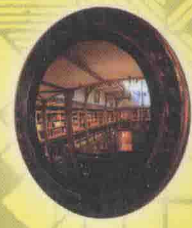
Problems for the Mathematical Olympiads



数学奥林匹克问题集

[罗] 内格特（Andrei Negut）编著

冯贝叶 译

HITP 哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

Problems for the Mathematical Olympiads

数学奥林匹克问题集

● [罗] 内格特（Andrei Negut）编著
● 冯贝叶 译

$\sum_{1}^{5} k^5 x_k = a^3$

$\sum_{1}^{5} k^3 x_k = a^2$

$\sum_{1}^{5} k x_k = a$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书包含了一系列经典领域中(代数、几何、组合)安德烈的最喜爱的数学问题,其中有许多是作者原创的,其中有些简直是奇妙的解答. 由于涉及各种层次的竞赛题,因此书中题目难度波动较大,有相对简单的问题,也有相当令人费解的难题,读者不妨依个人情况自选章节择题解读.

本书适合准备参加数学竞赛的学生以及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克问题集/(罗)内格特(Negut,A.)编著;冯贝叶译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2013.11

书名原文:Problems for the mathematical olympiads - from the first team selection test to the IMO

ISBN 978 - 7 - 5603 - 4243 - 6

Ⅰ.①数… Ⅱ.①内… ②冯… Ⅲ.①数学 - 竞赛题 Ⅳ.①O1 - 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 237144 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　宋晓翠
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451 - 86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm × 1092mm　1/16　印张 12　字数 230 千字
版　　次　2013 年 11 月第 1 版　2013 年 11 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 4243 - 6
定　　价　38.00 元

⊙ 序言

这是一本由一个初次涉及此领域的年轻有为的数学家编写的初等数学方面的书籍. 作者安德烈·内格特曾在高中及国际数学竞赛中获奖,现在已在美国普林斯顿大学学习数年.

收集和发表某些在紧张的工作和学习中所获得的他认为是最美丽的数学问题是他多年以来的一个梦想.

最后完成的这本精彩的书,包含了一系列经典领域中(代数、几何、组合)安德烈最喜爱的数学问题,其中有许多是作者原创的,还包括了有些简直是奇妙的解答. 本书的文字流畅易懂,解答完整并且显示出作者对问题的深刻洞察力.

我向任何专业的或业余的对解题有兴趣和爱好的人士推荐此书. 准备参加数学竞赛的学生也将会在本书中找到很好的训练材料.

我相信,无论你何时阅读本书,你都会感到,这是你以数学作为自己的职业生涯的一个重要的开端.

Radu Gologan(拉杜·戈洛干)
布加勒斯特理工大学暨数学研究所
罗马尼亚数学奥林匹克教授协调员

前言

本书的内容是一些主要用于为参加例如国际数学奥林匹克这样的数学竞赛做准备的数学问题.因此这些问题都是国际数学奥林匹克级别的,并且只需要初等数学的知识.然而,由于国际数学奥林匹克也许是最难的初等数学考试,因此任何参加者都必须具有足够的有关知识和良好的解题技能,并且能敏锐地理解他所遇到的问题.本书并不准备教授IMO水平的初等数学而是希望有助于培养那些准备参加者,并加深他们对这些概念的理解.

已有很多直接针对IMO参加者的问题集.但从我的眼光来看,本书在两方面和它们有别,首先是在选题方面.本书中的问题都是一些在我为参加高层次的数学竞赛而开设的四年制训练班中所遇到的最精彩的问题,多年来许多大师和指导教师一直在训练班中向我们提出这些问题.它们既不枯燥也不乏味,但需要某种洞察力和创造力,我认为这些是任何“精彩”的数学问题所必须具有的品质.此外,我试图避免在本书中加进一些众所周知的问题(例如历届IMO或其他重要竞赛中曾提出过的问题),由于对每个学生来说这些问题很可能在第一年的竞赛生涯中就已知道.相反,读者可能不太有机会知道这里所提出的问题,而任何良好的竞赛准备是致力于提出较多的尽可能新的问题.本书中的任何一个问题都可以作为IMO的试题,我希望本书有助于这些问题面世.

我已把本书中的所有问题按照其困难程度分成了三个层次:E表示容易,M表示中等难度而D表示难题(读者可在问题解答的开头知道那个问题的层次).然而这只是一种相对的分类.

大致来说,E问题相当于IMO中水平1难度的问题,M问题则类似于IMO中人们认为是水平2难度的问题,而D问题可能相当于IMO中水平3中的问题.因此,如果一个新手在奥林匹克世界中解E问题遇到麻烦时,他不必感到沮丧,因为很难给出一个绝对的分数.这些问题远远超出了正规学校作业的水平.

关于本书的另一件重要的事是书中的解答.IMO的任何一个优秀的参加者在处理初等问题时并不需要知道那么多的理论技巧.对一个参加IMO的学生来说学习多变量微积分和拉格朗日乘数法远没有知道如何运用几何反演(也更难)有用.那就是为什么我始终强调解答中所用到的方法、引理和性质.为了说明这些方法的教育价值,我常常不得不牺牲证明的简洁性.我在附录中也提出了一些始终贯穿本书的概念.那样我就可以用我自己的观点来叙述解答.一个有潜力的IMO参加者需要两种品质:一种是别出心裁的独创性,另一种则是熟

练掌握所有的数学"玩具"的技巧. 我不知道哪种品质更重要,我只能猜.

我衷心感谢那些创造了这些精彩问题的人. 但是大多数解答是我自己的工作. 问题不属于我,因此我对问题的创造者深表不安. 由于这些问题主要来自我的笔记本和论文,我并不知道它们的确切出处. 我用 * * * 号代替它们的作者. 这并不是尊重作者的一种合适方式,对此我表示抱歉.

但是作为一个 IMO 的参加者,我已在参赛的准备训练中遇到了这些问题,它们已经成了我生活的一部分. 其中的每道题都与把它告诉我的那个人,与那些给我提供了精彩解答的朋友,与那些我所参加过的不管是否成功的竞赛有关. 我衷心感谢那些帮助过我,使我成为现在这样的所有人士. 尽管我无法叫出所有这些人的名字,但我知道,他们都是一些像 Radu Gologan(拉杜·戈洛干),Severius Moldoveanu(塞维利乌斯·莫尔多韦亚努),Dorela Fainisi(多雷拉·法伊尼西),Dan Schwartz(丹·许瓦兹),Calin Popescu(克林·波佩斯库),Mihai Baluna(米哈伊·伯卢纳),Bogdan Enescu(波格丹·埃内斯库),Dinu Serbanescu(迪努·塞尔巴内斯库)和 Mircea Becheanu(米尔恰·贝克亚努)那样的人,这些人教给了我数学中最美妙和最精致的艺术. 我也不能忘记那些和我一起经历了奥林匹克竞赛甘苦的同学们和朋友们,但是他们可能已忘记了我,由于我叫不出他们的姓名. 他们知道他们是谁,我也不能忘记我的家人,他们时刻站在我身边,不管我在竞赛中表现如何,他们始终给予了我无价的精神支持.

我衷心感谢 Mircea Lascu(米尔恰·拉斯库)和 Gil(吉尔)出版社在本书出版的漫长过程中对我和本书的支持以及 Radu Gologan(拉杜·戈洛干)教授所给予的大量帮助和有益的建议. 我也想对 Gabriel Kreindler(加布里埃尔·克莱恩德勒),Andrei Stefanescu(安德烈·斯特凡内斯库),Andrei Ungureanu(安德烈·温古雷亚努)和 Adrian Zahariuc(阿德里安·扎哈留克)对本书所提供的解答表示感谢.

我祝你无论在数学方面还是其他方面都吉星高照.

安德烈·内格特

⊙ 翻译说明

不算厚的一本书，拖拉了半年左右总算全部完工了．原因就在于这不只是单纯的翻译，如果像一架机器一样，完全照本宣科的进行文字转换工作，那翻译的速度就只依赖于机器的性能．拖拉的原因在于译者是一个对自己和对读者都要负责的人，这就使得译者要一再对译文进行注解，修改和润色甚至对原文进行改写和加写．

一开始，译者仅是对怀疑有笔误或排印错误之处加注，指出作者认为可能应是正确的内容，后来觉得如此注解，未免太烦，就干脆不加注解的将其改正，而仅对有实质性错误或难以理解的地方加以注解，最后发现，有些地方仅予以注解还不够，还需加以重新组织和改写、加写．这就最后形成了译者对本书的添加内容．

不可否认，本书包含了许多有特色的思想和有兴趣的材料．但由于作者自己熟悉的内容和习惯的说法必然和读者有不尽相同的地方，因此，为了使读者易于理解和看懂，就需要对原文做一定的注解，此外，即使是很优秀的作者，也难免有一些失误（如 1－25，3－2，3－6，3－29，4－26），这就不仅需要指出，还需给出正确的解答．此外，从研究问题的角度，有些问题（如 1－6 原题除了要求证明公共面积至少是 3.4 外，还有一问是能否断言该面积大于 3.5），原书乃至国内其他同类资料都并未给出解答，译者也对此进行了补充，最后有些问题（如 4－28 原来的不等式中的常数 4 现在已改进为 2）原书的解答已显落后或目前已有新的进展，译者也尽自己的可能一一指出．为此译者在书中做了约 40 处注解并包括了大量的经过重新编写的引理和若干原书没有的新的插图．这些注解和引理构成了理解本书的重要部分．

然而如此一来，译文中必然有些部分与原文不一致．文学翻译中有所谓“信，雅，达”的原则，然而译者坚信，凡是阅读问题集的读者最关心的问题是得知对一个问题如何解答，并从此获得心得和满足．因此译者在翻译、编辑问题集一类的书籍时所遵循的最终的和一贯的原则始终是关注如何对书中的问题首先给出一个解答，然后在已有解答的基础上，再关注如何能使解答更加简明、易懂和合情合理（指尽可能使解答能够自然地逐步得出），尽量完美．按照这一原则，译者对原文的处理办法就是如果原书的解答很精彩，那当然完全照译；如果原书的解答虽然本质上是正确的，但在叙述上有缺陷（例如想到哪，写到哪或逻辑上不清楚或不太显明或解答不完整），那么就对原文进行改写和重新组织（如 2－6，3－6，3－14，3－24 等题），而如果原文的解答实在太过迂回或路子根本走歪了，则坚决抛开原文，另行在文献中寻找答案或由译者本人重新解答（如

4－28,4－30),不过即使在这种情况下,译者仍首先将原文译出再重新给出解答.

当然这样做就会花费额外的精力,对标明了注解的部分,读者还能知道译者的工作,而对上述所说的重新组织、改写、加写的文字和插图,则读者根本不会知道这是译者的额外工作.然而译者仍然认为这是值得的,因为译者的目的不是在于让读者详细知道哪些是原作者的,哪些是译者的工作,而在于求得译者内心的满意.译者认为只有这样做,首先译者自己才会感到这样得出来的东西多少还总算是一个有些价值的玩意,也才拿得出手.译者希望读者会感到本书多少还有些作用.

当然,译者的译文也必然会有不合适乃至失误的地方,希望读者发现时及时告知译者,译者将感激不尽.

冯贝叶
2013 年 5 月

目录

第Ⅰ部分　问题

第一章　几何//3
第二章　数论//8
第三章　组合//11
第四章　代数//16

第Ⅱ部分　解答

第一章　几何//23
第二章　数论//53
第三章　组合//87
第四章　代数// 126

第Ⅲ部分　附录

附录 1　有用的事实// 159
附录 2　问题的来源// 169
编辑手记// 171

第 I 部分　问题

心得 体会 拓广 疑问

第一章　几何

问题

p1—1　设 I 和 O 分别是 $\triangle ABC$ 的内心和外心. 旁切圆 $\overline{\omega}_A$ 分别和 AB, AC 和 BC 切于点 K, M, N. 如果 KM 的中点 P 位于 $\triangle ABC$ 的外接圆周上, 证明 O, I, N 共线.

2003 年 IMAR 考试

p1—2　在凸四边形 $ABCD$ 中, 我们有 $\angle ABC=\angle ADC=135°$. 设 M, N 分别位于 AB 和 AD 上, 使得 $\angle MCD=\angle NCB=90°$. 如果 K 是圆(AMN)和圆(ABD)的第二个交点, 证明 $AK\perp KC$.

77 de ture

p1—3　设 AC 和 BD 是圆心为 O 的圆的弦, 而 K 是它们的交点, 如果 M 和 N 分别是 $\triangle ABK$ 和 $\triangle CDK$ 的外接圆心, 证明 $MKON$ 是平行四边形.

* * *

p1—4　设任意锐角三角形的边长为 a, b, c, 半周长为 p, 内切圆半径为 r, 外接圆半径为 R. 证明以下不等式

$$\frac{2}{5}\leqslant\frac{Rp}{2aR+bc}<\frac{1}{2}$$

* * *

p1—5　考虑顶点为 O 的角及角中的一个和此角的两边分别切于 A 和 B 的圆. 过点 A 平行于 OB 的直线和圆交于点 C, 直线 OC 又与圆交于点 P. 证明直线 AP 平分线段 OB.

* * *

p1—6　一个三角形和一个正方形都外接于一个单位圆, 证明这两个图形的公共面积至少是 3.4.

1986 年全苏数学奥林匹克

p1—7　设 $ABCD$ 是凸四边形而 M 是对角线的交点. O_1 和 O_2 分别是 $\triangle ABM$ 和 $\triangle CDM$ 的外接圆心, 证明 $4O_1O_2>AB+CD$.

1995 年 IMO 第二轮预选题

p1—8　在圆内接五边形 $ABCDE$ 中有 $AC/\!/DE$ 及 $\angle AMB=\angle BMC$, 其中 M 是 BD 的中点. 证明直线 BE 把线段 AC 分成相等的部分.

* * *

p1—9　给了直角三角形和其中有限个点. 证明可以把这些点连成一条折线(不一定是闭的), 使得折线段的平方和至多等于三角形斜边的平方.

2004 年 IMAR 考试

心得 体会 拓广 疑问

p1—10 设 $A_1A_2\cdots A_n$ 是凸 n - 边形,证明 A_iA_j 中至多有 n 条线段可以两两相交.

* * *

p1—11 在$\triangle ABC$ 中,考虑四个半径相等的圆 k_1,k_2,k_3,k_4,使得 k_1,k_2,k_3 中每个圆都和三角形的两条边相切,而 k_4 和其他三个圆相切. 证明 k_4 的圆心必位于直线 OI 上(其中 O 和 I 分别是$\triangle ABC$ 的外心和内心).

77 de ture

p1—12 设在凸多边形中,d 是对角线的长度之和,p 是半周长. 证明

$$n-3<\frac{2d}{p}<\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2$$

* * *

p1—13 证明如果 n 是奇数,则对所有 $1\leqslant i\leqslant n$,我们都可构造一个多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 使得 A_iA_{i+1}(其中 $A_{n+1}=A_1$)是这个多边形的直径.

* * *

p1—14 给了三个半径分别为 r,r_1,r_2 的两两外离的圆 Γ,Γ_1,Γ_2 使得 $r>r_1$ 和 $r>r_2$. 设 Γ 和 Γ_1 的外公切线交于 A_1,而 Γ 和 Γ_2 的外公切线交于 A_2. 从 A_1 到 Γ_2 的切线和从 A_2 到 Γ_1 的切线确定了一个四边形,证明这个四边形有一个内接圆,并计算其半径.

1984 年全苏数学奥林匹克

p1—15 证明对任意 $n>3$,都存在一个凸 n - 边形,但不是正的,使得从此多边形的任意一个内点到各边的距离之和是一个常数.

* * *

p1—16 考虑平面上的有限点集 X 和等边三角形 T. 已知任意 $X'\subset X$,$X'=9$ 可被两个 T 的平移图形覆盖,证明 X 本身也可被两个 T 的平移图形覆盖.

77 de ture

p1—17 设 $ABCDEF$ 是圆内接六边形,而 $l(A,BDF)$,$l(B,ACE)$,$l(D,ABF)$,$l(E,ABC)$共点(其中 $l(M,XYZ)$表示 M 关于$\triangle XYZ$ 的西姆松线),证明 $CDEF$ 是矩形.

* * *

p1—18 设 P 是一个可以分成 27 个不相交的平行四边形的凸六边形. 证明 P 有一个对称中心并可被分成21 个不相交的平行四边形.

* * *

p1—19 设 A_1,B_1,C_1 是锐角$\triangle ABC$ 各边的中点,通过每一个中点向其他两边所做的垂线构成了一个六边形,证明此六边形的

心得 体会 拓广 疑问

面积是$\triangle ABC$面积的一半.

77 de ture

p1—20 设$P_1\cdots P_n$是平面上的一个凸多边形,它具有性质对任意$i\neq j$,都存在某个k使得$\angle P_iP_kP_j=60°$.证明这个多边形必是一个等边三角形.

* * *

p1—21 设H_a和H_b是锐角三角形ABC的从点A和点B所引的垂线的垂足,W_a和W_b是从点A和点B所引的角平分线和对边的交点.证明当且仅当$\triangle ABC$的外心位于W_aW_b上时,内心才位于H_aH_b上.

2002年德国数学奥林匹克

p1—22 考虑相交于点P的两条直线d_1和d_2.对$d_1-\{P\}$中任意的一点O,考虑以O为圆心并与d_2相切的圆C_1以及和d_1,d_2和C_1都相切的圆C_2,求当点O在d_1上移动时,这两个圆的交点的轨迹.

* * *

p1—23 设$A_0A_1A_2$是一个三角形,$\overline{\omega}_1$是过点A_1和点A_2的圆.对任意$k\geqslant 1$,做通过A_k和A_{k+1}点并与圆$\overline{\omega}_{k-1}$相切的圆(这里在模3下考虑A的下标,即$A_6=A_3=A_0,A_7=A_5=A_1$以及$A_8=A_5=A_2$),证明圆$\overline{\omega}_7$和$\overline{\omega}_1$重合.

* * *

p1—24 设D,E,F分别是$\triangle ABC$的内切圆在BC,AC及AB边上的切点.设X是$\triangle ABC$的内心,使得XBC的内切圆分别和边XB,XC及BC切于点Z,Y及D.证明$EFZY$是圆内接四边形.

1995年IMO第二轮预选题

p1—25 点P位于正方形$ABCD$内部使得$PA=1,PB=2$以及$PB=3$.问正方形的边长可能是什么?

* * *

p1—26 圆Γ_2在点N内切于圆Γ_1.点C,S,T位于圆Γ_1上,使得CS和CT分别在点M和点K和圆Γ_2相切.设U和V分别是弧CS和弧CT的中点,而W是圆(UMC)和圆(VCK)的第二个交点.证明$UCVW$是平行四边形.

* * *

p1—27 给了一个四边形及其内切圆,一条直线平分此四边形的面积和周长.证明此直线必通过此四边形的内切圆圆心.

* * *

p1—28 设X是$\triangle ABC$内部的一点并考虑通过X并平行于三角形的边的直线.平行于AB的直线交CA于M,平行于BC的直线交AB于N,平行于CA的直线交BC于P.直线AP,BM和CN把

心得 体会 拓广 疑问

三角形分成了4个三角形和3个四边形. 证明在4个三角形中有三个三角形的面积之和等于第四个三角形的面积.

* * *

p1—29 证明必可把有限个面积之和等于$\frac{1}{2}$的正方形互不重叠地放进一个单位正方形内.

* * *

p1—30 设A是圆ϖ之外一点,并设AB和AC是从它向圆所引的切线(设B和C在圆ϖ之上). 直线l和ϖ相切并分别和AB和AC相交于点P和点Q. 如果R是BC和通过P并平行于AC的直线的交点,证明当l变化时,QR始终通过一个固定的点.

2004年MOSP

p1—31 如果四面体的三对对边所夹的角都相等,证明这些角都是直角.

* * *

p1—32 设P是凸四边形$ABCD$的对角线的交点,其中$AB=AC=BD$. O和I分别是$\triangle ABP$的外接圆心和内切圆心. 如果O和I不重合,证明$OI\perp CD$.

* * *

p1—33 在单位正方形内给了500个点,证明必存在12个点$A_1,A_2,\cdots,A_{12}$使得

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{11}A_{12}<1$$

* * *

p1—34 证明对平面上的任意点A,B,P,Q,R,成立

$$AB+BQ+QR+RP\leqslant AP+AQ+AR+BP+BQ+BR$$

* * *

p1—35 在平面上给出了5个点,使得由这些点构成的三角形的面积至少是2,证明存在一个面积至少是3的三角形.

2002年Romanian TST

p1—36 设$ABCD$是一个平行四边形. 点M,N使得$C\in(AM)$以及$D\in(BN)$. 直线NA和NC与直线MB和MD相交于E,F,G,H. 证明当且仅当$ABCD$是菱形时,$EFGH$是圆内接四边形.

* * *

p1—37 考虑边数$n\geqslant5$的凸多边形,证明在由这个多边形的顶点组成的所有三角形中只能有不多于$\frac{n(2n-5)}{3}$个面积等于1的三角形.

安德烈·内格特

p1—38 给了一个边长为20的正方形及其内部的任意1 999

个点,证明在由正方形的四个顶点和这 1 999 个点所组成的点集中,必存在 3 个点,使得以它们为顶点的三角形的面积至多为$\frac{1}{10}$.

1999 年 IMBO

p1—39 在四面体 $ABCD$ 中有 $AB,CD<1,AC=BD=1$ 以及 $AD,BC>1$. 证明内接于此四面体的球的半径必小于$\frac{\sqrt{3}}{8}$.

* * *

p1—40 点 A,B,C,D 位于以 O 为圆心的圆上. 直线 AB 和 CD 交于点 M,圆(ACM)和圆(BDM)交于点 M,N,证明 $MN\perp NO$.

* * *

心得 体会 拓广 疑问

第二章 数论

问题

p2—1 设由递归关系 $a_1=a_2=97, a_{n+1}=a_na_{n-1}+\sqrt{(a_n^2-1)}\sqrt{(a_{n-1}^2-1)}$ 定义了数列 a_n. 证明数 $2+\sqrt{2+2a_n}$ 是一个完全平方数.

* * *

p2—2 设 $x,y\in\mathbf{N}$, 使得 $3x^2+x=4y^2+y$, 证明 $x-y$ 是一个完全平方数.

* * *

p2—3 设 $n\in\mathbf{N}$, 考虑所有系数为 0,1,2 或 3 的多项式. 在这些多项式中有多少满足 $P(2)=n$?

1986 年全苏数学奥林匹克

p2—4 证明对每个 $n\geqslant 2$, 都存在一个正数使得对所有的 $2\leqslant i\leqslant n$, 它都可被写成 i 个平方数的和.

* * *

p2—5 设 $p\geqslant 5$ 是一个素数. 证明如果 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}=\frac{a}{b}$, 则 $p^4\mid ap-b$.

* * *

p2—6 考虑四个自然数 a,b,c,d 和 $(x,y)\in(0,1)\times(0,1)$ 中所有具有使得 $ax+by$ 和 $cx+dy$ 都是整数的点所组成的集合 S. 如果 S 有 2 004 个元素并且 $(a,c)=6$, 求 (b,d).

1984 年保加利亚数学奥林匹克

p2—7 求出所有使得等式 $(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n$ 成立的整数 m,n.

1984 年全苏数学奥林匹克

p2—8 对每个自然数 n 证明当且仅当 $n+1$ 是素数时, 数 $1,2,\cdots,n$ 的最小公倍数恰等于数 $\binom{n}{1},\binom{n}{2},\cdots,\binom{n}{n}$ 的最小公倍数.

* * *

p2—9 在 $\mathbf{N}$ 中对不能被 4 整除的 $z-1$ 解方程 $x^2=y^z-3$.

* * *

p2—10 当且仅当一个格点和原点的连线上至少包含一个其他的格点时称此格点是不可见的. 证明存在任意大小的正方形,