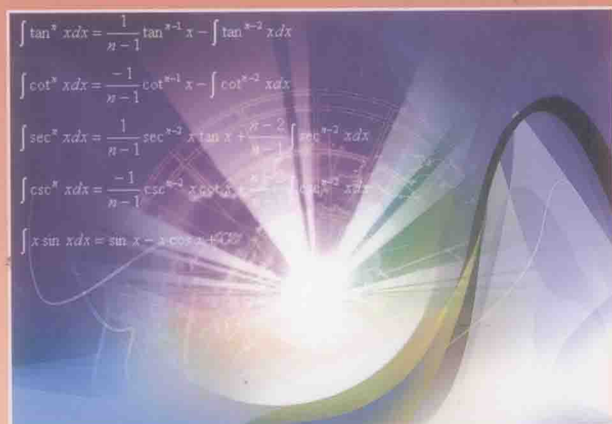
国家示范性高等职业教育精品规划教材

高等数学

学习手册

◎ 李以渝 主编



北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家示范性高等职业教育精品规划教材

高等数学学习手册

主　　编　李以渝
副 主 编　余川祥　徐荣贵
编写人员　赵家林　张　磊　李传伟
主　　审　邓云辉

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习手册 / 李以渝主编. —北京：北京理工大学出版社，2011.8

ISBN 978-7-5640-4865-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 149409 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京高岭印刷有限公司印刷
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 8
字　　数 / 183 千字
版　　次 / 2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷
印　　数 / 1～5000 册　　责任校对 / 陈玉梅
定　　价 / 15.00 元　　责任印制 / 王美丽

高等数学学习手册编写组

主　　编：李以渝

副 主 编：余川祥　徐荣贵

编写人员：赵家林　张　磊　李传伟

主　　审：邓云辉

目　录

序言Ⅰ

《高等数学学习手册》是四川工程职业技术学院教学改革成果．本轮教学改革的“高等数学课程包”包括：高等数学教学大纲、质量标准、考试大纲、教师教学手册、学生学习手册、试题库等．

本手册是依据高等数学教学大纲、质量标准、学生实际及教学实际编写的．目的既是总结教改成果，又是为了便于学生学习和便于教师教学．

教师应熟悉手册、善于使用手册，如要求学生上课必须带数学教材和学习手册，引导学生了解每次课的学习重点、难点与特点，布置课堂练习与课后练习，及讲评各项练习题．

同学可通过手册了解每次课的学习目的、教学要求、重点难点，可将上课学习的体会、要点等记于手册的空白处，既作为笔记本和练习册，还可将学习意见、建议写在手册上与老师交流．

最后我们对同学们有几点要求与提示：学习高等数学的最低要求是考试及格，一般要求是学有收获、发展智慧、提升素质；学习使人进步、学习改变命运；我们应该越学越会学、越学越聪明、越学越快乐、越学越幸福．

李以渝

2011 年 7 月 20 日

序言Ⅱ　学习与成才建议

1. 认识“走职业技术成才之路”.

(1)“条条道路通罗马”，成才的道路是多种多样的. 近年来，大学教育普及，大学毕业生就业率不及高职学生就业率，因而，学技术、走职业技术发展之路有一定的现实性与优势；

(2)对于一个人的就业与发展，在知识、文凭、技术、素质各项中，其重要性的顺序是：素质、技术、文凭、知识.

2. 认识自己：从高中生到高职生.

(1)中学实施“题海战术”，容易使人“理想化”“理论化”，而高职是培养生产一线的高技术工人，因此需要学生更实际、实干、重视动手、实验、观察.

(2)如果说高中学习主要针对高考、应试教育，那么高职学习应该主要针对就业、提升素质.

3. 认识高等数学：高等数学学习与初等数学学习的区别.

(1)相对静止与运动变化；

(2)有限与无限.

4. 做学生(做人)的底线：不抄作业、考试及格.

第一讲　高等数学学习介绍、函数

【课堂模仿练习】

$f(0)=1$

$f(1)=0$

1. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & 0\leqslant x<1 \\ 0, & x=1 \\ 1-x, & 1<x<2 \end{cases}$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f\left(\frac{5}{4}\right)$.

$f(\frac{5}{4})=-\frac{1}{4}$

解：因为 0 属于范围 $0\leqslant x<1$，故 $f(0)=0^2+1=1$. 类似地，$f(1)=($ 0 $)$，$f\left(\frac{5}{4}\right)=($ $-\frac{1}{4}$ $)$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x+2}+\frac{1}{x^2-1}$　　(2) $y=\sqrt{x^2-1}$　　(3) $y=e^x$　　(4) $y=\log_2(x-1)$

解：(1)要使函数表达式有意义，应有 $\begin{cases} x+2\geqslant 0 \\ x^2-1\neq 0 \end{cases}$.

函数的定义域就是这个不等式组的(　　)，即 $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2)　$x^2-1\geqslant 0$　$-1<x<1$

(3)　R

(4)　$x-1>0$

$x>1$

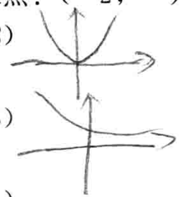
3. 作下列函数的图像.

(1) $y=2-x^2$　　(2) $y=x^2$　　(3) $y=e^{-x}$　　(4) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

解：(1)定性：图形为开口向下的抛物线；

取点：(−2，　)，(−1，　)，(0，　)，(1，　)，(2，　)，描点，成图.

(2)



(3)

(4)

【课堂提高练习】

1. 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

$f[g(x)]=f(2^x)=(2^x)^2=2^{2x}=4^x$　　$g[f(x)]=g(x^2)=2^{x^2}$

2. 分解下列复合函数.

(1) $y=e^{\sin x}$　　(2) $y=2/\sqrt{x^2+1}$　　(3) $y=\ln^2(x-1)$

$y=e^u$，$u=\sin x$　　$y=\frac{2}{\sqrt{u}}$，$u=x^2+1$　　$y=\ln^2(u)$，$u=x-1$

【课后练习(函数)】

1. 写出由下列函数构成的复合函数.

(1) $y=\sqrt{u}$，$u=\sin x$　　(2) $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=2x$

$y=\sqrt{\sin x}$　　$y=\cos^2 2x$

(3) $y=\ln u$，$u=3+x^2$　　(4) $y=e^u$，$u=x^2$

$y=\ln(3+x^2)$　　$y=e^{x^2}$

2. 分解下列复合函数.

(1) $y=\mathrm{e}^{-x^2}$　　(2) $y=2\sqrt{\sin x^2}$　　(3) $y=\ln^2(\cos(x-1))$

$y=e^{+u}$　$u=x^2$　　$y=2\sqrt{u}$　$u=\sin v$　$v=x^2$　　$y=\ln^2 u$　$u=\cos(v)$　$v=x-1$

3. 设 $g(x-1)=2x^2-3x-1$，

(1) 求 a，b，c 的值，使 $g(x-1)=a(x-1)^2+b(x-1)+c$　　(2) 求 $g(x+2)$ 的表达式

$a=2$　$a-b+c=-1$　$a(x^2-2x+1)+bx-b+c$

$b-2a=-3$

$b=1$　$c=-2$　$ax^2+(b-2a)x-b+c+a$

4. 求函数 $y=\sqrt{2-x}+\lg x$ 的定义域.

$2-x\geq 0$　$x>0$　$0<x\leq 2$

$x\leq 2$

5. 两函数复合的条件是什么？下列函数哪两个函数可以复合？求其复合函数.

(1) $f(x)=\ln x$　　(2) $g(x)=2^{x^2+10}$　　(3) $h(x)=-(x^2+10)$　　(4) $k(x)=\arcsin x$

【参考答案】

课堂提高练习

1. 4^x、2^{x^2}.

2. (1) $y=\mathrm{e}^u$，$u=\sin x$；(2) $y=\dfrac{2}{\sqrt{u}}$，$u=x^2+1$；(3) $y=u^2$，$u=\ln v$，$v=x-1$；

课后练习

1. (1) $y=\sqrt{\sin x}$；(2) $y=\cos^2 2x$；(3) $y=\ln(3+x^2)$；(4) $y=\mathrm{e}^{x^2}$

2. (1) $y=\mathrm{e}^u$，$u=-x^2$；

(2) $y=2\sqrt{u}$，$u=\sin v$，$v=x^2$；

(3) $y=u^2$，$u=\ln v$，$v=\cos w$，$w=x-1$

3. (1) $a=2$，$b=1$，$c=-2$；(2) $2x^2+9x+8$；

4. $(0, 2]$；

5. 略.

第二讲　极　　限

【课堂模仿练习】

1. 考察下列函数当$|x|$增大时函数值的变化情况.

(1)$y=\dfrac{1}{x}$(见图 2－1)　　　　(2)$y=2^x$(见图 2－2)

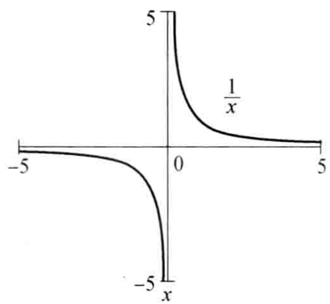


图 2－1

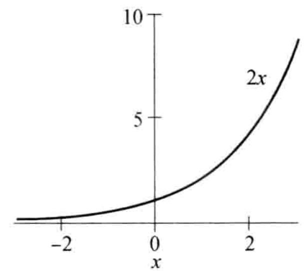


图 2－2

(3)$y=\arctan x$(见图 2－3)

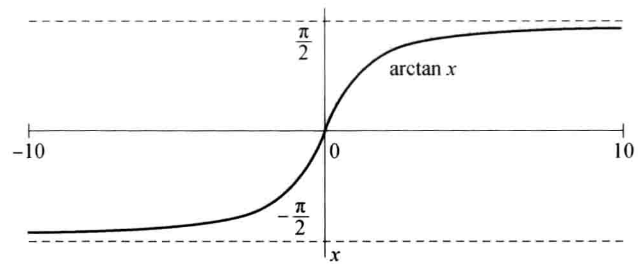


图 2－3

解：(1)$x\to+\infty$，或 $x\to-\infty$，函数值均趋于 0，即有 $x\to\infty$(当$|x|$无限增大)时，$y\to$(　　).

(2)

(3)

2. 求极限方法举例.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{3n^2+n+1}$　　(2)$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 2　　(3)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{2x}$　　(4)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$

解：(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{3n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n^2-1}{n^2}}{\dfrac{3n^2+n+1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}=\left(\frac{1}{3}\right).$$

(2)

(3)

(4)

【课堂提高练习】

1. (连续复利问题)设存款本金为 A_0，年利率为 r，以复利计息，试计算在下列情形下，n 年后的本利和 A_n：

(1)每年结算一次　　(2)每月结算一次　　(3)结算周期无限缩短

2. 求极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$　　(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\tan^2 2x}$　　(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2+3x}{3+3x}\right)^{x+1}$

【课后练习(极限)】

1. 计算下列极限：

(1)$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3}{x+1}$

$=\frac{-2}{2}$

$=-1$

(2)$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

$=\frac{2x-2}{2x}=0$

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x^2-2x+1}$

$=2$

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2}{n^2+1}$

$=\frac{n^2-2n+1}{n^2+1}$

$=1$

(5)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$

$=\frac{2x}{-\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}}$

(6)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{2x}$

$e^{\lim 2x\ln\frac{2x-1}{2x}}$

(7)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}$

$\frac{2x}{\cos x}=0$

(8)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x}$

$=2$

2. 填空：

(1)如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-1}{ax^m+x+\sqrt{2}}=\frac{3}{5}$，那么 $m=$ 2 ，$a=$ 5 ；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx+c}=$______；$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{1}{2^n}=$______.

3. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+ax+2}{2x+1}-bx\right)=1$，求 a，b 的值.

4. 设 $f(x)=a^x(a>0,\ a\neq 1)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]$.

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

【参考答案】

课堂提高练习

1. (1) $A_0(1+r)^n$；(2) $A_0\left(1+\dfrac{r}{12}\right)^{12n}$；(3) A_0e^{nr}.

2. (1) $\dfrac{1}{2}$；(2) $\dfrac{3}{4}$；(3) $e^{-\frac{1}{3}}$.

课后练习(极限)

1. (1) -1；(2) 0；(3) 2；(4) 1；(5) -2；(6) e^{-1}；(7) 0；(8) 2.

2. (1) 2，5；(2) e^{ab}，1.

3. $a=\dfrac{5}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$.

4. $\dfrac{1}{2}\ln a$.

5. 略.

第三讲　导数的概念(一)

【课堂模仿练习】

1. 已知 $f(x)=x^2-2x+1$，求

(1)当 x 从 0 变到 1 时函数的改变量；

(2)当 x 从 1 变到 2 时函数的改变量；

(3)当 x 从 1 变到 -1 时函数的改变量.

解：(1)$\Delta x=1-0=1$，

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f(\quad)-f(\quad)=(1^2-2\times1+1)-(0^2-2\times0+1)=-1,$$

或

$$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=(1^2-2\times1+1)-(0^2-2\times0+1)=-1;$$

上式中视 $x_1=(\quad)$，$x_2=(\quad)$.

注意：自变量的改变量 Δx、函数的改变量 Δy 都是可正可负的.

(2)

(3)

2. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}(x\neq0)$，在任意点 x 处的导数.

解：对 $f(x)=\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$，有 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(\quad)-(\quad)=(\quad)$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\quad}{\Delta x}\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\quad)=(\quad)$.

即 $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=(x^{(-1)})'=(-1)x^{(-2)}$.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$，在$(-1,-1)$与$\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$处的切线的斜率分别为 1 和 $-\dfrac{1}{9}$.

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

4. 设物体的运动方程为 $s=t^2-3t+\sqrt{t}$，求物体在 $t=1$ 秒，$t=t_0$ 秒时的瞬时速度.

解：第①步　求导：$s'=(2t-3+\dfrac{1}{2\sqrt{t}})$ $\cancel{v(t)}$ $=s'$；

第②步　求在 $t=1$ 秒的瞬时速度：$v(1)=(-\dfrac{1}{2})$；

求在 $t=t_0$ 秒时的瞬时速度：$v(t_0)=(2t_0-3+\dfrac{1}{2\sqrt{t_0}})$.

5. 求下列各曲线在给定点处的切线方程.

(1)已知 $y=x^3-2x-1$，求在点(2，3)处的切线方程.

解：第①步　求导：$y'=(3x^2-2)$；

第②步　求在 $x=2$ 处的切线斜率：$k=y'(2)=(10)$；

第③步　由点斜式写出切线方程：$y-(3)=(10)(x-(2))$.

(2)求曲线 $y=3x^2$ 在(1，3)处的切线方程.

$y'=6x$　　$y-3=6(x-1)$

$y'(1)=6$　　$6x-y-3=0$

【课堂提高练习】

1. 设 $y=\ln x$，利用定义求 y'.

$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln(x)$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln(x)}{\Delta x}=\dfrac{1}{x}$

2. 设 $y=\sin x$，利用定义求 y'.