷

2013 年 11 月第 1 版第 1 次印刷

180mm × 235mm · 32. 25 印张 · 630 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-43091-9

定价: 66.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心: (010) 88361066

教材网: <http://www.cmpedu.com>

销售一部: (010) 68326294

机工官网: <http://www.cmpbook.com>

销售二部: (010) 88379649

机工官博: <http://weibo.com/cmp1952>

读者购书热线: (010) 88379203

封面无防伪标均为盗版

序

本书是近年来在国际上有限元分析教学方面具有较大影响的大学教材之一。它的显著特点是：在介绍有限元方法基本原理的同时，提供相应的工程背景和建模技巧，书中所给的实例和习题几乎都对应或涉及实际工程背景，使读者在学习过程中就能体会和了解实际问题的有限元建模过程，可以说这正是有限元分析的重要目的之一。

本书的作者 T. R. 钱德拉佩特拉博士 (Tirupathi R. Chandrupatla) 为美国罗文大学 (Rowan University) 机械工程系的教授和主任，曾在工业界从事机械设计工作，具有丰富的工程实际经验，也开展了有限元方法方面的学术研究。他长期从事有限元方面的教学工作，形成了在有限元教学中基本理论与实际工程相结合的显著特点。另一位作者 A. D. 贝莱冈度博士 (Ashok D. Belegundu) 在宾夕法尼亚州立大学 (The Pennsylvania State University) 执教，从事机械系统及设计方面的研究，在结构有限元分析及优化方面发表了许多学术论文，在学术和教学方面都有较大的影响。

T. R. 钱德拉佩特拉博士与 A. D. 贝莱冈度博士合作，于 1991 年写出了本书的第 1 版，由于特点鲜明而在大学中广受欢迎和赞誉，取得了很好的教学效果。1997 年出版了本书的第 2 版，2002 年又由培生出版社 (Prentice-Hall) 出版了第 3 版，2012 年由培生教育出版集团 (Pearson) 出版了本书的第 4 版，并且作了以下调整：

- 1) 增加了叠加原理的表述。
- 2) 增加了对称结构及反对称结构的建模及处理。
- 3) 增加了例题及习题。
- 4) 将原来的第 8 章 (梁及框架结构) 移到第 5 章 (桁架结构) 之后。
- 5) 提供修改后的 VB 源程序。
- 6) 提供基于 JavaScript 脚本的程序 (便于在网络上运行)。

本书的第 3 版于 2005 年由机械工业出版社引进并出版了影印版，已进行了多次印刷，取得了很好的社会及市场效果。目前的新版完全保留了前版的特点，所作的调整更能反映有限元方法的工程及适用属性，特别考虑了课程教学的特点，注重方法原理的论述与实用例题的展示，提供了 300 多个图示和大量的实例，在新版本中提供了所有的计算机程序源代码。

本书写作流畅，推导严谨，实例丰富，特别注重实用性，可以作为机械、力学、土木、水利、航空航天等专业的学生开展有限元方法学习的英文教材，也可与随后出版的翻译版结合起来使用，作为双语课程的教材。

曾 攀
清华大学机械工程系教授

前言

本书的第1版在20多年以前问世，几年之后出版了第2版和第3版。本书曾被翻译成西班牙语、韩语、希腊语和汉语。我们收到了来自使用该书的教授、学生和从事实际工作的工程师的正面反馈意见，也了解到在过去30年中我们学校的学生使用本书的各方面情况。本书的基本出发点是提供有限元方法的清晰理论、建模方法以及具体的计算机实现程序，在这一版充分考虑了许多建议，保留了以前版本的特点，并在一些方面有所改进。

本书在以下方面作了调整：

- 1) 介绍叠加原理。
- 2) 对称与反对称问题的处理。
- 3) 提供更多的例题和习题。
- 4) 拼片试验。
- 5) 将梁和框架结构的章节移至桁架章节之后。
- 6) 修订了 Excel VB 编程。
- 7) 提供可在网页浏览器 IE、Firefox、Chrome、Safari 上运行的 JavaScript 程序。
- 8) 提供与有限元编程衔接的图形处理运行程序。

许多章节中还增加了一些新的材料，补充了实际算例和练习题，以帮助读者更好地学习和理解，而练习题更强调基本理论的理解和实际问题的考虑；在前面几章中增加了实际问题的建模，在第1章增加了叠加原理，并清晰阐述了二维问题中对称和反对称情形的处理方法，增加了例题和练习题，并增加了对拼片试验和相关问题的讨论。所提供的程序都具有相同的编程结构，以方便读者仿照使用。同时还增加了 JavaScript 程序，使得读者可以采用 IE、Firefox、Chrome 或 Safari 等网页浏览器进行有限元问题的求解。所有程序都经过认真的检查，可下载程序包中包括了涉及图形程序的可执行版本。程序所采用的语言包括：Visual Basic、Microsoft Excel/Visual Basic、MATLAB、JavaScript，以及早期使用的 QBASIC、FORTRAN 和 C，相应的求解手册也作了更新。

第1章简要介绍有限元方法的历史背景和基本概念，对平衡方程、应力应变关系、应变位移关系和势能原理进行评述，引入伽辽金（Galerkin）方法的概念。

第2章介绍矩阵和行列式的性质，引入高斯（Gauss）消元法，讨论对称带状矩阵方程的求解和带状矩阵“特征顶线”（skyline）的处理方法，对平方根（Cholesky 分解）法和共轭梯度法也作了讨论。

第3章通过对一维问题的分析来介绍有限元方法的基本概念和表达式，涉及有限元分析的主要步骤：形状函数的表达、单元刚度矩阵的推导、整体刚度矩阵的形成、边界条件的处理、方程的求解以及应力计算；同时给出了基于势能方法和伽辽金（Galerkin）方法的表达形式，而且考虑了温度效应的处理。

第4章给出平面及三维桁架问题的有限元表达，对于整体刚度矩阵的组装，分别给出带状矩阵和具有“特征顶线”矩阵的形式，还提供了基于这两种形式进行求解的计算机程序。

第5章讨论梁单元及埃尔米特（Hermite）形状函数的应用，涉及二维及三维框架结构。

第6章介绍用于二维平面应力和平面应变问题求解的常应变三角形单元（CST），详细给出问题的建模过程及边界条件的处理方法，对于正交各向异性材料也给出相应的处理方法。

第7章介绍轴对称物体在承受轴对称外载时的建模过程，给出相应的三角形单元表达式，还提

供几个实际问题的处理方法。

第8章介绍四边形单元和高阶单元的基本概念以及采用高斯方法进行面积积分的数值方法,给出轴对称四边形单元的表达式以及基于共轭梯度法求解的过程。

第9章为三维应力分析,包括四面体单元和六面体单元,还介绍波前法的求解及实现过程。

第10章详细介绍标量场问题的处理,在其他各章中均将伽辽金方法和能量原理作为有限元方法推导的基本原理,在本章中仅采用伽辽金方法来进行推导。采用该方法可以直接对所给出的微分方程进行处理,而无需定义一个用来求最小值的等效泛函。该章分别就稳态热传导、扭转、一般流动、渗流、电磁场、管道中流动、声学等问题给出相应的伽辽金方法表达式。

第11章为动力学问题,给出单元质量矩阵表达,对一般特征值问题的特征值(自然率频)、特征向量(模态形状)的求解进行讨论,给出求逆迭代法、雅可比(Jacobi)法、三对角化法以及显式漂移法等求解方法。

第12章介绍前处理及后处理的概念,给出二维问题网格自动划分的原理及实现方法,对于三角形和四边形单元给出由单元值求取节点应力的最小二乘方法,还介绍了后处理中的等直线技术。

对于大学本科生来说,书中一些较深的内容可以忽略,或根据某一新的完整内容体系,按需要来采用本书的材料,建议并鼓励在学习完第6章后就开始使用第12章中的程序,这样可以帮助读者高效率地准备各种有限元分析的数据。

我们对北卡罗莱纳-夏洛特分校(UNC Charlotte)机械工程系方宏兵(音译)(Hongbing Fang)教授、新泽西州霍博肯史蒂文斯技术学院(Stevens Institute of Technology, Hoboken, New Jersey)机械工程系K·普切尔(Kishore Pochiraju)教授、亚利桑那州立大学艾拉答富尔顿工学院(Arizona State University, Ira A. Fulton)S.拉赞(Subramanian Rajan)教授、密歇根州劳伦斯理工大学(Lawrence Technological University, Michigan)机械工程系C.H.利多尔(Chris H. Reidel)教授、康奈尔大学(Cornell University)锡布利(Sibley)机械与航空学院N.J.扎巴拉(Nicholas J. Zabararas)教授表示感谢,他们对本书第3版进行了审阅并提出许多建设性的意见,这些对我们有很好的帮助作用。

本书自带的采用Visual Basic、Excel-based Visual Basic、MATLAB、FORTRAN、JavaScript和C语言编写的计算源代码,可以由网页www.pearsonhighered.com/chandrupatla获得。

本书作者T.R.钱德拉佩特拉对J.廷斯利·奥登(J. Tinsley Oden)表示感谢,正是他的教导和鼓励影响了作者本人的一生,还要感谢在罗文大学(Rowan University)和凯特林大学(Kettering University)就读的学习该课程的学生;感谢同事P.冯罗克特(Paris von Lockette)在本书第2版和第3版出版后的教学活动中所提出的富有价值的意见。

本书作者A.D.贝莱冈度感谢他在宾夕法尼亚州立大学的学生们,他们对本书和程序提出了很好的建议。

感谢M.霍顿(Marcia Horton)对本版本和先前版本所给予的指导,感谢培生出版社(Prentice Hall)的编辑们:N.迪亚斯(Norrin Dias)、T.奎恩(Tacy Quinn)、D.亚内尔(Debbie Yarnell)和C.罗密欧(Clare Romeo)。正是他们才使得本书的编写工作变得如此愉快。感谢项目主管M.潘·沙拉万南(Maheswari Pon Saravanan)和她在印度TexTech International Chennai的团队,他们高效地完成了编辑和文稿校对工作。

T. R. 钱德拉佩特拉
A. D. 贝莱冈度

目 录

序

前言

第 1 章 基本概念	17	3.6 整体刚度矩阵和载荷列阵的集成	82
1.1 引言	17	3.7 刚度矩阵 K 的性质	85
1.2 历史背景	17	3.8 有限元方程: 边界条件的处理	86
1.3 本书概要	18	3.9 二次形状函数	101
1.4 应力与平衡方程	18	3.10 温度效应	108
1.5 边界条件	20	3.11 实际问题的建模与边界条件的施加	112
1.6 应变位移关系	21	习题	115
1.7 应力应变关系	22	程序清单	127
1.8 温度效应	24	第 4 章 桁架	133
1.9 势能与平衡方程: Rayleigh-Ritz 法	25	4.1 引言	133
1.10 Galerkin 方法	30	4.2 平面桁架问题	134
1.11 圣维南原理	34	4.3 三维桁架问题	145
1.12 Von Mises 应力	35	4.4 带状法和特征顶线法组装整体刚度矩阵	147
1.13 叠加原理	35	4.5 实际问题的建模与边界条件的施加	150
1.14 计算机程序	36	习题	155
1.15 小结	36	程序清单	163
历史性文献	36	第 5 章 梁和框架结构	166
习题	37	5.1 引言	166
第 2 章 矩阵代数与高斯消元法	44	5.2 有限元列式	169
2.1 矩阵代数	44	5.3 载荷列阵	174
2.2 高斯消元法	51	5.4 边界条件的考虑	175
2.3 方程求解的共轭梯度法	61	5.5 剪切力和弯矩	176
习题	63	5.6 具有弹性支承的梁	178
程序清单	65	5.7 平面框架	179
第 3 章 一维问题	67	5.8 三维框架	185
3.1 概述	67	5.9 实际问题的建模与边界条件的施加	189
3.2 建立有限元模型	68	5.10 评论	190
3.3 形状函数与局部坐标	71	习题	192
3.4 势能方法	75		
3.5 Galerkin 方法	80		

程序清单	199	9.6 问题的建模	340
第6章 三角形常应变单元与二维问题求解	204	9.7 有限元矩阵的波前法	342
6.1 引言	204	习题	348
6.2 有限元模型	205	程序清单	352
6.3 常应变三角形单元 (CST)	207	第10章 标量场问题	361
6.4 实际问题的建模与边界条件的施加	228	10.1 引言	361
6.5 拼片试验与收敛性	231	10.2 稳态热传导问题	362
6.6 正交各向异性材料	232	10.3 扭转	386
习题	241	10.4 位势流、渗流、电磁场以及管道中的流动问题	392
程序清单	254	10.5 小结	405
第7章 轴对称问题	258	习题	407
7.1 引言	258	程序清单	418
7.2 轴对称列式	259	第11章 动力学分析	424
7.3 有限元建模: 三角形单元	261	11.1 引言	424
7.4 实际问题的建模与边界条件的施加	272	11.2 基本公式	424
习题	279	11.3 单元质量矩阵	427
程序清单	287	11.4 特征值与特征向量的求解	432
第8章 二维等参单元与数值积分	289	11.5 与有限元程序的接口及确定轴旋转临界速度的程序	448
8.1 引言	289	11.6 Guyal 缩减	449
8.2 四节点四边形单元	289	11.7 刚体模态	452
8.3 数值积分	295	11.8 小结	454
8.4 高阶单元	302	习题	456
8.5 轴对称问题中的四节点四边形单元	310	程序清单	462
8.6 四边形单元的共轭梯度法	311	第12章 前处理和后处理	469
8.7 关于收敛性的主要结论	311	12.1 引言	469
8.8 有关收敛性方面的参考文献	313	12.2 网格的生成	469
习题	316	12.3 后处理	477
程序清单	324	12.4 小结	482
第9章 应力分析中的三维问题	328	习题	484
9.1 引言	328	程序清单	486
9.2 有限元分析列式	329	附录 $dA = \det J d\xi d\eta$ 的证明	499
9.3 应力的计算	333	参考文献	502
9.4 网格划分	334	部分习题答案	506
9.5 六面体单元和高阶单元	338	索引	508

Contents

PREFACE	13
ABOUT THE AUTHORS	16
1 FUNDAMENTAL CONCEPTS	17
1.1 Introduction	17
1.2 Historical Background	17
1.3 Outline of Presentation	18
1.4 Stresses and Equilibrium	18
1.5 Boundary Conditions	20
1.6 Strain–Displacement Relations	21
1.7 Stress–Strain Relations	22
<i>Special Cases,</i>	<i>23</i>
1.8 Temperature Effects	24
1.9 Potential Energy and Equilibrium: The Rayleigh–Ritz Method	25
<i>Potential Energy, Π,</i>	<i>25</i>
<i>Rayleigh–Ritz Method,</i>	<i>28</i>
1.10 Galerkin’s Method	30
1.11 Saint Venant’s Principle	34
1.12 Von Mises Stress	35
1.13 Principle of Superposition	35
1.14 Computer Programs	36
1.15 Conclusion	36
Historical References	36
Problems	37
2 MATRIX ALGEBRA AND GAUSSIAN ELIMINATION	44
2.1 Matrix Algebra	44
<i>Row and Column Vectors,</i>	<i>45</i>
<i>Addition and Subtraction,</i>	<i>45</i>
<i>Multiplication by a Scalar,</i>	<i>45</i>
<i>Matrix Multiplication,</i>	<i>45</i>
<i>Transposition,</i>	<i>46</i>
<i>Differentiation and Integration,</i>	<i>46</i>
<i>Square Matrix,</i>	<i>47</i>
<i>Diagonal Matrix,</i>	<i>47</i>
<i>Identity Matrix,</i>	<i>47</i>
<i>Symmetric Matrix,</i>	<i>48</i>
<i>Upper Triangular Matrix,</i>	<i>48</i>
<i>Determinant of a Matrix,</i>	<i>48</i>
<i>Matrix Inversion,</i>	<i>48</i>

	<i>Eigenvalues and Eigenvectors, 49</i>	
	<i>Positive Definite Matrix, 51</i>	
	<i>Cholesky Decomposition, 51</i>	
2.2	Gaussian Elimination 51	
	<i>General Algorithm for Gaussian Elimination, 53</i>	
	<i>Symmetric Matrix, 56</i>	
	<i>Symmetric Banded Matrices, 56</i>	
	<i>Solution with Multiple Right Sides, 58</i>	
	<i>Gaussian Elimination with Column Reduction, 58</i>	
	<i>Skyline Solution, 60</i>	
	<i>Frontal Solution, 61</i>	
2.3	Conjugate Gradient Method for Equation Solving 61	
	<i>Conjugate Gradient Algorithm, 62</i>	
	<i>Input Data/Output, 62</i>	
	Problems 63	
	<i>Program Listings, 65</i>	
3	ONE-DIMENSIONAL PROBLEMS	67
3.1	Introduction 67	
3.2	Finite Element Modeling 68	
	<i>Element Division, 68</i>	
	<i>Numbering Scheme, 69</i>	
3.3	Shape Functions and Local Coordinates 71	
3.4	The Potential-Energy Approach 75	
	<i>Element Stiffness Matrix, 76</i>	
	<i>Force Terms, 78</i>	
3.5	The Galerkin Approach 80	
	<i>Element Stiffness, 80</i>	
	<i>Force Terms, 81</i>	
3.6	Assembly of the Global Stiffness Matrix and Load Vector 82	
3.7	Properties of K 85	
3.8	The Finite Element Equations: Treatment	
	of Boundary Conditions 86	
	<i>Types of Boundary Conditions, 86</i>	
	<i>Elimination Approach, 87</i>	
	<i>Penalty Approach, 92</i>	
	<i>Multipoint Constraints, 98</i>	
3.9	Quadratic Shape Functions 101	
3.10	Temperature Effects 108	
3.11	Problem Modeling and Boundary Conditions 112	
	<i>Problem in Equilibrium, 112</i>	
	<i>Symmetry, 113</i>	
	<i>Two Elements with Same End Displacements, 113</i>	
	<i>Problem with a Closing Gap, 114</i>	
	<i>Input Data/Output, 114</i>	
	Problems 115	
	<i>Program Listing, 127</i>	

4 TRUSSES**133**

- 4.1 Introduction 133
- 4.2 Plane Trusses 134
 - Local and Global Coordinate Systems, 134*
 - Formulas for Calculating ℓ and m , 135*
 - Element Stiffness Matrix, 136*
 - Stress Calculations, 137*
 - Temperature Effects, 142*
- 4.3 Three-Dimensional Trusses 145
- 4.4 Assembly of Global Stiffness Matrix for the Banded and Skyline Solutions 147
 - Assembly for Banded Solution, 147*
 - Skyline Assembly, 148*
- 4.5 Problem Modeling and Boundary Conditions 150
 - Inclined Support in Two Dimensions, 150*
 - Inclined Support in Three Dimensions—Line Constraint, 150*
 - Inclined Support in Three Dimensions—Plane Constraint, 151*
 - Symmetry and Antisymmetry, 152*
 - Input Data/Output, 154*
- Problems 155
 - Program Listing, 163*

5 BEAMS AND FRAMES**166**

- 5.1 Introduction 166
 - Potential-Energy Approach, 167*
 - Galerkin Approach, 168*
- 5.2 Finite Element Formulation 169
 - Element Stiffness—Direct Approach, 173*
- 5.3 Load Vector 174
- 5.4 Boundary Considerations 175
- 5.5 Shear Force and Bending Moment 176
- 5.6 Beams on Elastic Supports 178
- 5.7 Plane Frames 179
- 5.8 Three-Dimensional Frames 185
- 5.9 Problem Modeling and Boundary Conditions 189
- 5.10 Some Comments 190
 - Input Data/Output, 190*
- Problems 192
 - Program Listings, 199*

6 TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS USING CONSTANT STRAIN TRIANGLES**204**

- 6.1 Introduction 204
- 6.2 Finite Element Modeling 205
- 6.3 Constant Strain Triangle (CST) 207
 - Isoparametric Representation, 208*
 - Potential-Energy Approach, 214*
 - Element Stiffness, 214*

	<i>Force Terms, 215</i>	
	<i>Integration Formula on a Triangle, 222</i>	
	<i>Galerkin Approach, 222</i>	
	<i>Stress Calculations, 224</i>	
	<i>Temperature Effects, 226</i>	
6.4	Problem Modeling and Boundary Conditions 228	
	<i>Some General Comments on Dividing into Elements, 231</i>	
6.5	Patch Test and Convergence 231	
	<i>Patch Test, 231</i>	
6.6	Orthotropic Materials 232	
	<i>Temperature Effects, 236</i>	
	<i>Input Data/Output, 238</i>	
	Problems 241	
	<i>Program Listing, 254</i>	
7	AXISYMMETRIC SOLIDS SUBJECTED TO AXISYMMETRIC LOADING	258
7.1	Introduction 258	
7.2	Axisymmetric Formulation 259	
7.3	Finite Element Modeling: Triangular Element 261	
	<i>Potential Energy Approach, 264</i>	
	<i>Body Force Term, 265</i>	
	<i>Rotating Flywheel, 265</i>	
	<i>Surface Traction, 266</i>	
	<i>Galerkin Approach, 268</i>	
	<i>Stress Calculations, 271</i>	
	<i>Temperature Effects, 272</i>	
7.4	Problem Modeling and Boundary Conditions 272	
	<i>Cylinder Subjected to Internal Pressure, 272</i>	
	<i>Infinite Cylinder, 273</i>	
	<i>Press Fit on a Rigid Shaft, 273</i>	
	<i>Press Fit on an Elastic Shaft, 274</i>	
	<i>Belleville Spring, 275</i>	
	<i>Thermal Stress Problem, 276</i>	
	<i>Input Data/Output, 278</i>	
	Problems 279	
	<i>Program Listing, 287</i>	
8	TWO-DIMENSIONAL ISOPARAMETRIC ELEMENTS AND NUMERICAL INTEGRATION	289
8.1	Introduction 289	
8.2	The Four-Node Quadrilateral 289	
	<i>Shape Functions, 289</i>	
	<i>Element Stiffness Matrix, 292</i>	
	<i>Element Force Vectors, 295</i>	
8.3	Numerical Integration 295	
	<i>Two-Dimensional Integrals, 299</i>	
	<i>Stiffness Integration, 299</i>	
	<i>Stress Calculations, 300</i>	

12 Contents

8.4	Higher Order Elements	302	
	<i>Nine-Node Quadrilateral</i> ,	303	
	<i>Eight-Node Quadrilateral</i> ,	305	
	<i>Six-Node Triangle</i> ,	306	
	<i>Integration on a Triangle—Symmetric Points</i> ,	307	
	<i>Integration on a Triangle—Degenerate Quadrilateral</i> ,	308	
8.5	Four-Node Quadrilateral for Axisymmetric Problems	310	
8.6	Conjugate Gradient Implementation of the Quadrilateral Element	311	
8.7	Concluding Remarks and Convergence	311	
8.8	References for Convergence	313	
	<i>Input Data/Output</i> ,	314	
	Problems	316	
	<i>Program Listings</i> ,	324	
9	THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS IN STRESS ANALYSIS		328
9.1	Introduction	328	
9.2	Finite Element Formulation	329	
	<i>Element Stiffness</i> ,	332	
	<i>Force Terms</i> ,	333	
9.3	Stress Calculations	333	
9.4	Mesh Preparation	334	
9.5	Hexahedral Elements and Higher Order Elements	338	
9.6	Problem Modeling	340	
9.7	Frontal Method for Finite Element Matrices	342	
	<i>Connectivity and Prefront Routine</i> ,	343	
	<i>Element Assembly and Consideration of Specified dof</i> ,	344	
	<i>Elimination of Completed dof</i> ,	344	
	<i>Backsubstitution</i> ,	345	
	<i>Consideration of Multipoint Constraints</i> ,	345	
	<i>Input Data/Output</i> ,	346	
	Problems	348	
	<i>Program Listings</i> ,	352	
10	SCALAR FIELD PROBLEMS		361
10.1	Introduction	361	
10.2	Steady-State Heat Transfer	362	
	<i>One-Dimensional Heat Conduction</i> ,	363	
	<i>One-Dimensional Heat Transfer in Thin Fins</i> ,	371	
	<i>Two-Dimensional Steady-State Heat Conduction</i> ,	375	
	<i>Two-Dimensional Fins</i> ,	385	
	<i>Preprocessing for Program HEAT2D</i> ,	386	
10.3	Torsion	386	
	<i>Triangular Element</i> ,	388	
	<i>Galerkin Approach</i> ,	389	
10.4	Potential Flow, Seepage, Electric and Magnetic Fields, and Fluid Flow in Ducts	392	
	<i>Potential Flow</i> ,	392	
	<i>Seepage</i> ,	394	
	<i>Electrical and Magnetic Field Problems</i> ,	395	