大学高等数学类规划教材

丛书主编　王立冬

高等数学基础

FUNDAMENTALS OF ADVANCED MATHEMATICS

王立冬　齐淑华　主编

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

大学高等数

高等数学基础

FUNDAMENTALS OF ADVANCED MATHEMATICS

王立冬　齐淑华　主编

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础 / 王立冬，齐淑华主编. — 大连：
大连理工大学出版社，2013.8
ISBN 978-7-5611-8134-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… ②齐… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 188914 号

大连理工大学出版社出版
地址：大连市软件园路 80 号　邮政编码：116023
电话：0411-84708842　邮购：0411-84703636　传真：0411-84701466
E-mail：dutp@dutp.cn　URL：http://www.dutp.cn
丹东新东方彩色包装印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：170mm×240mm　印张：16.25　字数：265 千字
2013 年 8 月第 1 版　　2013 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑：王　伟　　责任校对：李　慧
封面设计：齐冰洁

ISBN 978-7-5611-8134-8　　定　价：35.00 元

"大学高等数学类规划教材"题词

高等数学诸分支知识及技巧，是通往现代科技诸领域的钥匙和通用语言.

徐利治

2009年8月于大连

序

21世纪已出现了高等教育向大众化教育转化的趋势.我国高等教育也开始呈现出了多层次与多样性的特点.这些特点正是反映了现代科技与文化教育发展形势的客观要求.

上述发展形势的启示下,具有多科性的大连民族学院的数学教师们,近年来一直致力于数学教材的建设,已相继编写出高等数学、线性代数、概率论与数理统计三门基础课讲义,这三门课曾分别被评选为省级精品课与校级精品课.

在上述讲义的基础上,进行改进和修订后产生的这套"大学高等数学类规划教材"丛书,可以作为普通高校理工科与经济及管理学科各专业的通用教材或教学参考书.

这套教材并不以"英才教育"为特殊目标,其根本旨趣是要力求反映高校大众化数学教育的基本要求,并希望教材中能渗透人文素质教育的精神.因此简要说来,这套教材希冀和呈现的主要特点,约有下列三点.

一、尽可能从实践经验与直观背景出发,提出数学问题,以便于学生了解数学知识的源流与背景.

二、教材内容的安排与表述方式上,力求深入浅出、易教易学、简明实用.注重讲清基本概念,适度淡化理论证明,并适当反映数学所蕴含的素质教育与美育教育.

三、例习题的选取与安排力求体现理论联系实践的原则,多数例题选自实践、应用与生活.

凡是具有生命力的教材，总是处于不断适应客观要求和不断更新改进的过程中，这套教材丛书自然也不例外. 我为本书作序，诚挚希望本教程使用者与读者的任何指正或改进建议，将能直接函告丛书主编或教材编著者为幸.

徐利治

2009 年 8 月于大连

前言

高等数学是高等院校为非数学专业开设的一门重要基础课程。根据不同专业的需要，该课程内容和深度有所不同。从内容和深度上看，理工类专业要求较高，其次是经管类专业，然后是其他文科类专业，但数学教育本质上是一种素质教育，学习数学的目的，不仅在于学到一些数学概念、公式和结论，更重要的是了解数学的思想和精神实质。

本书是根据高等院校预科高等数学课程的教学基本要求为预科学生编写的，在编写过程中我们努力体现下述特色：

(1)遵循预科教育的教学规律，考虑预科教学的特点，强调了“必须”、“够用”，加强学生素质培养。

(2)贯彻“掌握概念，强化应用”的教学原则。“掌握概念”落实到使学生能用数学思想考虑问题，“强化应用”落实到学生能用所学的数学方法解决实际问题。

(3)在教学内容上注意预科学生抽象概括能力、逻辑推理能力、将复杂问题归纳为简单规律和步骤能力的培养。

(4)力求将数学思维方法与数学学习相结合，使学生能够认识、理解和运用数学思想方法，提高数学学习效果，增强数学思维品质。

(5)在例题和习题的选取上，力求做到典型多样，难度上层次分明，注意解题方法的总结，以期注重学生学习兴趣的培养，提高综合运用数学知识的能力。

(6)为了配合双语教学，给出了一些重要词汇的英文翻译，可以使学生在学习这门课的过程中逐渐学会英文词汇，这对以后学生查阅高等数学外文资料和学生的外语学习都有很大的好处。

参加本书编写工作的有王立冬、齐淑华、谢从波、周小阳、刘延涛、滕颖俏。

由于编者水平有限，书中的错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2013 年 8 月

目录

第 1 章　函　数 / 1
1.1　集合及其运算 / 1
1.1.1　集　合 / 1
1.1.2　集合的运算 / 3
习题 1-1 / 4
1.2　函　数 / 5
1.2.1　函数的概念 / 5
1.2.2　函数的几种特性 / 7
习题 1-2 / 10
1.3　复合函数、反函数与初等函数 / 11
1.3.1　复合函数 / 11
1.3.2　反函数 / 12
1.3.3　基本初等函数 / 14
1.3.4　初等函数 / 19
习题 1-3 / 21
1.4　常用初等代数公式 / 22
1.4.1　多项式展开与因式分解 / 22
1.4.2　常用不等式 / 22
1.4.3　常用数列求和公式 / 23
1.5　经济学中常见的函数 / 24
1.5.1　成本函数 / 24
1.5.2　收益函数 / 24
1.5.3　利润函数 / 24
1.5.4　需求函数与供给函数 / 26
复习题一 / 29
第 2 章　函数的极限 / 31
2.1　数列的极限 / 31
2.1.1　数列极限的定义 / 31
2.1.2　数列极限的性质 / 36

习题 2-1 / 38
2.2 函数的极限 / 38
2.2.1 当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限 / 38
2.2.2 当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限 / 41
2.2.3 左极限和右极限 / 43
习题 2-2 / 44
2.3 函数极限的性质和运算 / 44
2.3.1 函数极限的性质 / 44
2.3.2 函数极限的四则运算 / 46
2.3.3 复合函数的极限 / 48
习题 2-3 / 49
2.4 极限存在准则 两个重要极限 / 49
2.4.1 极限存在准则 / 49
2.4.2 两个重要极限 / 51
习题 2-4 / 55
2.5 无穷小与无穷大 / 56
2.5.1 无穷小 / 56
2.5.2 无穷大 / 57
2.5.3 无穷小与无穷大的关系 / 58
2.5.4 无穷小的比较 / 58
习题 2-5 / 60
2.6 函数的连续性 / 61
2.6.1 连续函数的概念 / 61
2.6.2 函数的间断点 / 63
2.6.3 初等函数的连续性 / 65
2.6.4 闭区间上连续函数的性质 / 67
习题 2-6 / 70
复习题二 / 71
第 3 章 导数与微分 / 73
3.1 导数的概念 / 73
3.1.1 导数的引入 / 73
3.1.2 导数的概念 / 75
3.1.3 导数的几何意义 / 78
3.1.4 可导与连续的关系 / 80
习题 3-1 / 82
3.2 求导法则与导数公式 / 82
3.2.1 函数四则运算的求导法则 / 82

3.2.2 反函数的求导法则 / 86
3.2.3 复合函数的求导法则 / 87
3.2.4 初等函数的导数 / 89
习题 3-2 / 90
3.3 高阶导数 / 90
习题 3-3 / 93
3.4 隐函数与由参数方程所确定的函数的导数 / 93
3.4.1 隐函数的求导方法 / 93
3.4.2 由参数方程所确定的函数的求导公式 / 96
习题 3-4 / 98
3.5 微 分 / 98
3.5.1 微分的概念 / 98
3.5.2 微分与导数的关系 / 99
3.5.3 微分的几何意义 / 101
3.5.4 复合函数的微分及微分公式 / 101
习题 3-5 / 103
3.6 导数与微分在经济学中的应用 / 103
3.6.1 边际分析 / 103
3.6.2 弹性分析 / 104
3.6.3 增长率 / 108
习题 3-6 / 109
复习题三 / 109
第 4 章 微分中值定理 / 112
4.1 微分中值定理 / 112
4.1.1 罗尔定理 / 112
4.1.2 拉格朗日中值定理 / 114
习题 4-1 / 118
4.2 洛必达法则 / 119
4.2.1 $\frac{0}{0}$型未定式 / 119
4.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$型未定式 / 121
4.2.3 其他未定式 / 123
习题 4-2 / 125
4.3 泰勒公式 / 126
4.3.1 泰勒中值定理 / 126
4.3.2 函数的泰勒展开式举例 / 129

习题 4-3 / 132
4.4 函数的单调性与极值 / 132
4.4.1 函数的单调性 / 132
4.4.2 函数的极值 / 135
习题 4-4 / 138
4.5 最优化问题 / 138
4.5.1 最大值与最小值问题 / 138
4.5.2 最大利润与最小成本问题 / 140
4.5.3 复利问题 / 141
习题 4-5 / 142
4.6 函数的凸性、曲线的拐点及曲线的渐近线 / 143
4.6.1 函数的凸性、曲线的拐点 / 143
4.6.2 曲线的渐近线 / 146
4.6.3 函数图形的描绘 / 148
习题 4-6 / 150
复习题四 / 151
第 5 章 不定积分 / 154
5.1 不定积分的概念与性质 / 154
5.1.1 原函数的概念 / 154
5.1.2 不定积分的概念 / 155
5.1.3 不定积分的几何意义 / 156
5.1.4 基本积分表 / 156
5.1.5 不定积分的性质 / 157
习题 5-1 / 159
5.2 换元积分法 / 159
5.2.1 第一类换元积分法 / 159
5.2.2 第二类换元积分法 / 165
习题 5-2 / 168
5.3 分部积分法 / 169
习题 5-3 / 173
5.4 有理函数的积分 / 173
5.4.1 有理函数的积分 / 173
5.4.2 可化为有理函数的积分 / 176
习题 5-4 / 178
复习题五 / 178
第 6 章 定积分 / 180
6.1 定积分的概念 / 180

6.1.1 引 例 / 180
6.1.2 定积分的定义 / 182
6.1.3 可积的条件 / 183
6.1.4 定积分的几何意义 / 184
习题 6-1 / 185
6.2 定积分的性质 / 185
习题 6-2 / 189
6.3 微积分基本公式 / 190
6.3.1 变速直线运动中位置函数与速度函数的关系 / 190
6.3.2 积分上限函数及其导数 / 191
6.3.3 牛顿-莱布尼兹公式 / 194
习题 6-3 / 195
6.4 换元积分法和分部积分法 / 196
6.4.1 换元积分法 / 196
6.4.2 分部积分法 / 200
习题 6-4 / 202
6.5 反常积分 / 203
6.5.1 无穷区间上的反常积分 / 203
6.5.2 无界函数的反常积分 / 205
习题 6-5 / 207
复习题六 / 209
第 7 章 定积分的应用 / 211
7.1 定积分的微元法 / 211
7.2 定积分在几何上的应用 / 212
7.2.1 平面图形的面积 / 212
7.2.2 旋转体的体积 / 215
7.2.3 平行截面面积已知的立体体积 / 217
7.2.4 平面曲线的弧长 / 218
习题 7-2 / 220
7.3 定积分在物理学上的应用 / 221
7.3.1 变力沿直线所做的功 / 221
7.3.2 水压力 / 222
7.3.3 引 力 / 223
习题 7-3 / 224
7.4 积分在经济分析中的应用 / 224
7.4.1 由边际函数求原经济函数 / 224

7.4.2 资本现值与投资问题 / 226
习题 7-4 / 227
复习题七 / 228
部分习题参考答案与提示 / 230
参考文献 / 244

第1章 函 数
Functions

微积分研究的主要对象是函数.研究函数通常有两种方法,一种方法是代数方法和几何方法的综合.用这种方法常常只能研究函数的简单性质.初等数学中就是用这种方法来研究函数的单调性、奇偶性、周期性;另一种方法就是微积分的方法,或者说是极限的方法.这种方法能够研究函数的许多深刻性质,并且做起来相对简单.微积分就是用极限的方法研究函数的一门学问.

1.1 集合及其运算

为了准确而深刻地理解函数概念,集合知识是不可缺少的.本章将简要地介绍集合的一些基本概念,在此基础上重点介绍函数的概念.

1.1.1 集 合

1.集合的概念

集合论是德国数学家康托(Georg Cantor,1845—1918)在19世纪末创立的.自从集合论创立以来,集合论的概念和方法已渗透到数学的各个分支,成为现代数学的语言和基础.一般地,所谓**集合**(set)(简称集)是指具有某种确定性质的对象的全体.组成集合的各个对象称为该集合的**元素**(element).

习惯上,用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.用 $a \in A$ 表示 a 是集合 A 中的元素,读作"a 属于 A";用 $a \notin A$ 表示 a 不是集合 A 中的元素,读作"a 不属于 A".

【例1】 某学校全体男同学构成一个集合.

【例2】 方程 $x^2-2x-3=0$ 的所有实根构成一个集合.

【例 3】 全体偶数构成一个集合.

【例 4】 圆周 $x^2+y^2=9$ 上所有的点构成一个集合.

含有有限多个元素的集合称为有限集,如例 1、例 2;含有无限多个元素的集合称为无限集,如例 3、例 4;不含有任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$.

2. 集合的表示方法

我们常用下面的方法来表示集合.一种是列举法,即将集合的元素一一列举出来,写在一个花括号内.例如,所有正整数组成的集合可以表示为 $\mathbf{Z}^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.另一种表示方法是指明集合元素所具有的性质,即将具有性质 $p(x)$ 的元素 x 所组成的集合 A 记作

$$A=\{x \mid x\text{ 具有性质 } p(x)\}$$

例如,正整数集 $\mathbf{Z}^+$ 也可表示成

$$\mathbf{Z}^+=\{n \mid n=1,2,3,\cdots\}$$

所有实数的集合可表示成

$$\mathbf{R}=\{x \mid x\text{ 为实数}\}$$

又如

$$A=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1,x,y\text{ 为实数}\}$$

表示 xOy 平面内单位圆周上点的集合.

3. 区间

设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$,记 $(a,b)=\{x \mid a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$,称为开区间;记 $[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$,称为闭区间;记 $[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}$,称为左闭右开区间;记 $(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$,称为左开右闭区间;$a,b$ 分别称为区间的左端点和右端点.

另外,我们还记 $(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$,$(-\infty,b)=\{x \mid x<b,x\in\mathbf{R}\}$,$(a,+\infty)=\{x \mid a<x,x\in\mathbf{R}\}$,等等.

4. 邻域

设 $x_0\in\mathbf{R}$,$\delta>0$.数集 $\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$ 表为 $U(x_0,\delta)$,即

$$U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

称为 x_0 的 δ **邻域**(neighborhood).当不需要注明邻域的半径 δ 时,常把它表为 $U(x_0)$,简称 x_0 的**邻域**.

数集 $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 表为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\}$$

也就是在 x_0 的 δ 邻域 $U(x_0,\delta)$ 中去掉 x_0,称为 x_0 的 δ **去心邻域**.当不需要注明邻

域半径 δ 时,常将它表为 $\mathring{U}(x_0)$,简称 x_0 的**去心邻域**.

1.1.2　集合的运算

1. 集合的运算

(1) 对于集合 A 和 B,若集合 A 中的每一个元素都是集合 B 中的元素,即若 $a \in A$,则 $a \in B$,这时就称 A 是 B 的一个子集,记作 $A \subset B$,读作"A 含于 B"(或"B 包含 A"). 若 $A \subset B$,且存在 $b \in B$,使得 $b \notin A$,则称 A 是 B 的一个真子集(图 1-1).

规定:$\varnothing$ 是任何集合 A 的子集,即 $\varnothing \subset A$.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称 A,B 相等,记作 $A = B$. 此时 A 中的元素都是 B 中的元素,反过来,B 中的元素也都是 A 中的元素,即 A,B 中的元素完全一样.

(2) 设 A,B 是两个集合,称 $\{x \mid x \in A 或 x \in B\}$ 为 A 与 B 的并集,记作 $A \cup B$,即 $A \cup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$. 它是将 A 和 B 的全部元素合起来构成的一个集合(图 1-2).

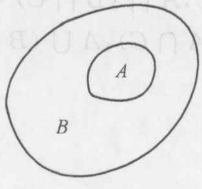

图 1-1

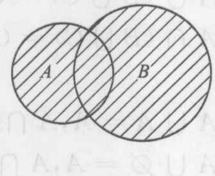

图 1-2

(3) 称 $\{x \mid x \in A 且 x \in B\}$ 为 A 与 B 的交集,记作 $A \cap B$,即 $A \cap B = \{x \mid x \in A 且 x \in B\}$. 它是由 A 与 B 的公共元素构成的一个集合(图 1-3).

(4) 称 $\{x \mid x \in A 且 x \notin B\}$ 为 A 与 B 的差集,记作 $A - B$,即 $A - B = \{x \mid x \in A 且 x \notin B\}$. 它是由 A 中那些属于 A 但不属于 B 的元素构成的一个集合(图 1-4).

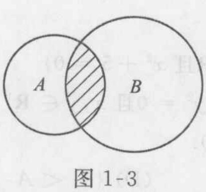

图 1-3

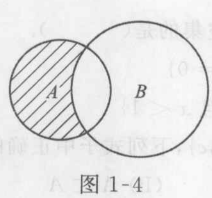

图 1-4

【例 5】　设 $A = \{x \mid -1 < x < 2\}$,$B = \{x \mid 1 < x < 3\}$,求 $A \cup B$,$A \cap B$,$A - B$.

解

$$A \cup B = \{x \mid -1 < x < 3\}$$