SHUXUE

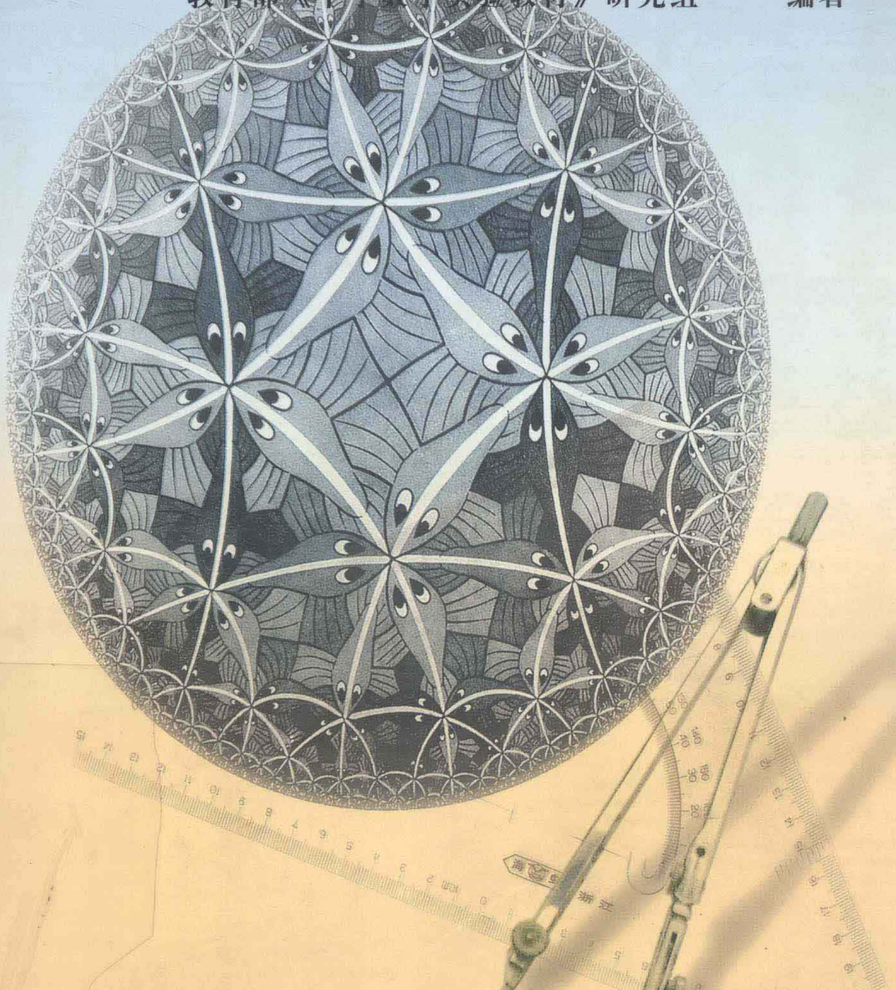
经全国中小学教材审定委员会2003年审查通过

全日制高级中学课本（必修）

数学

SHUXUE 第一册（下）

教育部《中学数学实验教材》研究组 编著



北京师范大学出版社

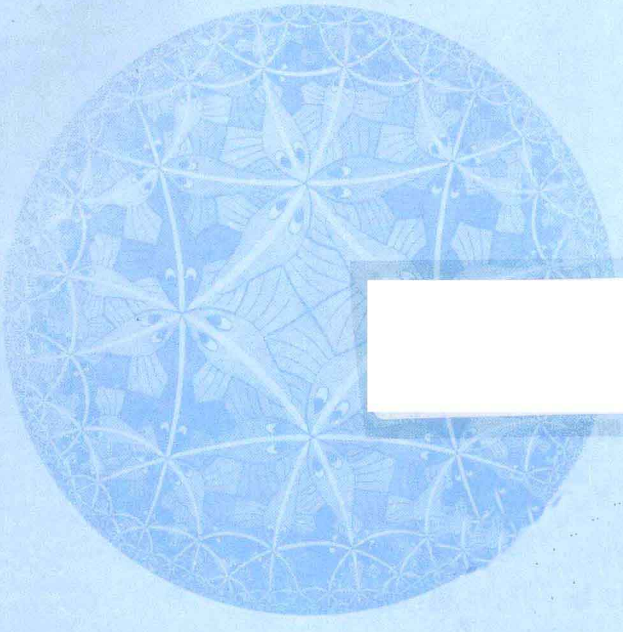
全国中小学教材审定委员会2003年审查通过

全日制高级中学课本（必修）

数学

第一册
（下）

教育部《中学数学实验教材》研究组 编著



北京师范大学出版社

北京

全日制高级中学课本(必修)

数学

第一册(下)

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号　邮政编码:100875)
出版人:赖德胜
北京京师印务有限公司印刷　全国新华书店经销
开本:185 mm×260 mm　印张:12.25　字数:310 千字
2003 年 7 月第 3 版　2006 年 12 月第 4 次印刷
印数:65 100～75 200 册
定价:10.10 元

前　言

这套高中数学教材是在教育部基础教育司的组织领导下，于1980年初，根据美国加州大学伯克莱分校（UC，Berkeley）数学系项武义教授的设想和初纲，由本教材实验研究组广泛听取了专家和中学数学界有丰富经验的教研员、教师的意见，集体讨论、分工编写而成的，并从1982年开始，在全国近20个省、市、自治区进行了十多年的实验教学。在吸取各地使用教材的宝贵经验的基础上，前后经过三次调整修订，于1993年正式出版，并被原国家教委推荐为全国高中数学教学和中学数学教师进修的参考书。

这套教材还特别于1989～1992年进行了一轮有组织、有计划的严格实验教学，完善和充实了有益于中学生学好基础、提高能力的内容和训练，使教材更具有特色。经过三年教学，实验班进行了单独命题的高考，取得了优良成绩，同时也为这套教材的修订及教学参考书的编写提供了丰富的经验和资料。

这套教材的重新修订是总结十多年的教学实验经验和实验研究成果，根据教育部最新颁发的“全日制普通高级中学数学教学大纲”的精神，为适应我国当前高中数学教学改革的新形势和新要求而进行的。全套教材经教育部中小学教材审定委员会2003年审查通过。从2000年开始，这套教材一直在全国部分省、市学校使用，效果良好。

本教材的指导思想是：精简实用，返璞归真，顺理成章，深入浅出，注重实践能力和创新精神的培养。

精简实用——科学地体现了理论与实践的正确关系。由实践到理论就是由繁到简；精而简的理论才能以简驭繁。

返璞归真——着重于学习基础数学的本质，而不拘泥于抽象的形式。

顺理成章——从历史发展顺序和认识的规律出发，自然地处理教材。力求顺理成章，注意提前渗透后面的重要概念和思想，为后面的学习预先做准备，使学习能比较顺利。同时，兼顾分析、综合、推理三种方法，以便真正掌握数学的精神实质和思想方法，培养思考能力。

深入浅出——只有学习到应有的深度才能浅出，其要点在于用易于接受的形式去掌握枢纽性的理论。

这套教材的教学目的、教学内容的确定和安排、教学中应注意的几个问题、教学测试和评估均与部颁大纲保持一致；教学内容和教学目标均源于大纲，包含了大纲中的必修与选修Ⅰ、Ⅱ的所有内容。教材中带“*”号的部分是有特色的内容，供教学中结合实际、灵活掌握选学；教材中的阅读材料为“弹性”内容，供学有余力的学生阅读自学。

这套教材在修订中，特别注意了以下事项：

1. 保持了本教材的特色。

(1) 数学知识结构的整体性、系统性较强。

(2) 重视数学上的通性、通法；在知识的展开上突出基本数学思想和数学方法，注重说理；体现知识教学和能力培养的统一。

(3) 尽力体现和渗透现代数学观点，使教材的科学性和发展性达到较高水平。

2. 增加了应用题、研究性课题和实习作业，尽力重视个性品质、科学态度、创新精神的培养和辩证唯物主义的教育。

3. 删减了原有的超纲内容，降低了难度，着眼于代数、几何、分析、概率与统计4个基础学科，选其精要基础的内容；但编排体系上，采取与部颁大纲基本一致的不分学科、统一处理、穿插安排的系统。

这套教材包括必修两册共四本，选修一册共两本。其主要内容分别是：

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一册（上）　集合与逻辑初步；不等式；函数。

第一册（下）　指数函数与对数函数；三角函数；数列。

第二册（上）　平面向量；直线和圆的方程；圆锥曲线方程。

第二册（下）　立体几何；排列、组合及二项式定理；概率。

第三册（理）　概率与统计；极限与连续；导数；复数。

第三册（文）　统计；导数。

第一、二册是供高中一、二年级必修使用，第三册是供高中三年级选修使用。其中，第三册（理）的内容是大纲中的选修Ⅱ，供高三理、工方向的学生使用；第三册（文）的内容是大纲中的选修Ⅰ，供高三文、实方向的学生使用。

参加修订编写的有丁尔陞、李建才、高存明、罗声雄、邱万作、万庆炎、叶尧城等同志。参加本册修订编写的还有袁桐、胡明健、葛军、李克大等同志。

热忱地欢迎大家使用这套教材，希望提出意见与建议，为提高我国数学基础教育水平共同努力。

教育部《中学数学实验教材》研究组

2003．3

目　录

第四章 指数函数与对数函数

1898 年，波兰物理学家玛丽·居里夫人与她的丈夫在简陋的条件下，靠着顽强的毅力，从数吨沥青铀矿中分离出一种极少量的放射性元素. 为了纪念她的祖国，他们将这种元素命名为钋(Po).

放射性元素钋经过一昼夜后，每 100 000 个原子核中就有 495 个发生衰变，成为其他元素. 也就是说，每经过一昼夜，剩留的钋占原来的 $1-4.95\times10^{-3}$. 那么，经过时间 t(日)后，钋的剩留量占原来的多少？如果我们需要求出钋的半衰期(即一定量的放射性物质中有一半衰变为其他物质所需的时间)，应当如何去求？计算这类问题将会涉及指数函数、对数函数的知识.

在 17 世纪，对数的发现，对于天文学及其他许多领域的贡献是难以想像的，它使人类终于冲破了数值计算的壁垒，向前跨越了一大步，其作用可以与现代电子计算机产生的计算革命相比拟. 恩格斯就曾把对数的发现称之为 17 世纪数学的三大成就之一，指出“它是数学科学的最有力的杠杆之一，如果没有它，今天就几乎无法进行一个比较困难的计算.”

本章在已有知识的基础上，首先将幂的指数扩充到实数范围，然后进一步学习两种互逆的运算——指数运算和对数运算、两种互为反函数的函数——指数函数和对数函数，以及它们的一些应用.

§1 指数函数

1.1 分数指数幂

1. 根式的概念

我们知道，如果一个数 x 的平方等于 a，那么这个数 x 叫作 a 的**平方根**. 由于 $\forall x\in \mathbf{R}$，都有 $x^2\geqslant 0$. 因此，$\forall a\in \mathbf{R}^-$，$a$ 的平方根不存在；$\forall a\in \mathbf{R}^+$，$a$ 的平方根有两个，即 $\pm\sqrt{a}$；0 的平方根是 0.

我们还知道，如果一个数的立方等于 a，那么这个数叫作 a 的**立方根**. $\forall a\in \mathbf{R}$，a 的立方根只有一个，即 $\sqrt[3]{a}$.

一般地，如果一个数的 n 次方等于 a（$n\geqslant 2$，且 $n\in \mathbf{N}^*$），那么这个数叫作 a 的 ***n* 次方根**.

当 n 是奇数时，$\forall a\in \mathbf{R}$，a 的 n 次方根表示为 $\sqrt[n]{a}$. 例如：$\sqrt[3]{-27}=-3$，$\sqrt[5]{32}=2$，$\sqrt[3]{a^6}=a^2$.

当 n 是偶数时，$\forall a\in \mathbf{R}^+$，$a$ 的 n 次方根有两个，即 $\pm\sqrt[n]{a}$（例如，16 的 4 次方根是 $\pm\sqrt[4]{16}=\pm 2$）；$\forall a\in \mathbf{R}^-$，$a$ 的 n 次方根不存在；0 的 n 次方根是 0，即 $\sqrt[n]{0}=0$.

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫作 ***n* 次根式**，这里 n 叫作**根指数**，a 叫作**被开方数**.

由定义可知，如果 x 是 a 的 n 次方根，那么 $x^n=a$. 例如，$(\sqrt[4]{3})^4=3$，$(\sqrt[3]{-27})^3=-27$.

也可以说，a 的 n 次方根就是方程 $x^n-a=0$ 的根（$n\geqslant 2$，$n\in \mathbf{N}^*$）. 根据方程有解的条件，当 n 为偶数时，必须 $a\geqslant 0$；当 n 为奇数时，$a\in \mathbf{R}$.

注意 $\sqrt[n]{a^n}$ 不一定等于 a.

当 n 是奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当 n 是偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$

例如，$\sqrt[4]{(-3)^4}=3$，$\sqrt[5]{(-3)^5}=-3$.

根式有如下性质：

(1) $\forall a>0, b>0$，都有 $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$；

(2) $\forall a>0$，都有 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^m}$.

其中 $m,n\in\mathbf{N}^*$，且 m,n 均不小于 2.

证明 (1) $\forall a>0, b>0, n\in\mathbf{N}^*, n\geqslant 2$. 因为

$$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=a\times b,$$

所以由定义知 $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$.

(2) $\forall a>0, m,n\in\mathbf{N}^*, m\geqslant 2, n\geqslant 2$. 因为

$$(\sqrt[n]{a})^{mn}=[(\sqrt[n]{a})^n]^m=a^m,$$

所以由定义可知 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^m}$.

运用这些性质，可以进行根式的运算和化简. 例如，$\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$.

例 1 解方程 $x^3+2\sqrt{2}=0$.

解 由于 $x^3=-2\sqrt{2}$，所以

$$x=\sqrt[3]{-2\sqrt{2}}=\sqrt[3]{-(\sqrt{2})^3}=-\sqrt[3]{(\sqrt{2})^3}=-\sqrt{2}.$$

例 2 求函数 $f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt[4]{2-x}$ 的定义域.

解 根据根式的定义，有

$$\begin{cases}x+2\geqslant 0,\\ 2-x\geqslant 0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x\geqslant -2,\\ x\leqslant 2.\end{cases}$$

所以，函数的定义域是 $[-2,2]$.

例 3 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{(3-\pi)^3}$；　　(2) $\sqrt[4]{(a-b)^4}\ (a<b)$；

(3) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{2}$；　　(4) $\sqrt[5]{(-2)^6}$.

解 (1) $\sqrt[3]{(3-\pi)^3}=3-\pi$；

(2) $\sqrt[4]{(a-b)^4}=|a-b|=b-a\ (a<b)$；

(3) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{2^2}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{2^6}=2$；

(4) $\sqrt[5]{(-2)^6}=\sqrt[5]{2^6}=2\sqrt[5]{2}$.

练习 1

1. 求下列各式的值：

试读结束：需要全本请在线购买

(1) $\sqrt[3]{(-8)^3}$；　　(2) $\sqrt{(-10)^2}$；

(3) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^2}$；　　(4) $\sqrt[6]{(x-y)^6}$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt[6]{-(x-2)^3}$；　　(2) $g(x)=\dfrac{\sqrt[3]{-x+1}}{\sqrt[4]{x+2}}$.

3. 求函数 $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt[4]{2-x}$的定义域和值域.

2. 分数指数幂

现在，我们要把指数由整数扩展到有理数.

$\forall r\in \mathbf{Q}$，都可以表示为 $r=\frac{p}{q}$，其中 $q\in \mathbf{N}^*$，$p\in \mathbf{Z}$. 当 $q=1$ 时，$r\in \mathbf{Z}$.

当 $q\in \mathbf{N}^*$ 且 $q\geqslant 2$ 时，如果 $p>0$，即 $p\in \mathbf{N}^*$，因为

$$r=\frac{p}{q}=p\cdot\frac{1}{q}=\frac{1}{q}+(p-1)\cdot\frac{1}{q}$$
$$=\left(\frac{1}{q}\right)\cdot 2+(p-2)\cdot\frac{1}{q}=\cdots=\left(\frac{1}{q}\right)\cdot p,$$

所以要使得 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$对分数指数幂也适用，一定有

$$a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{1}{q}}\cdot a^{(p-1)\cdot\frac{1}{q}}=(a^{\frac{1}{q}})^2\cdot a^{(p-2)\cdot\frac{1}{q}}=\cdots=(a^{\frac{1}{q}})^p. \quad (1)$$

因为 $a=a^{\frac{q}{q}}=a^{q\cdot\frac{1}{q}}=a^{\frac{1}{q}+(q-1)\cdot\frac{1}{q}}=a^{\frac{1}{q}}\cdot a^{(q-1)\cdot\frac{1}{q}}=\cdots=(a^{\frac{1}{q}})^q$，所以 $a^{\frac{1}{q}}$ 是方程 $x^q-a=0$ 的实根，也是 a 的 q 次方根. 这就是说，约定 $a^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{a}$是合理的.

又因为 $(a^{\frac{p}{q}})^q=((a^{\frac{1}{q}})^p)^q=(a^{\frac{1}{q}})^{p\cdot q}=((a^{\frac{1}{q}})^q)^p=a^p$. 所以 $a^{\frac{p}{q}}$ $(a\geqslant 0)$为方程 $x^q=a^p$ 的非负实数根，即约定 $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$也是合理的.

因此，有如下定义：

$$a^{\frac{p}{q}}=(\sqrt[q]{a})^p \quad (a>0,p\in\mathbf{N}^*,q\in\mathbf{N}^*),$$
$$a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} \quad (a>0,p\in\mathbf{N}^*,q\in\mathbf{N}^*).$$

0 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义.

这样，指数的概念就从整数指数推广到有理数指数.

对于任意有理数指数 r,s,都有下面的运算性质：

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}\quad (a>0, r, s\in \mathbf{Q});$$

$$(a^r)^s = a^{rs}\quad (a>0, r, s\in \mathbf{Q});$$

$$(ab)^r = a^r b^r\quad (a>0, b>0, r\in \mathbf{Q}).$$

指数还可以进一步扩展到实数.

若 $a>0$,p 是一个无理数,a^p 也表示一个确定的实数.例如 $2^{\sqrt{2}}$是一个确定的实数,只要规定了精确度,都可以利用计算器中的 $\boxed{Y^x}$ 键,求出它的近似值.例如,$\sqrt{2}$取近似值是 1.414 213 562 时,$2^{\sqrt{2}}$取近似值是 2.665 144 142.

有理数指数的运算性质,对于无理数指数幂都适用,有关概念和证明在本书从略.

例 4 求值：

(1)10^{-3}；　(2)$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5}$；　(3)$(-0.25)^{-1}$；

(4)$4^{\frac{3}{2}}$；　(5)$16^{-\frac{3}{2}}$；　(6)$0.008^{-\frac{2}{3}}$.

解 (1)$10^{-3}=\dfrac{1}{10^3}=0.001$；

(2)$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^5}=2^5=32$；

(3)$(-0.25)^{-1}=\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{-1}=\dfrac{1}{-\dfrac{1}{4}}=-4$；

64

(4)$4^{\frac{3}{2}}=(\sqrt{4})^3=2^3=8$；

(5)$16^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{16^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{(\sqrt{16})^3}=\dfrac{1}{64}$；

(6)$0.008^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{8}{1\,000}\right)^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{\dfrac{8}{1\,000}}\right)^2}=\dfrac{1}{\dfrac{4}{100}}=25.$

例 5 化简下列各式：

(1)$\dfrac{5x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{\left(+\dfrac{1}{4}x^{-1}y^{-\frac{1}{3}}\right)\left(-\dfrac{5}{6}x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}\right)}$；

(2)$\sqrt{a^3\cdot a\sqrt{a}\cdot a^6\cdot\sqrt[3]{a}}$；

(3)$\dfrac{m+m^{-1}+2}{m^{\frac{1}{2}}+m^{-\frac{1}{2}}}$；

(4) $(a^2x+ax^{1.5})(a^{1.5}x^{0.5}+a^{0.5}x)^{-1}$.

解 (1) $\dfrac{5x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{\left(-\dfrac{1}{4}x^{-1}y^{-\frac{1}{3}}\right)\left(-\dfrac{5}{6}x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}\right)}$

$=24x^{-\frac{2}{3}+1+\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=24x^{\frac{2}{3}}y=24y\sqrt[3]{x^2}$;

(2) $\sqrt{a^3\cdot a\sqrt{a}\cdot a^6\cdot\sqrt[3]{a}}=(a^3\cdot a^{\frac{3}{2}}\cdot a^6\cdot a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$

$=(a^{\frac{65}{6}})^{\frac{1}{2}}=a^{5\frac{5}{12}}=a^5\cdot\sqrt[12]{a^5}$;

(3) 原式 $=\dfrac{(m^{\frac{1}{2}})^2+2\cdot m^{\frac{1}{2}}\cdot m^{-\frac{1}{2}}+(m^{-\frac{1}{2}})^2}{m^{\frac{1}{2}}+m^{-\frac{1}{2}}}$

$=\dfrac{(m^{\frac{1}{2}}+m^{-\frac{1}{2}})^2}{m^{\frac{1}{2}}+m^{-\frac{1}{2}}}=m^{\frac{1}{2}}+m^{-\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{m}+\dfrac{\sqrt{m}}{m}=\dfrac{m+1}{m}\sqrt{m}$;

(4) 原式 $=\dfrac{a^2x+ax^{1.5}}{a^{1.5}x^{0.5}+a^{0.5}x}=\dfrac{ax(a+x^{0.5})}{a^{0.5}x^{0.5}(a+x^{0.5})}$

$=a^{0.5}x^{0.5}=\sqrt{ax}$.

练习 2

1. 求值：

(1) $25^{\frac{3}{2}}\times 8^{\frac{4}{3}}$;

(2) $(0.09)^{\frac{1}{2}}+64^{\frac{2}{3}}+0.125^{\frac{2}{3}}-\dfrac{1}{16^{-\frac{3}{2}}}$;

(3) $\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^0\right]^{-0.5}-7.5(\sqrt{4})^2-(-2)^{-4}+81^{0.25}$;

(4) $(8+2\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}\cdot(8-2\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}$.

2. 化简：

(1) $\dfrac{a^2+a^{-2}-2}{a^2-a^{-2}}$;　　(2) $(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}})^6$;

(3) $\left(\dfrac{8a^{-3}}{27b^6}\right)^{-\frac{1}{3}}$;　　(4) $2x^{-\frac{1}{3}}\left(2x^{\frac{1}{3}}-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{2}{3}}\right)$.

1.2 指数函数

改革开放以来,我国的国民生产总值持续增长.从1980年到1999年,国民生产总值翻了两番,就是说,经过20年,达到了原来的4倍.

这个结论是怎样得到的?按照十一届三中全会制定的计划,我国的国民生产总值每年平均增长7.2%.这就是说,经过 x 年,我国的生产总值是原来的 $(1+7.2\%)^x=1.072^x$ 倍.

当 $x=20$ 时,在计算器上用 $\boxed{Y^x}$ 键,可得到 $1.072^{20}=4.016\ 943\ 351$.

在函数 $y=1.072^x$ 的表达式里,自变量 x 是指数,而底数1.072是一个大于0且不等于1的常量.像这样的函数,称为指数函数.当底数是1时,对于一切实数 x,$y=1$,因而没有研究必要,可以从略.

一般地,函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)叫作**指数函数**,其中 x 是自变量,定义域是 $\mathbf{R}$.

先研究指数函数 $y=2^x$ 的性质和图象.

利用计算器 $\boxed{Y^x}$ 键列出 x,y 的对应值表:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	2.7	2.9	3
y	1	1.414	2	2.828	4	5.657	6.498	7.464	8
x	3.1	3.2	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4
y	8.574	9.190	10.556	11.314	12.126	12.996	13.929	14.929	16

从表中的数据可以看到,在 $x=0$ 时,$y=1$;在 $x>0$ 时,y 的值一直在增加,而且增加的速度越来越快.

当 x 从0增加到0.5时,y 增加了约0.4;

当 x 从0.5增加到1时,y 增加了约0.6;

当 x 从1增加到1.5时,y 增加了约0.8;

当 x 从 1.5 增加到 2 时，y 增加了约 1.2.

到了 $x>3.2$ 时，x 每增加 0.1，y 增加的值就接近 1 个单位.

如果把上述 x 的数值，换成它们的相反数，又可以用 $\boxed{\frac{1}{x}}$ 键得到 x，y 的对应值表：

x	-0.5	-1	-1.5	-2	-2.5	-3	-3.5	-4
y	0.707	0.5	0.354	0.25	0.177	0.125	0.088	0.063

可以看到，当 x 从 0 开始减小时，y 的值在减少，但减少的速度很慢.

从这些数据可以估计出函数 $y=2^x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$；值域是 $\mathbf{R}^+$；$x=0$ 时，$y=1$；在定义域上是增函数. 因此，它的图象应该都在 x 轴的上方，且经过点(0,1). 在 $x<0$ 时，函数值递增较慢；$x>0$ 时，函数值递增较快. 根据以上分析，我们可以画出如图 4-1 所示的草图.

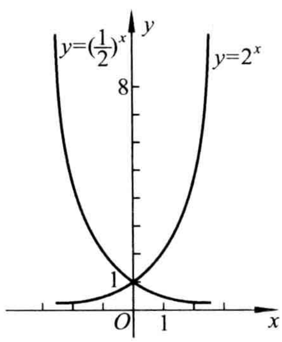


图 4-1

有了上述的计算与分析，还能得到函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象和性质.

这是因为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$，又点 $(-x,y)$ 与点 (x,y) 关于 y 轴对称. 因而，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象与 $y=2^x$ 的图象关于 y 轴对称(如图 4-1).

从函数图象又可以看出，函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$；值域是 $\mathbf{R}^+$；$x=0$ 时，$y=1$；在定义域上是减函数.

一般地，指数函数 $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$ 具有如下性质：(如图 4-2).

定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\mathbf{R}^+$.

$a>1$ 时，函数是增函数；$0<a<1$ 时，函数是减函数.

函数的图象都经过点(0,1)

事实上，指数函数的这些性质是可以证明的.

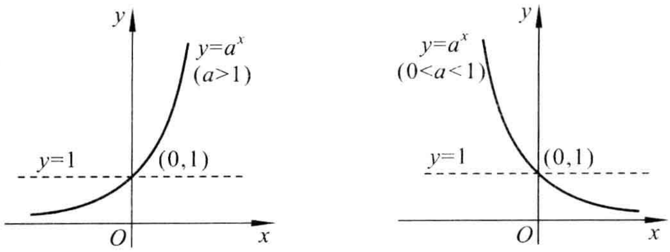


图 4-2

例如，已知函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1),x\in\mathbf{R}$.
求证：$f(x)>0$.

证明 首先 $\forall x\in\mathbf{R}$，根据指数运算法则，得

$$f(x)=a^x=a^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}=a^{\frac{x}{2}}\cdot a^{\frac{x}{2}}=(a^{\frac{x}{2}})^2\geqslant 0.$$

另一方面，可以证明：$\forall x\in\mathbf{R}, f(x)=a^x\neq 0$. 这是因为，假设 $\exists x_0\in\mathbf{R}$，使 $a^{x_0}=0$，则 $a^1=a^{x_0+(1-x_0)}=a^{x_0}\cdot a^{1-x_0}=0$，这与 $a>0$ 矛盾. 所以 $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)=a^x\neq 0$.

这表明了指数函数的值域是 $\mathbf{R}^+$；证明的依据是指数运算法则：$a^r\cdot a^s=a^{r+s}$；并且用到了反证法.

例 6 利用指数函数性质比较下列各组中两个数的大小：

(1) $1.7^{2.5}$，1.7^3；　　(2) $0.8^{-0.1}$，$0.8^{-0.2}$；

(3) $1.7^{0.8}$，$0.9^{2.8}$.

解 (1)因为 $y=1.7^x$ 是增函数，$2.5<3$，
所以 $1.7^{2.5}<1.7^3$；

(2)因为 $y=0.8^x$ 是减函数，$-0.1>-0.2$，
所以 $0.8^{-0.1}<0.8^{-0.2}$；

(3)因为 $1.7^{0.8}>1.7^0=1$，又因为 $0.9^{2.8}<0.9^0=1$，
所以 $1.7^{0.8}>0.9^{2.8}$.

想一想 (3)的解题思路依据是什么？

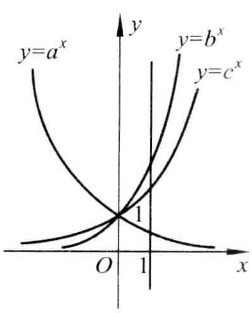


图 4-3

例 7 图 4-3 是 3 个指数函数 $y=a^x, y=b^x, y=c^x$ 的图象. 试比较 a,b,c 的大小.

解 作一直线 $x=1$ 与 3 个指数函数图象的交点应

试读结束：需要全本请在线购买：www.ertongbook.com