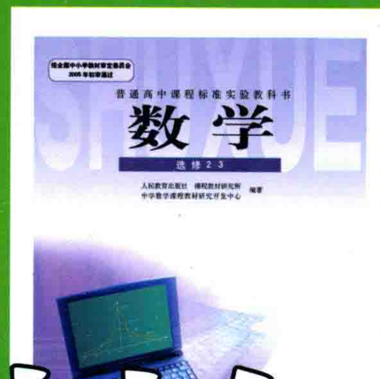
普通高中课程标准实验教科书同步教学资源



教材解读

数学

选修 2–3

人民教育出版社教学资源编辑室
北京百川菁华科技有限公司 策划组编

人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书同步教学资源

教材解读

数学

选修 2-3

人民教育出版社教学资源编辑室
北京百川菁华科技有限公司 策划组编

人民教育出版社

A版

图书在版编目(CIP)数据

教材解读：A版．数学．2-3：选修 / 人民教育出版社教学资源编辑室，北京百川菁华科技有限公司组编．—北京：人民教育出版社，2012.12
ISBN 978-7-107-25806-0

Ⅰ．①教…　Ⅱ．①人…　②北…　Ⅲ．①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第303680号

人民教育出版社出版发行
网址：http://www.pep.com.cn
北京汇祥印务有限公司印装　全国新华书店经销
2012年12月第1版　2012年12月第1次印刷
开本：890毫米×1240毫米　1/16　印张：11　字数：440千字
定价：24.80元
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与本社出版科联系调换。
（联系地址：北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）

《教材解读》编委会

前言

为了帮助广大师生更好地理解和把握教材，落实各学科课程标准要求，实现三维目标，人民教育出版社发挥教材研究编写的优势，组织教材编写专家、一线教研员和优秀教师，精心策划和编写了这套配合人教版教科书使用的同步系列丛书——《教材解读》。本丛书涵盖从小学到高中所有学科和学段。

本系列丛书综合了对教材的整体解读、单元解读和课节解读，并形成以下主要特色：

1. **高屋建瓴**。以“新、透、细、精”为编写原则，高屋建瓴地对教材知识点进行深入解读，系统总结教与学的规律方法，全方位拓展知识空间，融知识性、科学性、趣味性、针对性和实用性于一体，形成了基础与能力并重，综合与创新结合的科学体系。

2. **点面结合**。本书科学阐释了课节内容在整个单元或整套教材中的地位及《课程标准》对相关内容的具体要求，精细梳理各知识点，深入挖掘、研究教材中的重点、难点、易错易混点及其突破方法，关注教材所述内容的背景材料，形成对学生思维过程的策略引导，全面提升综合素养。

3. **活学活用**。本书在拓展应用中，注重典型例题和综合练习的对应性，突出题目的鲜活和示范特点，用最精练的题目、最科学的题型组合培养学生最具实效的解决问题的能力。

“不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海。”本丛书化面为点、点面结合，通过精准地解读、巧妙地点拨，致力于打造知识梳理、方法指导、针对练习“三位一体”的多功效参考书。希望她能成为老师备课、讲课、教研、教改的好助手，成为学生自主学习、有效复习的好老师，成为家长辅导孩子的好帮手。

由于编写时间紧迫和水平有限，本丛书一定还存在不足，特诚挚地希望广大读者提出批评和建议，以便再版修订时参考。在本套丛书的编写过程中，引用了部分相关资料，有的已与原作者取得联系，但有些未能与原作者取得联系，希望原作者看到此书后与我们联系，以便支付相应的稿酬。在此，特向各位作者表示诚挚的感谢。

编　者

CONTENTS 目录

第三章 统计案例

第一章　计数原理

思维导图

- 计数原理
  - 分类加法计数原理与分步乘法计数原理
    - 分类加法计数原理　P_2
    - 分步乘法计数原理　P_3
  - 排列与组合
    - 排列
      - 排列的概念　P_{11}
      - 排列数公式
        - $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$　P_{12}
        - $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$　P_{12}
      - 排列的应用　P_{12}
    - 组合
      - 组合的概念　P_{19}
      - 组合数公式
        - $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)(m-2)\cdots 2\times 1}$　P_{20}
        - $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$　P_{20}
      - 组合的应用　P_{22}
  - 二项式定理
    - 二项式定理　$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$　P_{32}
    - 二项展开式的通项 $T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$　P_{32}
    - “杨辉三角”与二项式系数的性质
      - (1)对称性：$C_n^m=C_n^{n-m}$　P_{36}
      - (2)增减性与最大值　P_{36}
      - (3)各二项式系数的和：$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$　P_{36}

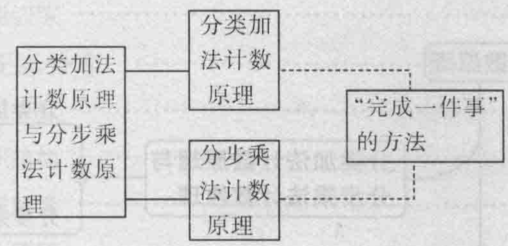
1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

第1课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

学习目标

1. 通过实例,总结出分类加法计数原理、分步乘法计数原理.
2. 理解并掌握分类加法计数原理和分步乘法计数原理.
3. 能根据具体问题的特征,选择分类加法计数原理或分步乘法计数原理解决一些简单的实际问题.

知识结构



知识解读

知识点一 分类加法计数原理

完成一件事有两类不同方案,在第1类方案中有m种不同的方法,在第2类方案中有n种不同的方法,那么完成这件事共有$N=m+n$种不同的方法.

1. 从集合的角度分析

设完成一件事的方法的集合是U,且$\text{Card}(U)=N$,如果完成这件事的方法可以区分为互不相同的A,B两类,即$A\cup B=U,A\cap B=\varnothing$,记$\text{Card}(A)=m,\text{Card}(B)=n$,那么$N=\text{Card}(U)=\text{Card}(A\cup B)=\text{Card}(A)+\text{Card}(B)=m+n$.

2. 推广

完成一件事有n类不同的方案,在第1类方案中有m_1种不同的方法,在第2类方案中有m_2种不同的方法,…,在第n类方案中有m_n种不同的方法,那么完成这件事共有$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$种不同的方法.

【温馨提示】

(1)"完成一件事"与"计算完成一件事的方法总数"的不同

如在问题"从1～9这九个数字中任取两个,共可组成多少个没有重复数字的两位数"中,"完成一件事"指的是"从1～9这九个数字中任取两个,组成没有重复数字的两位数",而不是"求满足条件的两位数的个数",只有准确理解了什么叫"完成一件事"才能进一步分析用什么方法完成.

(2)对问题进行"分类"时的思路

首先,分类时要根据问题的特点确定一个分类标准,然后在这个标准下进行分类.一般地,标准不同,分类的结果也不同;

其次,分类时要注意满足一个基本要求:完成这件事的任何一种方法必须属于且只能属于某一类方案.

简单地说,就是应用分类加法计数原理时要做到"不重不漏".

教材P_3"探究"答案

完成这件事共有$N=m_1+m_2+m_3$种不同的方法.

如果完成一件事情有n类不同方案,在第1类方案中有m_1种不同的方法,在第2类方案中有m_2种不同的方法,…,在第n类方案中有m_n种不同的方法,那么完成这件事就共有$m_1+m_2+\cdots+m_n$种不同的方法($m_1,m_2,\cdots,m_n\in\mathbf{N}^*$).

【例1】 从3名女同学和2名男同学中选1人主持本班的某次主题班会,则不同的选法种数为________.

解析:"完成一件事"指的是"从3名女同学和2名男同学中选1人主持主题班会",完成这件事有两类方法:

第1类,从3名女同学中任选1名,共有3种不同的选法;

第2类,从2名男同学中任选1名,共有2种不同的选法.

根据分类加法计数原理,从3名女同学和2名男同学中任选1名主持主题班会,不同的选法种数为$3+2=5$.

答案:5

【温馨提示】

分类加法计数原理中,"完成一件事,有两类不同的方案"是说每种方案互斥,即每种方法都可以独立地完成这件事,同时它们之间没有重复也没有遗漏.只有满足这个条件,才能直接应用分类加法计数原理.

知识点二 树形图

树形图亦称树状图或树枝状图,是以层次结构来组织对象的图形,是枚举法的一种表述方式.

【温馨提示】

枚举法是在进行归纳推理时,逐个考查某类事件的所有可能情况,从而得出一般结论的归纳方法.

【例 2】　用大写英文字母 A,B 和 1～5 五个阿拉伯数字，以 A_1，A_2，…，B_1，B_2，…的方式给两层楼的房间编号，试用树形图表示总共能编出的不同的号码.

分析：A 和 1～5 五个数字分别组合，B 和 1～5 五个数字分别组合.

解：所有可能的号码如图 1.1-1 所示.

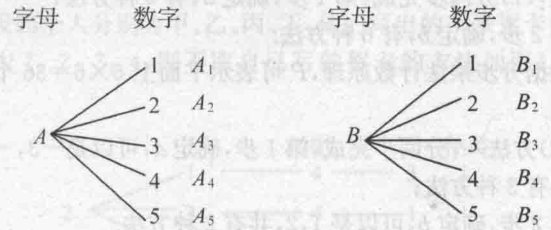


图 1.1-1

【温馨提示】

在用树形图表示各种情况时，注意不要遗漏其中的任何一种情况.

知识点三　分步乘法计数原理

完成一件事需要两个步骤，做第 1 步有 m 种不同的方法，做第 2 步有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m\times n$ 种不同的方法.

1. 从集合的角度分析

设完成一件事的方法的集合是 U，且 $\mathrm{Card}(U)=N$，如果完成这件事需要分成 A,B 两个步骤，即 $U=A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$，记 $\mathrm{Card}(A)=m$，$\mathrm{Card}(B)=n$，那么 $\mathrm{Card}(U)=\mathrm{Card}(A\times B)=\mathrm{Card}(A)\times\mathrm{Card}(B)=m\times n$.

2. 推广

完成一件事需要 n 个步骤，做第 1 步有 m_1 种不同的方法，做第 2 步有 m_2 种不同的方法……做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法.

【温馨提示】

对“完成一件事需要两个步骤”的理解：分步乘法计数原理中的“完成一件事需要两个步骤”，是指完成这件事的任何一种方法，都要分成两个步骤，在每一个步骤中任取一种方法，然后相继完成这两个步骤就能完成这件事，即各个步骤是相互依存的，每个步骤都要做完才能完成这件事. 这就是说，每个步骤都不足以完成这件事，两个步骤彼此间也不能有重复和遗漏.

对问题进行“分步”时的思路：分步时，要根据问题的特点确定分步标准，标准不同，分成的步骤数也会不同. 一个合理的分步应满足：

(1)完成这件事必须且只需连续做完所分步骤，即分别从各个步骤中选一种完成该步骤的方法，将各步骤方法依次串联在一起就得到完成这件事的一种方法；

(2)完成任何一个步骤可选用的方法数与其他步骤选用的方法无关.

简言之，就是应用分步乘法计数原理时要做到“步骤完整”.

教材 P_3“？”答案

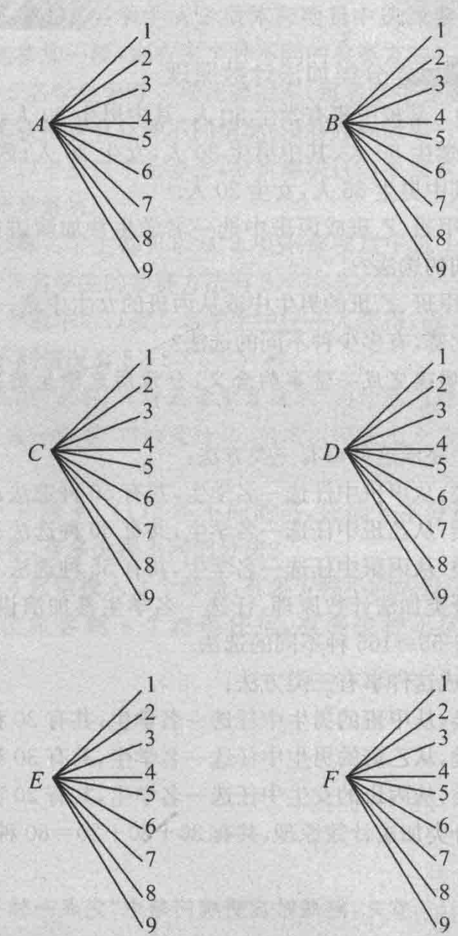


图 1.1-2

如图 1.1-2 所示，总共能编出 $6\times 9=54$ 个不同的号码.

教材 P_5“探究”答案

如果完成一件事需要三个步骤，做每一步的不同方法数分别为 m_1,m_2,m_3，那么完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times m_3$ 种不同的方法.

如果完成一件事情需要 n 个步骤，做每一步的不同方法数分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$，那么完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法.

【例 3】　有不同颜色的四件上衣与不同颜色的三条长裤，如果一条长裤与一件上衣配成一套，那么不同的搭配方法种数是________.

解析：完成一件事指的是“从四件上衣中选一件上衣，从三条长裤中选一条长裤搭配成一套”，完成这件事需要分两步：

第 1 步，从四件上衣中任选一件，共有 4 种不同的方法；

第 2 步，从三条长裤中任选一条，共有 3 种不同的方法.

由分步乘法计数原理，不同的搭配方法种数为 $4\times 3=12$.

答案：12

典例精析

类型一 分类加法计数原理

【例1】 某校甲班有学生50人，其中男生30人，女生20人；乙班有学生60人，其中男生30人，女生30人；丙班有学生55人，其中男生35人，女生20人.

(1)从甲班、乙班或丙班中选一名学生参加演讲比赛，有多少种不同的选法？

(2)从甲班、乙班的男生中或从丙班的女生中选一名学生参加围棋比赛，有多少种不同的选法？

分析：明确完成一件事的含义，分清所选学生的范围，分类求解.

解：(1)完成这件事有三类方法：

第一类，从甲班中任选一名学生，共有50种选法；

第二类，从乙班中任选一名学生，共有60种选法；

第三类，从丙班中任选一名学生，共有55种选法.

根据分类加法计数原理，任选一名学生参加演讲比赛共有$50+60+55=165$种不同的选法.

(2)完成这件事有三类方法：

第一类，从甲班的男生中任选一名学生，共有30种选法；

第二类，从乙班的男生中任选一名学生，共有30种选法；

第三类，从丙班的女生中任选一名学生，共有20种选法.

根据分类加法计数原理，共有$30+30+20=80$种不同的选法.

方法提炼：首先，解题时应明确问题中"完成一件事"指的是什么，再确定一个恰当的分类标准进行分类；

其次，在分类时完成这件事的任何一种方法必须属于某一类，并且分属于不同类的两种方法是不同的方法，即分类时要遵循"不重不漏，一步完成"的原则；

最后，把各类的所有方法数相加，可得完成这件事的所有方法数.

变式·拓展1 在1到20这20个整数中，任取两个数相减，差大于10，共有多少种取法？

类型二 分步乘法计数原理

【例2】 已知集合$M=\{-3,-2,-1,0,1,2\}$，$P(a,b)$表示平面上的点($a,b\in M$)，问：

(1)P可表示平面上多少个不同的点？

(2)P可表示平面上多少个第二象限的点？

(3)P可表示多少个不在直线$y=x$上的点？

分析：根据平面上不同位置点的坐标特征，分步解决.

解：(1)分两步完成：第1步，确定a，有6种方法；

第2步，确定b，有6种方法.

根据分步乘法计数原理，P可表示平面上$6\times6=36$个不同的点.

(2)方法一：分两步完成：第1步，确定a，可以是$-3,-2,-1$，共有3种方法；

第2步，确定b，可以是1,2，共有2种方法.

根据分步乘法计数原理，P可表示平面上第二象限的点共$3\times2=6$(个).

方法二：分三类：第1类，横坐标为-3的点有$(-3,1)$，$(-3,2)$，共2个点；

第2类，横坐标为-2的点有$(-2,1)$，$(-2,2)$，共2个点；

第3类，横坐标为-1的点有$(-1,1)$，$(-1,2)$，共2个点.

由分类加法计数原理，P可表示平面上第二象限的点共$2+2+2=6$(个).

(3)方法一：分两步完成：第1步，确定a，有6种方法；

第2步，确定b，有5种方法(a和b不相同).

根据分步乘法计数原理，P可表示不在直线$y=x$上的点共$6\times5=30$(个).

方法二：用树形图表示分类结果，如图1.1-3所示.

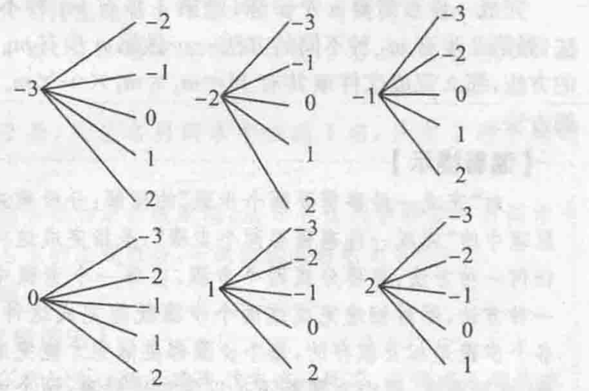


图1.1-3

共$6\times5=30$个.

方法三：在直线$y=x$上的点有$(-3,-3)$，$(-2,-2)$，$(-1,-1)$，$(0,0)$，$(1,1)$，$(2,2)$，共6个点，所以不在直线$y=x$上的点有$36-6=30$(个).

归纳总结：有些问题既可以分步完成，也可以分类解决.需要注意的是分步时步骤要完整，分类时标准要统一，要做到不重不漏.

变式·拓展2 一个植物园的参观路径如图1.1-4所示，若要全部参观并且路线不重复，则不同的参观路线种数为 ( )

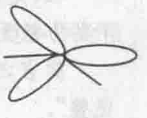


图1.1-4

A. 6　　B. 8

C. 36　　D. 48

类型三　枚举法解题

【例 3】　4 个人各写一张贺卡，放在一起，然后每个人取一张不是自己写的贺卡，共有多少种不同取法？

分析：给 4 个人编号，4 张卡片编号后，把所有可能一一列举出来，最后数出所有方法种数.

解：方法一：用树形图表示.

设四个人分别为甲、乙、丙、丁，他们写出的 4 张贺卡依次编号为 1，2，3，4，则不取自己写的贺卡的方法如图 1.1-5 所示.

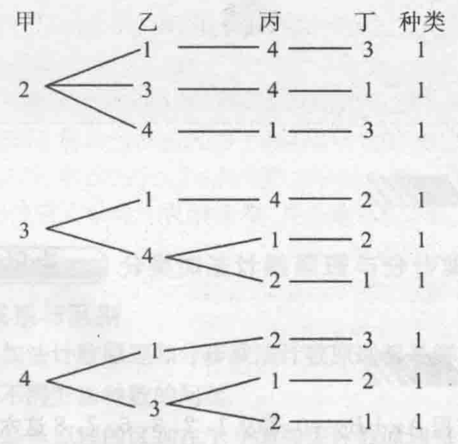


图 1.1-5

故共有 9 种不同的取法.

方法二：用表格表示.

四个人	各种取贺卡的方法								
甲	2	2	2	3	3	3	4	4	4
乙	1	3	4	1	4	4	1	3	3
丙	4	4	1	4	1	2	2	1	2
丁	3	1	3	2	2	1	3	2	1
方法编号	法 1	法 2	法 3	法 4	法 5	法 6	法 7	法 8	法 9

共有 9 种不同的取法.

方法提炼：用枚举法可以解决方法不是很多的问题. 通过枚举法，能够探究出规律，列出解决问题的式子，有利于使思维趋于条理化与缜密化.

变式·拓展 3　三人传球，由甲开始发球，并作为第 1 次传球，经过 5 次传球后，球仍回到甲手中，则不同的传球方式共有多少种？

类型四　允许元素重复选取的计数问题

【例 4】　(1)5 名学生从 3 项体育项目中选择参赛，若每名学生只能参加一项，则有多少种不同的参赛方法？

(2)若 5 名学生争夺 3 项比赛冠军(每名学生参赛项目不限)，则冠军获得者有几种不同情况(没有并列冠军)？

分析：(1)中应以学生为主，分步解决；(2)中应以“比赛冠军”为主，分步解决.

解：(1)每名学生都可以从 3 项体育项目中选 1 项，有 3 种选法，故 5 名学生的参赛方法有 $3\times3\times3\times3\times3=3^5$ 种.

(2)每个冠军可以被 5 名学生中任一人获得，故 3 个冠军获得者的不同情况有 $5\times5\times5=5^3$ 种.

解后反思：求解“允许元素重复选取”的计数问题时，首先要明确“完成一件事”指的是什么，确定以哪类元素为主，再分步解决.

变式·拓展 4　(1)8 本不同的书，任选 3 本分给3位同学，每人 1 本，有多少种不同的分法？

(2)将 4 封信投入 3 个邮筒，有多少种不同的投法？

(3)3 位旅客到 4 个旅馆住宿，有多少种不同的住宿方法？

三　易错点　漏计某数的正约数 1

【例 5】 270 的正约数的个数为________.

错解	正解
$\because 270=2\times3^3\times5$, $\therefore 270$的正约数有$1\times3\times1=3$个. 答案:3	$\because 270=2\times3^3\times5$, $\therefore 270$ 的正约数是 $2^i\times3^j\times5^k$,其中 $i=0,1$, $j=0,1,2,3$, $k=0,1$. $\therefore 270$ 的正约数有 $2\times4\times2=16$ 个. 答案:16

【误区警示】

误区:忽略了一个质因数有"取"和"不取"两种情况.

悟区:在求 270 的约数个数时,2^1 可以有 2^0, 2^1 两种取法,即在 270 的约数中有含 2 的,有不含 2 的. 同理,5^1 也有两种取法.

变式·拓展 5　由数字 0,1,2,3,4:

(1)可组成多少个三位数?

(2)可组成多少个没有重复数字的三位数?

全能训练

基础达标

1. 某学生去书店,发现 2 本好书,若他决定至少买其中一本,则不同的购买方式共有 (　　)

A. 4 种　　B. 3 种　　C. 2 种　　D. 1 种

2. 从 1, 2, 3, 5, 7 五个数字中任取 2 个分别作为分数的分子和分母,则不同的真分数共有 (　　)

A. 7 个　　B. 8 个　　C. 9 个　　D. 10 个

3. 4 名同学报名参加两个课外活动小组,每位同学限报其中的一个小组,则不同的报名方法共有 (　　)

A. 4 种　　B. 16 种　　C. 24 种　　D. 20 种

4. 从集合{1,2,3}和{−3,−2,−1,0}中各取一个元素作为点的坐标,则在平面直角坐标系中能确定不同点的个数为 (　　)

A. 12　　B. 11　　C. 24　　D. 23

能力提升

5. 在所有的两位数中,个位数字大于十位数字的两位数共有 (　　)

A. 50 个　　B. 45 个　　C. 36 个　　D. 35 个

6. 甲、乙两人从 4 门课程中各选修 2 门,则甲、乙所选的课程中恰有 1 门相同的选法有 (　　)

A. 6 种　　B. 12 种　　C. 24 种　　D. 30 种

7. 从 0, 1, 2, 3, 4, 5 六个数字中每次取 2 个不同的数字,可以组成________个无重复数字的两位偶数.

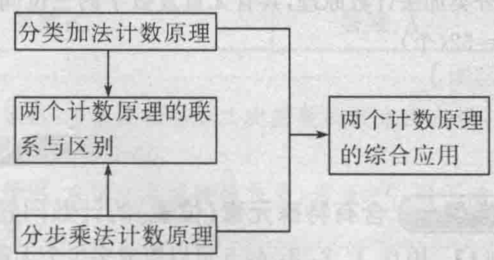
8. 直线方程 $Ax+By=0$,若从 1, 2, 3, 6, 7, 8 这六个数字中每次取两个不同的数字作为 A, B 的值,试求表示不同直线的条数.

第2课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的综合应用

学习目标

1. 能根据具体问题的特征选择两个计数原理解决一些实际问题.
2. 会根据具体问题合理分类、分步.
3. 会根据实际问题用非常规计数方法进行计数.

知识结构



知识解读

知识点一 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的联系与区别

分类加法计数原理和分步乘法计数原理都是解决有关做一件事的不同方法种数的问题.

两个基本原理的区别在于分类加法计数原理每次得到的是最后结果,分步乘法计数原理每次得到的是中间结果.表解如下:

	分类加法计数原理	分步乘法计数原理
区别一	完成一件事,共有 n 类办法,关键词是“分类”	完成一件事,共分 n 个步骤,关键词是“分步”
区别二	每类办法都能独立地完成这件事,它是独立的、一次的,且每次得到的都是最后结果,只需一种方法就可完成这件事	每一步得到的都只是中间结果,任何一步都不能独立完成这件事,缺少任何一步也不能完成这件事,只有各个步骤都完成了,才能完成这件事
区别三	各类办法之间是互斥的、并列的、独立的	各步之间是关联的、独立的,“关联”确保不遗漏,“独立”确保不重复

【例1】 设 P,G 是两个非空集合,定义 $P*Q=\{(a,b)|a\in P,b\in Q\}$,若 $P=\{0,1,2\}$,$Q=\{1,2,3,4\}$,则 $P*Q$ 中元素的个数是 ( )

A. 16 B. 12 C. 7 D. 6

解析:方法一:分两步完成:第1步,选 a,有3种方法;第2步,选 b,有4种方法.

由分步乘法计数原理,$P*Q$ 中元素的个数是 $3\times4=12$.

方法二:分三类解决:第1类,$a=0$,b 有4种取法;

第2类,$a=1$,b 有4种取法;

第3类,$a=2$,b 有4种取法.

由分类加法计数原理,$P*Q$ 中元素的个数是 $4+4+4=12$.

答案:B

【温馨提示】

对于有些计数问题,我们既可以用分类加法计数原理解决,也可以用分步乘法计数原理解决,此时,要注意权衡用哪种方法解决问题较为简便.

知识点二 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的综合应用

用两个计数原理解决计数问题时,最重要的是在开始计算之前明确问题中的“完成一件事”指的是什么,再仔细分析需要分类还是分步,依据是能否独立完成一件事.

(1)分类要做到“不重不漏”.分类后再分别对每一类计数,最后用分类加法计数原理求和,得到总数.

(2)分步要做到“步骤完整”.完成了所有步骤,恰好完成任务,当然步与步之间要相互独立.分步后再计算每一步的方法数,最后根据分步乘法计数原理,把完成每一步的方法数相乘,得到总数.

【温馨提示】

(1)有些计数问题既需要进行“分类”,又需要进行“分步”,此时就要注意综合运用两个原理来解决问题.解决这类问题时,首先要明确是先“分类”后“分步”,还是先“分步”后“分类”;其次,在“分类”和“分步”的过程中,均要确定明确的分类标准和分步程序.

(2)在既需要分类又需要分步的题目中,可以先根据对题意的理解,合理地画出示意图(如树形图)或列出表格,使问题的实质能直观地表示出来.

【例2】 由数字0,1,2,3,4,5可以组成多少个无重复数字的三位偶数?

分析:根据题意,需综合运用两种计数原理求解.

解:先分三类.第1类,个位数是0,再分步,百位数有5种选法,十位数有4种选法,所以个位是0的无重复数字的三位数有 $5\times4=20$(个);

第2类,个位数是2,再分步,百位数有4种选法,十位数

有4种选法，所以个位是2的无重复数字的三位数有 $4\times4=16$(个)；

第3类，个位数是4，与个位数是2的情况相同，有无重复数字的三位数 $4\times4=16$(个).

由分类加法计数原理，共有无重复数字的三位偶数 $20+16+16=52$(个).

【温馨提示】

当个位数字是2时，需先排百位，而百位只能从1，3，4，5中选取，共有4种不同的选法. 本题易出现的错误是忽略“0不能在首位”这一隐含条件，得到 $5\times4\times3=60$ 的错误结果.

典例精析

类型一 含有特殊元素(位置)的计数问题

【例1】 用0，1，2，3，4，5可以组成多少个无重复数字的比2 000大的四位偶数？

分析：比2 000大的四位偶数，千位数字可以是2,3,4,5，但个位数字只能是0，2，4，需根据特殊位置分类解决.

解：分三类解决：

第1类，个位数字是0，再分步，千位、百位、十位数字的排法分别有4种、4种、3种，所以个位数字是0，且比2 000大的四位偶数有 $4\times4\times3=48$(个)；

第2类，个位数字是2，再分步，千位、百位、十位数字的排法分别有3种、4种、3种，所以个位数字是2，且比2 000大的四位偶数有 $3\times4\times3=36$(个)；

第3类，个位数字是4，再分步，千位、百位、十位数字的排法分别有3种、4种、3种，所以个位数字是4，且比2 000大的四位偶数也有36个.

由分类加法计数原理，符合条件的四位偶数共有 $48+36+36=120$(个).

方法提炼：优先考虑特殊位置(元素)，再考虑其他位置(元素)，即可以先分类再分步.

变式·拓展1 某外语组有9人，每人至少会英语和日语中的一门，其中7人会英语，3人会日语，从中选出会英语和日语的各一人，有多少种不同的选法？

类型二 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的综合应用

【例2】 现有高一年级四个班的学生共34人，其中一、二、三、四班各有7人、8人、9人、10人，他们自愿组成数学课外小组，若推选两人当小组长，这两人需来自不同的班级，有多少种不同的选法？

分析：小组长的来源可以是一、二班，一、三班，一、四班，二、三班，二、四班，三、四班，应先分类再分步.

解：分六类，每类又分两步：

从一、二班学生中各选1人，有 (7×8) 种不同的选法；

从一、三班学生中各选1人，有 (7×9) 种不同的选法；

从一、四班学生中各选1人，有 (7×10) 种不同的选法；

从二、三班学生中各选1人，有 (8×9) 种不同的选法；

从二、四班学生中各选1人，有 (8×10) 种不同的选法；

从三、四班学生中各选1人，有 (9×10) 种不同的选法.

所以共有不同的选法 $N=7\times8+7\times9+7\times10+8\times9+8\times10+9\times10=431$(种).

归纳总结：对于复杂问题，当不能只用分类加法计数原理或分步乘法计数原理解决时，可以综合应用两个原理，先分类，在某一类中再分步，或先分步，在某一步中再分类.

变式·拓展2 某校开设A类选修课3门，B类选修课4门，一位同学从中共选3门. 若要求两类课程中各至少选1门，则不同的选法共有 ( )

A. 30种 B. 35种

C. 42种 D. 48种

类型三 涂色问题

【例3】 将红、黄、绿、黑4种不同颜色分别涂在图1.1-6中的五个区域内，要求相邻的两个区域的颜色都不相同，则有多少种不同的涂色方法？

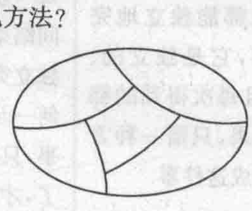


图1.1-6

分析：给各个区域标上记号，可以根据使用颜色种数进行分类，也可以根据不相邻两块区域颜色是否相同进行分类.

解：将五个区域分别标记为A，B，C，D，E，如图1.1-7所示.

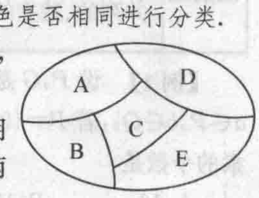


图1.1-7

方法一：由题意，本题可分成使用四种颜色和只使用其中三种颜色这两大类情况.

第一类：这四种颜色都用上，则根据哪两个区域同色，又分成两小类：

①当A与E不同色，B与D同色时，不同的涂色方法有 $4\times3\times2\times1=24$(种)；

②当A与E同色，B与D不同色时，不同的涂色方法有 $4\times3\times2\times1=24$(种).

由分类加法计数原理，四种颜色都用上，不同的涂色方法共有 $24+24=48$(种).

第二类：只使用这四种颜色中的三种颜色，则根据选哪三种颜色又可分为①选红、黄、绿，②选红、黄、黑，③选黄、绿、

黑,④选红、绿、黑,共4种情况.无论哪种情况,A与E,B与D都必须同色,则每种情况都有3×2×1=6种不同的涂色方法,共有不同的涂色方法4×6=24(种).

由分类加法计数原理,共有48+24=72种不同的涂色方法.

方法二:根据区域B与D颜色的相同与否,可分成以下两类:

第一类:当B与D同色时,首先涂B与D,有4种涂法;第二步涂A区域,有3种涂法;第三步涂区域C,有2种涂法;最后一步涂区域E,由于E与A不相邻,E与A可同色,也可不同色,有2种涂法.根据分步乘法计数原理,共有不同的涂色方法4×3×2×2=48(种).

第二类:当B与D不同色时,先涂B区域,有4种涂法;再涂D,有3种涂色方法;第三步涂C,有2种涂法;最后剩下区域A与区域E,只剩下一种颜色,因而A与E同色,只有1种涂法.由分步乘法计数原理,有不同的涂色方法4×3×2×1=24(种).

由分类加法计数原理,不同的涂色方法共有48+24=72(种).

方法提炼:解决涂色问题时,首先要关注图形的特征,如有多少块,用多少种颜色等;其次,如果图形不规则,往往从某一块出发进行分步涂色,选用分步乘法计数原理解决.如果图形具有一定的对称性,先对涂色方案进行分类,每一类再分步进行解决.

变式·拓展3　用四种不同颜色给图1.1-8中的A,B,C,D,E,F六个点涂色,要求每个点涂一种颜色,且图中每条线段的两个端点涂不同颜色,则不同的涂色方法共有　　(　　)

A. 288种　　B. 264种

C. 240种　　D. 168种

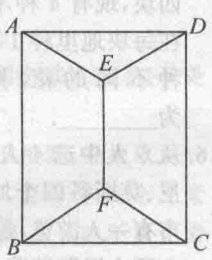


图1.1-8

三 易错点

1. 忽略特殊位置

【例4】从集合$A=\{0,1,2,3,4\}$中任取三个数作为二次函数$y=ax^2+bx+c$的系数a,b,c,则可构成不同的二次函数的个数是　　(　　)

A. 48　　B. 56　　C. 60　　D. 100

错解	正解
分步完成.c,b,a的不同取法分别有5,4,3种,所以符合条件的二次函数的个数是5×4×3=60. **答案**:C	分步完成.a,b,c的不同取法分别有4,4,3种,所以符合条件的二次函数的个数是4×4×3=48. **答案**:A

【误区警示】

误区:不能正确理解二次函数的概念而出错,二次函数中二次项系数$a\neq0$.

悟区:应优先考虑特殊位置,若$a=0$,则不满足二次函数的定义.

2. 分类、分步理解混乱

【例5】已知集合$A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{5,6,7\}$,$C=\{8,9\}$.现在从这三个集合中取出两个集合,再从这两个集合中各取出一个元素,组成一个含有两个元素的集合,则一共可组成的集合的个数为　　(　　)

A. 36　　B. 26　　C. 18　　D. 9

错解	正解
从A,B,C三个集合中任取两个集合,有AB,AC,BC三种方法.再从A和B中各取一个元素,有4+3=7种方法;同理,取A和C时有4+2=6种方法,取B和C时有3+2=5种方法.所以共可组成7+6+5=18个集合. **答案**:C	从A,B,C三个集合中任取两个集合有AB,AC,BC三种方法.再从A和B中各取一个元素组成一个二元集合有4×3=12种方法;同理,取A和C时有4×2=8种组成二元集合的方法,取B和C时有3×2=6种方法,所以共可组成12+8+6=26个集合. **答案**:B

【误区警示】

误区:从A,B,C三个集合中取出A和B,再分别从A和B中各取一个元素组成一个二元集合时,是分步完成而不是分类完成.

悟区:根据题意确定"分类"还是"分步",再确定标准进行"分类"或"分步".

直击高考

考　点	命题趋势
分类加法计数原理	以选择题或填空题的形式考查对分类加法计数原理的理解与应用,难度较小
分步乘法计数原理	以选择题或填空题的形式考查对分步乘法计数原理的理解与应用,难度较小
分类加法计数原理与分步乘法计数原理的综合应用	常与后面学习的排列、组合知识相结合,考查计数问题,难度中等偏上

【真题1】(2012·新课标全国·理)将2名教师,4名学生分成2个小组,分别安排到甲、乙两地参加社会实践活动,每个小组由1名教师和2名学生组成,不同的安排方案共有　　(　　)

A. 12种　　B. 10种

C. 9种　　D. 8种

解析:分两步:第1步,选派一名教师到甲地,另一名教师去乙地,有2种不同的方法;

第2步,设4名学生分别为A,B,C,D,则选派两名学生到甲地,另两名到乙地,有AB→甲地,CD→乙地,或AC→甲地,BD→乙地,或AD→甲地,BC→乙地,或BC→甲地,AD→乙地,或BD→甲地,AC→乙地,或CD→甲地,AB→乙地,共6种不同的方法.

由分步乘法计数原理，不同的选派方案共有 $2\times 6=12$(种).

答案：A

【**真题2**】 (2012·四川·理)方程 $ay=b^2x^2+c$ 中的 $a,b,c\in\{-3,-2,0,1,2,3\}$，且 a,b,c 互不相同，在所有这些方程所表示的曲线中，不同的抛物线共有 (　　)

A. 60条　　B. 62条　　C. 71条　　D. 80条

解析：利用计数原理结合分类讨论思想求解.

(1)当 $a=1$ 时，若 $c=0$，则 b^2 取4，9两个取值，共有2条抛物线；

若 $c\neq 0$，则 c 有4种取值，b^2 有2种取值，共有 $2\times 4=8$ 条抛物线.

(2)当 $a=2$ 时，若 $c=0$，b^2 有1，4，9三种取值，共有3条抛物线；

若 $c\neq 0$，当 $c=1$ 时，b^2 有2个取值，共有2条抛物线；

当 $c=-2$ 时，b^2 有2个取值，共有2条抛物线；

当 $c=3$ 时，b^2 有3个取值，共有3条抛物线；

当 $c=-3$ 时，b^2 有3个取值，共有3条抛物线.

故共有 $3+2+2+3+3=13$ 条抛物线.

同理，当 $a=-2,-3,3$ 时，共有抛物线 $3\times 13=39$(条).

由分类加法计数原理，共有抛物线 $39+13+8+2=62$(条).

答案：B

【**真题3**】 (2011·北京·理)用数字2，3组成四位数，且数字2，3至少都出现一次，这样的四位数共有________个(用数字作答).

解析：方法一：数字2，3至少都出现一次，包括以下情况：

"2"出现1次，"3"出现3次，先排"2"，有4种排法，其他位置排3，故有1个"2"，3个"3"的四位数有4个；

"2"出现2次，"3"出现2次，先排"2"，可以在千位百位、千位十位、千位个位、百位十位、百位个位、十位个位，其他相应两个位置填"3"，这样的四位数有6个；

"2"出现3次，"3"出现1次，有4个四位数.

由分类加法计数原理，符合条件的四位数有 $4+6+4=14$(个).

方法二：四位数的每个位次上的数字都有两种可能，所以用数字2，3组成的四位数有 $2^4=16$ 个，其中2 222，3 333不适合，故2，3至少都出现一次的四位数有 $16-2=14$(个).

答案：14

全能训练

基础达标

1. 在1，2，3，…，200中，能够被5整除的数共有 (　　)

A. 20个　　B. 25个　　C. 36个　　D. 40个

2. 从 -1，0，1，2这4个数中任选3个不同的数作为函数 $y=ax^2+bx+c$ 的系数，则可组成不同的二次函数共有________个，其中不同的偶函数共有________个(用数字作答).

3. A，B，C，D，E五人争夺一次比赛的前三名，组织者对前三名发给不同的奖品，若A获奖，B不是第一名，则不同的获奖方式有________种(用数字作答).

能力提升

4. 伦敦2012年奥运会火炬传递在A，B，C，D，E五个城市之间进行，各城市之间的路线距离(单位：百千米)见下表.

	A	B	C	D	E
A	0	5	4	5	6
B	5	0	7	6	2
C	4	7	0	9	8.6
D	5	6	9	0	5
E	6	2	8.6	5	0

若以A为起点，E为终点，每个城市经过且只经过一次，则火炬传递的最短路线距离是 (　　)

A. 20.6　　B. 21　　C. 22　　D. 23

5. 如图1.1-9，一环形花坛分成A，B，C，D四块，现有4种不同的花供选种，要求在每块地里种1种花，且相邻的两块地种不同的花，则不同的种法总数为________.

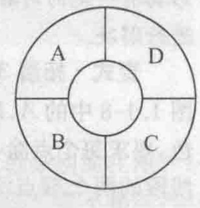


图 1.1-9

6. 从6人中选4人分别到巴黎、伦敦、悉尼、莫斯科四个城市旅游，要求每个城市有一人游览，每人只游览一个城市，且这6人中甲、乙两人不去巴黎游览，则不同的选择方案共有多少种？