王曾仪 主编

重点 难点 疑点 学习手册

ZHONGDIAN
NANDIAN
YIDIAN
XUEXISHOUCE

几何

初三

东北师范大学出版社

重点难点疑点学习手册

几　　何

初　　三

王曾仪　主编

东北师范大学出版社

(吉)新登字12号

主　编:王曾仪
编　者:王曾仪　徐振刚
　　　刘桂荣

重点难点疑点学习手册
几　何
JIHE
初　三
王曾仪　主编

责任编辑:杨明宝　封面设计:李冰彬　责任校对:迟玉红　刘秋霞

东北师范大学出版社出版　吉林省新华书店发行
(长春市斯大林大街110号)　东北师范大学出版社激光照排中心制版
(邮政编码:130024)　东北师范大学印刷厂印刷

开本:787×1092毫米 1/32　1996年5月第1版
印张:5.125　1996年5月第1次印刷
字数:115千　印数:00 001—10 000册

ISBN 7-5602-1825-3
G·897
本册定价:6.00元
全套定价:52.00元

出版说明

为了帮助广大师生更好地把握教材，准确、扎实地掌握教材中的重点，化解难点，消除疑点，培养学生的学习能力，发展其思维能力，提高其素质，我们组织部分省、市、县的教研员和第一线的特级、高级教师编写了这套丛书。

这套丛书共38册，覆盖了初中和高中语文、英语、历史、代数、几何、物理、化学诸科课程。

这套丛书严格依据国家教委制定的《全日制中学各科教学大纲》和全国统一教材编写。对重点、难点的确定，既考虑到大纲和教材的要求，又考虑到教学的实际情况，同时又使之形成一定的系统。对重点、难点的解析力求准确、清晰、简明、透彻。疑点主要是从启发学生思维，培养学生的质疑问难精神出发提出的，问题新颖，答疑注重比较和引申，拨云见日。

这套丛书编写的指导思想是突出其实用性，强调其科学性、针对性和新颖性。

书中除“重点、难点、疑点”及其解析外，还设有“典型例题解析”、“典型错解剖析”、“反馈练习”、“综合测试题”、“参考答案”等部分。

“重点、难点、疑点解析”针对教材中的重点、难点及学生学习过程中的疑点进行提炼并详细地解释、

说明。

“典型例题解析”围绕重点、难点选择有代表性的典型题为例子进行具体分析，以加深对重点、难点的理解，并指明思路，教给方法，培养学习能力。

“典型错解剖析”针对学生学习中常见的错误、易混淆的知识，通过剖析典型错例，明确错误根源，以防患于未然。

“反馈练习”按章节或单元进行编写，突出重点、适当加些难点内容，题型新颖多样，既便于阶段反馈检测，又有利于提高学生的分析问题、解决问题的能力。

“综合测试题”基本上按每个学期一套编拟，既突出重点，又考虑覆盖面，可作为检测和反馈所学知识之用。

在保持整套丛书体例基本一致的前提下，根据各科教材体系和实际情况，对上述各部分适当地进行了某些局部调整。

东北师范大学出版社

目　　录

第六章　解直角三角形

一、锐角三角函数

【重点、难点、疑点解析】

重　　点

1．锐角三角函数定义

在△ABC 中，$\angle C=90°$，则

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}\qquad \cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}$$

$$\mathrm{tg} A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}\qquad \mathrm{ctg} A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\angle A\text{ 的对边}}$$

2．正弦和余弦表、正切和余切表

（1）由已知锐角求它的三角函数值；

（2）由已知三角函数值求它对应的锐角．

3．三角函数间的关系

（1）互余角间的三角函数的关系

$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$　　$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$

$\mathrm{tg}(90°-\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha$　　$\mathrm{ctg}(90°-\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$

（2）同一锐角三角函数间的关系

平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

倒数关系：$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$

商的关系：$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

4. 0°～90°间的三角函数的性质

(1) 特殊角的三角函数值

三角函数名称 \ 三角函数值 \ 特殊角	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在
$\mathrm{ctg}\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

(2) 锐角三角函数的增减性

$\sin\alpha$、$\mathrm{tg}\alpha$ 的值随 α 的增大而增大，$\cos\alpha$、$\mathrm{ctg}\alpha$ 的值随 α 的增大而减小.

难　　点

1. 锐角三角函数的概念，说它是难点，是因为这里隐含着角度与数值之间的一一对应关系，角与数互相对应，并且用含有几个字母的符号组 $\sin A$，$\cos A$，$\mathrm{tg}A$，$\mathrm{ctg}A$ 来表示，学生过去未接触过. 同时，这也是这一章的关键，因为只有了解锐角三角函数的概念，才能正确理解直角三角形中边、角之间的关系，才能利用这些关系来解直角三角形.

2. 特殊角三角函数值的记忆，特殊角的正弦值可以这样来记：当角分别为0°、30°、45°、60°、90°时，正弦值依次为

$$\frac{\sqrt{0}}{2}、\frac{\sqrt{1}}{2}、\frac{\sqrt{2}}{2}、\frac{\sqrt{3}}{2}、\frac{\sqrt{4}}{2}$$

3. 利用三角函数表查余弦值和余切值，特别是表中修正

值的使用

为避免错误，除细心之外，必须牢记锐角三角函数的增减性，也可在查表时先确定待查之值的取值范围. 比如，要查 $\cos45°44'$ 的值，可先查得 $\cos45°42'=0.7034$，$\cos45°48'=0.7046$，从而知 $0.7034<\cos45°44'<0.7046$，这样也可避免使用修正值出现错误，要查 $\cos48°$ 之值时查 $\sin42°$，这也是捷径.

疑　　点

1. 当角在0°～90°范围内逐渐增大时，正弦值、正切值也随之增大，但一般来说，并无

$$\sin(\alpha_1+\alpha_2)=\sin\alpha_1+\sin\alpha_2 \qquad \sin2\alpha=2\sin\alpha$$

$$\mathrm{tg}(\alpha_1+\alpha_2)=\mathrm{tg}\alpha_1+\mathrm{tg}\alpha_2 \qquad \mathrm{tg}2\alpha=2\mathrm{tg}\alpha$$

等关系存在.

2. 0°角和90°角的三角函数值的存在性很难用锐角三角函数的定义加以理解，只要记住它们的三角函数值（或不存在）就可以了.

3. 设 $\angle A$、$\angle B$ 都是锐角，根据"当角度在0°～90°间变化时，正弦值随着角度的增大（或减小）而增大（或减小)，不仅可以由 $\angle A<\angle B$ 断定 $\sin A<\sin B$（或由 $\angle A>\angle B$ 断定 $\sin A>\sin B$)，还可以由 $\sin A<\sin B$ 断定 $\angle A<\angle B$（或由 $\sin A>\sin B$ 断定 $\angle A>\angle B$）.

4. 式子 $\mathrm{ctg}A=\dfrac{1}{\mathrm{tg}A}$ 并不是当 $\angle A$ 任取一固定值时都成立，而只有当 $\angle A$ 能使 $\mathrm{tg}A$ 有意义，且 $\mathrm{tg}A\neq0$ 时才成立.

5. 正（余）弦值与正（余）切值的取值范围是不同的，设 α 为锐角，则 $0<\sin\alpha<1$，$0<\cos\alpha<1$，而 $\mathrm{tg}\alpha$ 和 $\mathrm{ctg}\alpha$ 可为任何正实数，这是由锐角三角函数的定义所决定的.

6. 利用式子 $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$、$\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$进行计算时，可能遇到分子、分母都是分数的情况，即繁分式. 这时只要将除法转化为乘法就可以继续进行计算了，即利用

$$\mathrm{tg}\alpha=\sin\alpha\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\qquad \mathrm{ctg}\alpha=\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sin\alpha}$$

在后面，我们安排了这样计算的例题.

【典型例题解析】

例 1　$\sin^2 27°+\mathrm{tg}42°\cdot\mathrm{tg}48°-\cos 90°\mathrm{ctg}21°+\sin^2 63°=$______.

解：原式 $=\sin^2 27°+\sin^2(90°-27°)+\mathrm{tg}42°\cdot\mathrm{tg}(90°-42°)$

$-0\cdot\mathrm{ctg}21°$

$=(\sin^2 27°+\cos^2 27°)+\mathrm{tg}42°\cdot\mathrm{ctg}42°$

$=1+1$

$=2$

例2　不查表计算下列各题

（1）$\sin 15°\cdot\sin 30°\cdot\sin 45°\cdot\sin 60°\cdot\sin 90°-\cos 0°\cdot\cos 30°\cdot\cos 45°\cdot\cos 60°\cdot\cos 75°$

分析：可利用30°、45°、60°等特殊角的三角比值，一个锐角的正弦（或正切）值与其余角的余弦（或余切）值相等，以及四个三角比值的定义，还要注意使运算尽量简便.

解：原式 $=\sin 15°\cdot\sin 30°\cdot\sin 45°\cdot\sin 60°\cdot\sin 90°-$

$\sin(90°-0°)\cdot\sin(90°-30°)\cdot\sin(90°-45°)$

$\cdot\sin(90°-60°)\cdot\sin(90°-75°)$

$=\sin 15°\cdot\sin 30°\cdot\sin 45°\cdot\sin 60°\cdot\sin 90°-\sin 90°\cdot\sin 60°\cdot\sin 45°\cdot\sin 30°\cdot\sin 15°$

$=0$

说明：解此题时，经仔细审题可知不必将特殊角的三角比值（如 $\sin30°=\frac{1}{2}$等）代入.

（2）在 Rt△ABC 中，$a=\sqrt{7}+\sqrt{2}$，$b=\sqrt{7}-\sqrt{2}$，求∠A 的四个三角比值.

解：$c=\sqrt{a^2+b^2}$

$$=\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2}$$

$$=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}-2}{6}$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}-2}{6}$$

$$\mathrm{tg}A=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}=\frac{9+2\sqrt{14}}{5}$$

$$\mathrm{ctg}A=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\frac{9-2\sqrt{14}}{5}$$

说明：求得 tg$A$ 的值之后求 ctg$A$ 的值，是利用 ctg$A$ 的定义，还是利用 tg$A$ 与 ctg$A$ 的倒数关系，应做具体分析.

例3 设 α 为锐角，$\mathrm{tg}\alpha=\frac{24}{7}$，则 $\sin\alpha$ 的值为（　　）.

A. $\frac{7}{5}$　　B. $\frac{7}{25}$　　C. $\frac{24}{25}$　　D. $\frac{25}{24}$

解法1　由 α 为锐角知，$\sin\alpha<1$，从而排除 A、D.

由 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{24}{7}>1$，知锐角 $\alpha>45°$，从而知 $\sin\alpha>\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\sin\alpha>0.7071>0.5$，而$\frac{7}{25}<0.5$，从而排除 B.

故选 C.

解法2　$\mathrm{tg}\alpha=\frac{24}{7}=3.429$，查正切表知锐角

$$\alpha=73°45'$$

查正弦表又知

$$\sin\alpha=0.9600$$

由此知应选 C（$\because \frac{24}{25}=0.9600$）

解法3　作 Rt$\triangle ABC$，使$\angle C=90°$，$BC=24$，$AC=7$，则$\angle A=\alpha$.

$$\begin{aligned}AB&=\sqrt{AC^2+BC^2}\\&=\sqrt{7^2+24^2}=25\end{aligned}$$

$$\sin\alpha=\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{24}{25}$$

故选 C.

说明：解法1使用的是排除法，并使用了估算，在本题的解法中是最快捷的，解法2和解法3分别在允许查表与不允许查表的情况下更具有普遍性.

例4　把题中唯一正确答案的序号填在题后面的括号内.

若$\triangle ABC$ 不是钝角三角形，且关系式

$$\sin A=2\cos B\cdot\sin C$$

成立，则$\triangle ABC$ 一定是（　　）.

A. 等腰直角三角形　　　　B. 直角三角形

C. 等腰三角形　　　　　　D. 等边三角形

解法1　当$\angle A=90°$，$\angle B=\angle C=45°$时，

$$\sin A=1\quad 2\cos B\sin C=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$$

可见这时已知等式成立.

当$\angle A=\angle B=\angle C=60°$时，

$$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 2\cos B\sin C=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

可见这时已知等式也成立.

由上面第1种情况知，$\triangle ABC$ 不一定是等边三角形，不能选 D；由上面第2种情况知，$\triangle ABC$ 不一定是直角三角形，故不能选 A 与 B.

综上，只能选 C.

解法2　若 A 正确，则 B、C 也正确，与题设正确答案的唯一性矛盾，故不能选 A.

若 D 正确，则 C 也正确，故不能选 D.

若 C 正确，则下列三种情况中有一者成立.

（1）$\angle B=90°$，这时$2\cos B\cdot\sin C=0$，但 $\sin A\neq0$，故已知等式不成立，即$\angle B=90°$与题设矛盾.

（2）$\angle C=90°$，已知等式变为

$$\sin A=2\cos B$$

这时$\angle A+\angle B=90°$，$\sin A=\cos B$，代入上式得

$$\cos B=0 \qquad \therefore \quad \angle B=90°$$

同一三角形中不可能有两个直角，可见当已知等式成立时，$\angle C\neq90°$.

（3）$\angle A=90°$，这时 $\sin A=1$，$\cos B=\cos(90°-C)=\sin C$，已知等式变为

$$2\sin^2 C=1,\ \sin C=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \angle C=45°$$

这时$\angle B=\angle C$，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，前面已经说明这是不可能的.

由以上三种情况知，B 也应排除.

故选 C.

说明：本题也可用解直角三角形的知识解出.

例5 求证：

（1）当锐角 $A<45°$时，$\sin A<\cos A$；

（2）当锐角 $A\leqslant 45°$时，$\mathrm{tg}A\leqslant\mathrm{ctg}A$；

（3）当$\angle A$ 为锐角时，$\sin A<\mathrm{tg}A$；

（4）当$\angle A$ 为锐角时，$\mathrm{tg}^2A+\mathrm{ctg}^2A\geqslant 2$

证明：（1）$\because \angle A<45°$

$\therefore 2\angle A<90°$

即 $\angle A+\angle A<90°$

$\angle A<90°-\angle A$

由于当角度在0°～90°间变化时，正弦值随着角度的增大而增大，所以这时有

$\sin A<\sin(90°-A)$

而 $\sin(90°-A)=\cos A$

$\therefore \sin A<\cos A$

（2）① 设有$\triangle ABC$，$\angle C=90°$，$\angle A<45°$，由（1）的证明知

$\sin A<\cos A$

即$\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}<\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}$

$\therefore \angle A$ 的对边$<\angle A$ 的邻边

又$\because \mathrm{tg}A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}$　$\mathrm{ctg}A=\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}}{\angle A\text{ 的对边}}$

$\therefore \mathrm{tg}A<1$　$\mathrm{ctg}A>1$

$\therefore \mathrm{tg}A<\mathrm{ctg}A$

② 当$\angle A=45°$时，

$$\mathrm{tg}A=\mathrm{ctg}A=1$$

由①与②知，当锐角 $A\leqslant 45°$时，$\mathrm{tg}A\leqslant\mathrm{ctg}A$.

(3) 作 Rt$\triangle ABC$，$\angle C=90°$，则$\angle A$ 为锐角，这时，

$\sin A=\dfrac{BC}{AB}\quad \mathrm{tg}A=\dfrac{BC}{AC}$

$\because AB>AC\quad \therefore \dfrac{BC}{AB}<\dfrac{BC}{AC}$

$\therefore \sin A<\mathrm{tg}A$

(4) 由 $a^2\geqslant 0$（a 为任意实数）知

$$(\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{ctg}\alpha)^2\geqslant 0$$

即 $\qquad \mathrm{tg}^2\alpha-2\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha\geqslant 0$

又由当 A 为锐角时，$\mathrm{tg}A$ 与 $\mathrm{ctg}A$ 互为倒数知 $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$.

$\therefore \mathrm{tg}^2\alpha-2+\mathrm{ctg}^2\alpha\geqslant 0$

$\therefore\ \mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha\geqslant 2$

例6 把下面各题中唯一正确答案的序号填在题后面的括号内.

(1) 设关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0\,(ac\neq 0)$ 的两个根是 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$，则 $\mathrm{tg}\theta+\mathrm{ctg}\theta=$（　　）.

A. $\dfrac{b}{a}$　　B. $\dfrac{a}{b}$　　C. $\dfrac{c}{b}$　　D. $\dfrac{a}{c}$

解：$\mathrm{tg}\theta+\mathrm{ctg}\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}$$

又由题设知

$$\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{c}{a}$$

$\therefore\qquad \mathrm{tg}\theta+\mathrm{ctg}\theta=\dfrac{a}{c}$

故选 D.

(2) 关于 x 的二次方程 $x^2+2\sin\alpha\cdot x+\cos^2\alpha=0$（$0°<\alpha<$

45°）的根的情况是（　　）.

A. 有两个相等实根

B. 有两个不相等的实根

C. 无实根　D. 无法确定

解：已知一元二次方程的根的判别式

$$\begin{aligned}\triangle &= (2\sin\alpha)^2 - 4\cos^2\alpha \\ &= 4(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) \\ &= 4(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha)\end{aligned}$$

当$0° < \alpha < 45°$时

$\sin\alpha < \cos\alpha$，$\sin\alpha > 0$，$\cos\alpha > 0$，所以这时$\triangle < 0$，已知方程无实根.

故选 C.

例7　已知 α 为锐角，$\sin\alpha = \frac{1}{3}$，求 α 的其它三角比的值.

分析：已知一锐角的某一三角比的值，求其另外几个三角比的值，一般是要利用四个三角比之间的关系，这种关系反映在关系式 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$、$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$、$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$和 $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$之中. 此外，也可以采取先求出锐角的值或构造特殊的直角三角形的办法解之.

解法1：$\because \alpha$ 是锐角，

$$\therefore \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - (\frac{1}{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

解法2：$\sin\alpha=\frac{1}{3}=0.3333$

查表知　　$\alpha=19°28'$

$\cos\alpha=0.9428$，$tg\alpha=0.3534$，$ctg\alpha=2.829$.

解法3：如图 6 - 1 所示，作 Rt$\triangle ABC$，使 $BC=1$，$\angle C=90°$，$AB=3$，则$\angle A=\alpha$.

$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{3^2-1^2}$

$=2\sqrt{2}$

$\therefore\cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$tg\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$ctg\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{2\sqrt{2}}{1}=2\sqrt{2}$

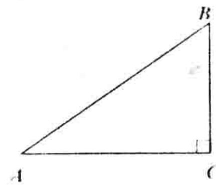

图 6- 1

例8　(1) 化简 $\sqrt{1-2\sin30°\cos30°}$

解法1：$\sqrt{1-2\sin30°\cos30°}$

$=\sqrt{1-2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{1^2-2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}=\frac{1}{2}|1-\sqrt{3}|=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$

解法2：原式$=\sqrt{\sin^2 30°-2\sin30°\cos30°+\cos^2 30°}$

$=\sqrt{(\sin30°-\cos30°)^2}$

$=|\sin30°-\cos30°|$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$

(2) 求 $tg1°\cdot tg2°\cdot tg3°\cdots tg89°$的值.

解：原式$=tg1°\cdot tg2°\cdot tg3°\cdots tg44°\cdot tg45°\cdot tg(90°-44°)\cdots$