微积分（经济管理）

学习辅导

张伟　汪赛　朱金艳　等编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

微积分（经济管理）学习辅导

张　伟　汪　赛　朱金艳
张　倩　李晓飞　余　俊　编

机械工业出版社

本书是微积分学习辅导书．全书共11章，分别为函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量与空间解析几何初步、多元函数微分学、二重积分、微分方程与差分方程、无穷级数．每章分为本章知识结构图、内容精要、练习题与解答、自测题AB卷与答案和本章典型例题分析．

本书可作为学生学习微积分课程的同步学习辅导书，也可作为研究生考试第一轮复习用书，还可供教师和相关人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

微积分（经济管理）学习辅导/张伟等编．—北京：机械工业出版社，2013.9

ISBN 978-7-111-43848-9

Ⅰ.①微… Ⅱ.①张… Ⅲ.①微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第203686号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 陈崇昱 李 乐
版式设计：常天培 责任校对：张 媛
封面设计：路恩中 责任印制：乔 宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2013年10月第1版第1次印刷
184mm×240mm·28印张·712千字
标准书号：ISBN 978-7-111-43848-9
定价：55.00元

前　言

本书是微积分辅导书，是为学生同步学习、复习应试和考研而编写的，也可以作为教师的教学参考用书．本书的理论体系和章节安排与机械工业出版社出版的《微积分(经济管理)》第2版基本相同．

全书共分十一章，每章包括本章知识结构图、内容精要、练习题与解答、自测题AB卷与答案、本章典型例题分析五部分内容．

• 本章知识结构图

搭建本章主要的知识结构网络，知识结构图中以知识点为关键词概括了本章的总体轮廓，让读者清晰地看到本章的主要内容．

• 内容精要

简明扼要地对本章内容做总结归纳，主要是针对一些重要定义和定理的阐述，其中对高等数学中常见的考点做了进一步剖析和注解．建议读者对本部分内容要做细致的理解，尤其是知识点的注解部分，做到有目的地去学习．

• 练习题与解答

本部分为读者提供了大量的练习题，其特点为题量大，偏基础，题型丰富，容易上手．其中，练习题有详细的解答，并在每一部分的习题后总结了解决该类问题的方法．这一部分内容将为读者学好高等数学打下坚实基础．

• 自测题AB卷与答案

本部分提供了两套自测题，并附有详细的解答过程．A卷的难度稍低，和期中、期末考试题难度相当．B卷难度稍高，更接近考研题目水平．读者可利用这两套题来检验学习效果．

• 本章典型例题分析

本部分以历年考研数学真题为依据，总结每一章的主要考点和方法，每一道例题均含有分析和解答过程．大部分例题后面还有评注，主要是归纳总结解题方法和解题思路；更值得一提的是，针对读者在学习过程中常出现的错误进行评点并给予订正，让读者尽可能地避免再次出错．

编者得以完成本书要感谢中国矿业大学徐海学院基础教学部高等数学教研组的各位同事，是他们的鼓励和支持使我完成了这项工作．

最后，由于编者水平所限，本书难免存在疏漏和错误，编者真诚地欢迎读者及同行批评指正．

编　者

目　　录

第一章　函　　数

本章知识结构图

- 集合
  - 概念：具有某种共同属性事物的全体
  - 区间：一类常用的数集（开区间、闭区间等）
  - 邻域：某点 x_0 处的邻域 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\ (\delta>0)$
- 函数的概念与性质
  - 概念：数集到实数上的映射
  - 表示法：解析法、列表法、图示法等
  - 简单性态：有界性、单调性、奇偶性、周期性
  - 反函数：一一映射下存在反函数
- 初等函数
  - 基本初等函数
    - 幂函数：$y=x^{\mu}$（μ 为常数）
    - 指数函数：$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）
    - 对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）
    - 三角函数：$y=\sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x,\ \sec x,\ \csc x$
    - 反三角函数：$y=\arcsin x,\ \arccos x,\ \arctan x,\ \operatorname{arccot} x$
  - 幂指函数：$y=[f(x)]^{g(x)}$，其中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为函数
- 曲线的表示
  - 曲线参数方程表示
  - 极坐标
    - 构成：极点与极轴
    - 点的表示：极径与极角
    - 与直角坐标的转化：$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$
    - 曲线的表示：$\rho=\rho(\varphi)$
- 函数关系的建立
  - 方法：找出变量之间的对应关系
  - 经济中的常见函数

一、内容精要

（一）集合

集合是具有某种共同属性事物的全体，在高等数学中，我们研究的是数集，即

$$E=\{x\mid x \text{ 具有性质 } P,\ x\in\mathbf{R}\}.$$

1. 集合运算

并集：$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$，表示所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素的集合.

交集：$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$，表示所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素的集合.

集合的运算律：交换律、结合律、分配律和德摩根律，这里不一一列举.

2. 集合的两种重要形式

(1) 区间

集合$\{x \mid a<x<b\}$简记作(a, b)，称为开区间；集合$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$简记作$[a, b]$，称为闭区间. 类似地，还有$(a, b]$与$[a, b)$称为半开区间；$(-\infty, a)$与$(a, +\infty)$称为半无穷区间；$(-\infty, +\infty)$称为无穷区间.

(2) 邻域

集合$\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$称为点$x_0$的$\delta$邻域，通常简记作$U(x_0, \delta)$. 集合$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$称为点$x_0$的$\delta$去心邻域，通常简记作$\mathring{U}(x_0, \delta)$.

高等数学中，邻域在极限、导数等定义分析中有着重要的应用.

(二) 函数的概念与性质

1. 概念

设两个实数集D和M，若有对应法则f，使对D内每一个数x，都有唯一的一个数$y \in M$与它相对应，则称f是定义在数集D上的函数，记作$f: D \to M$，数集D称为函数f的定义域，x所对应的数y，称为f在点x的函数值，常记为$f(x)$.

$W=\{y \mid y=f(x), x \in D\}(\subset M)$称为函数$f$的值域，记为$R_f$.

函数的三要素是确定函数的关键，事实上，两个函数的定义域和对应法则一致时，两个函数就相等.

2. 函数的性态

欲使函数$y=f(x)$的图形清晰显现，掌握函数的相关性质，务必要刻画函数的如下几个性态：有界性、单调性、奇偶性和周期性.

(1) 有界性

设有函数$y=f(x)$，$x \in I$，对于$\forall x \in I$，$\exists M>0$(M为常数)，使得$|f(x)| \leqslant M$，则称函数$f(x)$在I上为有界函数；否则，称函数$f(x)$在I上为无界函数.

(2) 单调性

设有函数$y=f(x)$，$x \in I$，对于$\forall x_1<x_2(x_1, x_2 \in I)$，若$f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称函数$f(x)$在$I$内单调增加；若$f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称函数$f(x)$在$I$内单调减少.

(3) 奇偶性

设函数$f(x)$的定义域D是关于原点对称的区间，对于$\forall x \in D$，若$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数；若$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数.

(4) 周期性

设函数$y=f(x)$，如果存在非零常数T，使得定义域内任意一点x，恒有$f(x+T)=f(x)$，则称函数$y=f(x)$为周期函数，常数T称为这个函数的周期.

(三) 初等函数与反函数

1. 基本初等函数

函数	形式
常数函数	$y=C$（C 为常数）
幂函数	$y=x^{\mu}$（μ 为常数）
指数函数	$y=a^{x}(a>0, a\neq 1)$
对数函数	$y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$
三角函数	$y=\sin x$，$\cos x$，$\tan x$，$\cot x$，$\sec x$，$\csc x$
反三角函数	$y=\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$，$\operatorname{arccot} x$

2. 初等函数

由基本初等函数经有限次四则运算或复合而成的函数称为初等函数，其中有一个重要的初等函数为幂指函数，形式为 $y=[f(x)]^{g(x)}$.

3. 反函数

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 满足：对于值域 $f(D)$ 中的每一个值 y，D 中有且只有一个值 x 使得 $f(x)=y$，则按此对应法则得到一个定义在 $f(D)$ 上的函数，称这个函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$.

（四）常见的分段函数与经济上的几类函数

1. 常见的分段函数

（1）绝对值函数：$y=|x|$；

（2）符号函数：$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0;\end{cases}$

（3）取整函数：$y=[x]$，表示不超过 x 的最大整数.

2. 经济中常见的几类函数

（1）总成本函数与平均成本函数

总成本一般用 C 表示，固定成本用 C_0 表示，可变成本用 C_1 表示，C_1 是产量 q 的函数 $C_1=C_1(q)$，于是总成本函数为 $C=C(q)=C_0+C_1(q)$；平均成本就是单位产品的成本，用 $\overline{C}$ 表示，当产品产量为 q 个单位时，平均成本为 $\overline{C}=\overline{C}(q)=\dfrac{C(q)}{q}$.

（2）需求函数与供给函数

需求函数记为 $Q_{\mathrm{d}}=f(p)$；供给函数记为 $Q_{\mathrm{s}}=g(p)$，其中 p 是商品的价格，Q_{d} 是在价格 p 条件下，消费者购买的商品量（市场吸收量），即需求量. Q_{s} 是在价格 p 条件下，生产者提供给市场的商品量，即供给量.

（3）价格函数

需求函数的反函数称为价格函数，即 $p=f^{-1}(Q_{\mathrm{d}})$；实际应用中价格函数常表示为 $p=P(q)$，其中 q 为商品销售量.

（4）收益函数与平均收益

总收益是生产者出售一定量产品所得到的全部收入，等于商品销售量与价格的乘积，常

用 R 表示，则 $R=R(q)=qP(q)$，其中 q 为销售量，$P(q)$ 为价格函数；平均收益是单位商品的收益，用 $\overline{R}$ 表示，则 $\overline{R}=\overline{R}(q)=\dfrac{R(q)}{q}$.

(5) 利润函数

总收益减去总成本的差称为总利润，总利润用 L 表示，则 $L=L(q)=R(q)-C(q)$.

二、练习题与解答

习题 1.1　集合、区间、邻域

1. 已知 $A=\{0, 2, 4, 6, 9\}$，$B=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

【解】 $A\cap B=\{0, 2, 4\}$，$A\cup B=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 4, 6, 9\}$.

2. 已知 $A=\{x \mid x\geqslant -1\}$，$B=\{x \mid x<3\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

【解】 $A\cap B=\{x \mid -1\leqslant x<3\}$，$A\cup B=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$.

3. 把集合 $A=\{x \mid |x-3|\leqslant 2\}$ 用区间记号表示出来.

【解】 化简不等式 $|x-3|\leqslant 2$ 可得 $1\leqslant x\leqslant 5$，于是集合 A 可表示为 $[1, 5]$.

4. 用集合表示出 $U(2, 1)$，$U(-1, 2)$.

【解】 $U(2, 1)=\{x \mid |x-2|<1\}=\{x \mid 1<x<3\}$；

$$U(-1, 2)=\{x \mid |x+1|<2\}=\{x \mid -3<x<1\}.$$

5. 用区间表示出 $U(2, 1)$，$U(-1, 2)$.

【解】 由题 4 可得，$U(2, 1)$ 可以表示为 $(1, 3)$，$U(-1, 2)$ 可以表示为 $(-3, 1)$.

习题 1.2　函数

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x-4}$；　　(2) $y=\dfrac{2}{x-1}$；

(3) $y=\ln(x+1)$；　　(4) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{2+x}$.

【解】 (1) 函数中含有根式，故 $x-4\geqslant 0$，解得 $x\geqslant 4$，即函数的定义域为 $\{x \mid x\geqslant 4\}$.

(2) 分母不为零，即 $x-1\neq 0$，于是函数的定义域为 $\{x \mid x\neq 1\}$.

(3) 对数函数的真数大于零，即 $x+1>0$，于是函数的定义域为 $\{x \mid x>-1\}$.

(4) 函数的定义域满足：$\begin{cases}1-x^2\neq 0,\\ 2+x\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $x\geqslant -2$，且 $x\neq \pm 1$，所以函数的定义域为 $[-2, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, +\infty)$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}3x+5, & x\leqslant 0,\\ x^2, & x>0.\end{cases}$ 求 $f(-1)$，$f(1)$.

【解】　直接求解函数值，$f(-1)=2$，$f(1)=1$.

3. 求下列函数的反函数：

（1）$y=\sqrt[3]{x-1}$；　　（2）$y=\dfrac{1-x}{1+x}$；　　（3）$y=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ x^3, & x\geqslant 0.\end{cases}$

【解】　（1）由 $y=\sqrt[3]{x-1}$解得 $x=y^3+1$，即反函数为 $y=x^3+1$，$x\in\mathbf{R}$.

（2）由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$解得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，即反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，$x\neq-1$.

（3）当 $x<0$ 时，$y<-1$，解得 $x=y+1$；当 $x\geqslant 0$ 时，$y\geqslant 0$，解得 $x=\sqrt[3]{y}$，于是反函数为 $y=\begin{cases}x+1, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

4. 判断下列函数的奇偶性：

（1）$y=x^4(1-x^2)$；　　（2）$y=3x^5-\sin 2x$；

（3）$y=2^x+\dfrac{1}{2^x}$；　　（4）$y=|x-1|+|x+2|$.

【解】　（1）记 $f(x)=x^4(1-x^2)$，可以验证

$$f(-x)=(-x)^4[1-(-x)^2]=x^4(1-x^2)=f(x).$$

于是函数为偶函数.

（2）记 $f(x)=3x^5-\sin 2x$，可以验证 $f(-x)=-f(x)$. 所以函数为奇函数.

（3）记 $f(x)=2^x+\dfrac{1}{2^x}$，可以验证 $f(-x)=f(x)$. 于是函数为偶函数.

（4）记 $f(x)=|x-1|+|x+2|$，此函数既非奇函数又非偶函数.

5. 设 $f(x)$为任一函数，证明：

（1）$F(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$是偶函数；

（2）$G(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$是奇函数.

【证】　（1）可以验证 $F(-x)=\dfrac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=F(x)$，于是函数 $F(x)$为偶函数.

（2）可以验证 $G(-x)=\dfrac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-G(x)$，于是函数 $G(x)$为奇函数.

6. 设 $f(x)$是以 a 为周期的周期函数，证明：$f(x+b)$也是以 a 为周期的周期函数.

【证】　因为 $f(x)$是以 a 为周期的周期函数，于是对于任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(a+x)=f(x)$成立；事实上，$f(x+b+a)=f(x+b)$，于是 $f(x+b)$也是以 a 为周期的周期函数.

习题 1.3　基本初等函数与初等函数

1. 设 $f(x)=\arcsin x$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(1)$，$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

【解】 $f(0)=0$，$f(-1)=-\frac{\pi}{2}$，$f(1)=\frac{\pi}{2}$，$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$，$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$.

2. 设 $g(x)=2\arctan\frac{x}{2}$，求 $g(0)$，$g(2)$，$g(2\sqrt{3})$，$g(-2)$.

【解】 $g(0)=0$，$g(2)=\frac{\pi}{2}$，$g(2\sqrt{3})=\frac{2\pi}{3}$，$g(-2)=-\frac{\pi}{2}$.

3. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\arcsin\frac{x-2}{5-x}$；　（2）$y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$；　（3）$y=\ln(3-x)+\arctan\frac{1}{x}$.

【解】 （1）函数自变量满足：$\left|\frac{x-2}{5-x}\right|\leqslant 1$，

即

$$\begin{cases}5-x>0,\\ x-5\leqslant x-2\leqslant 5-x\end{cases}\quad 或者\quad \begin{cases}5-x<0,\\ 5-x\leqslant x-2\leqslant x-5,\end{cases}$$

解得 $x\leqslant\frac{7}{2}$. 于是函数的定义域为$\left\{x\mid x\leqslant\frac{7}{2}\right\}$.

（2）函数 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$的定义域为$\{x\mid x\neq 0\}$.

（3）函数自变量满足：$3-x>0$，且 $x\neq 0$，于是函数的定义域为$\{x\mid x<3$，且 $x\neq 0\}$.

4. 分解下列复合函数：

（1）$y=\cos(2x+1)$；　（2）$y=\ln\tan x$；

（3）$y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$；　（4）$y=\sqrt[3]{\ln\cos x}$；

（5）$y=\arcsin^2\sqrt{1-x^2}$；　（6）$y=2^{(x^2+1)^2}$.

【解】 （1）$y=\cos u$，$u=2x+1$；　（2）$y=\ln u$，$u=\tan x$；

（3）$y=\mathrm{e}^u$，$u=\frac{1}{x}$；　（4）$y=\sqrt[3]{u}$，$u=\ln v$，$v=\cos x$；

（5）$y=u^2$，$u=\arcsin v$，$v=\sqrt{w}$，$w=1-x^2$；

（6）$y=2^u$，$u=v^2$，$v=x^2+1$.

5. 设 $\varphi(x+1)=\frac{x+1}{x+5}$，求 $\varphi(x)$，$\varphi(x-1)$.

【解】 令 $x+1=u$，则 $x=u-1$，于是代入函数中得 $\varphi(u)=\frac{u-1+1}{u-1+5}=\frac{u}{u+4}$，所以

$$\varphi(x)=\frac{x}{x+4},\ \varphi(x-1)=\frac{x-1}{x+3}.$$

6. 设 $F(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$，证明：$F(t)=F\left(\frac{1}{t}\right)$.

【证】 $F\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{2}{t^2}+2t^2+5t+\frac{5}{t}=F(t)$.

习题 1.4　参数方程和极坐标

1. 将下列已知直角坐标点化为相应的极坐标点.

(1) $A(2,\ 0)$；　　(2) $B(0,\ 2)$；　　(3) $C(-\sqrt{3},\ 1)$.

【解】 (1) 由 $x=2$，$y=0$，知 $r=\sqrt{x^2+y^2}=2$，$\theta=\arctan\dfrac{y}{x}=0$，所以 $A(2,\ 0)$的极坐标为$(2,\ 0)$.

(2) 由 $x=0$，$y=2$，知 $r=\sqrt{x^2+y^2}=2$，$\theta=\arctan\dfrac{y}{x}=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $B(0,\ 2)$的极坐标为$\left(2,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(3) 由 $x=-\sqrt{3}$，$y=1$，知 $r=\sqrt{x^2+y^2}=2$，$\theta=\arctan\dfrac{y}{x}=\arctan\dfrac{1}{-\sqrt{3}}=-\dfrac{\pi}{6}$，$C$ 点在第二象限，所以$C(-\sqrt{3},\ 1)$的极坐标为$\left(2,\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$.

2. 将下列直角坐标方程化为极坐标方程，并在极坐标系中作图.

(1) $x^2+y^2=2ay(a>0)$；　　(2) $x^2+y^2=-2ax(a>0)$；

(3) $x=a(a>0)$；　　(4) $x^2+y^2-4x+2y-4=0$.

【解】 利用变量代换 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，将方程进行化简.

(1) $\rho^2=2a\rho\sin\theta$，即 $\rho=2a\sin\theta(a>0)$；

(2) $\rho^2=-2a\rho\cos\theta$，即 $\rho=-2a\cos\theta(a>0)$；

(3) $\rho\cos\theta=a$，即 $\rho=\dfrac{a}{\cos\theta}(a>0)$；

(4) $\rho^2-4\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-4=0$.

图形分别如图 1-1a、b、c、d 所示.

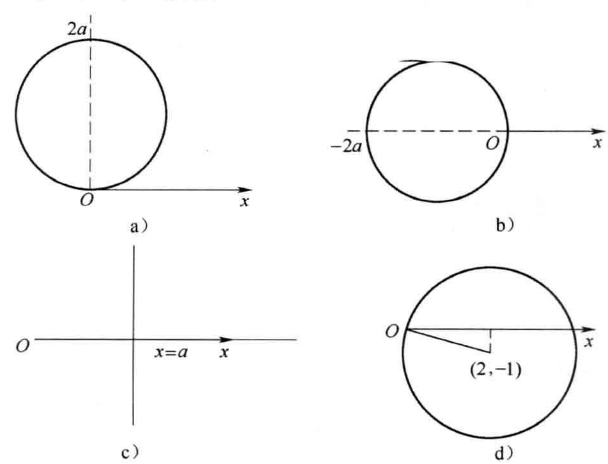

图　1-1

3. 画出下列极坐标方程的图形.

(1) $\rho=4$;　　　　(2) $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

【解】 图形分别如图 1-2a、b 所示.

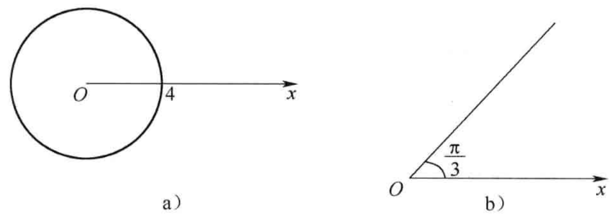

图 1-2

习题 1.5　函数关系的建立

某种毛料出厂价格为 90 元/m，成本为 60 元/m. 为促销起见，决定凡是订购量超过 100m 的，每多订购 1m，降价 0.01 元，但最低价为 75 元/m.

(1) 试将每米实际出厂价 p 表示为订购量 x 的函数；

(2) 将厂方所获取的利润 L 表示为订购量 x 的函数；

(3) 某商家订购 1000m 时，厂方可获利多少?

【解】 (1) 由题意可知，每米实际出厂价 p 的函数为

$$p=\begin{cases}90, & 0\leqslant x\leqslant 100,\\ 90-0.01(x-100), & 100<x<1600,\\ 75, & x\geqslant 1600\end{cases}=\begin{cases}90, & 0\leqslant x\leqslant 100,\\ 91-0.01x, & 100<x<1600,\\ 75, & x\geqslant 1600.\end{cases}$$

(2) 根据(1) 的结论，于是厂方所获取的利润 L 可表示为

$$L=(p-60)x=\begin{cases}30x, & 0\leqslant x\leqslant 100,\\ 31x-0.01x^2, & 100<x<1600,\\ 15x, & x\geqslant 1600.\end{cases}$$

(3) 当商家订购 1000m 时，厂方可获利

$$L=31\times 1000-0.01\times 1000^2=21000(\text{元}).$$

三、自测题 AB 卷与答案

自测题 A

1. 确定下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{2-x}{3x^2-x}$;　　　　(2) $y=\dfrac{2}{9-x^2}+\lg(2-x)$.

2. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求 $f(x^2)$，$f(\ln x)$，$f(e^x)$ 的定义域.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x>0,\\ 3+x^2, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(0)$，$f(2)$，$f(-1)$.

4. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1-2x}$，求 $f(f(x))$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 3x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ $g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f(g(x))$.

6. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=x\mathrm{e}^{-x^2}$；　　(2) $y=\dfrac{\sin x}{x}$；

(3) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$；　　(4) $y=\dfrac{|x|}{x}$；

(5) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$；　　(6) $y=\sqrt{x^2+1}+x$.

7. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$；　　(2) $y=\dfrac{2x+1}{3-x}$；

(3) $y=2\sqrt[3]{x}$.

8. 某厂生产某种产品 10000t，当销售量为 5000t 以内时，定价为 150 元/t；当销售量超过 5000t 时，超过 5000t 的部分按销售定价的 9 折出售．试将销售总收入表示成销售量的函数.

9. 某厂某产品的年产量为 x 台，且年产量不超过 5000 台，单价为 2300 元，单台产品成本为 1000 元．当年产量在 3000 台以内时可全部销售出去；当年产量超过 3000 台时，产品会有三成销售不出去，经广告宣传后可多销 1000 台，平均广告费为每台 50 元，试将本年的销售收益 R 表示为年产量 x 的函数.

自测题 B

1. 单项选择题：

(1) 函数 $y=\sqrt{3-x}+\lg(x+1)$ 的定义域是

(A) $(-1,3)$；　(B) $[-1,3)$；　(C) $(-1,3]$；　(D) $(3,+\infty)$.　[　　]

(2) 设 $f(u)=\begin{cases}u-1, & u<0,\\ u+1, & u\geqslant 0,\end{cases}$ $u=\varphi(x)=\ln x$，则 $f(\varphi(\mathrm{e}))=$

(A) -1；　(B) 0；　(C) 1；　(D) 2.　[　　]

(3) 下列函数是奇函数的是

(A) $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$；　(B) $f(x)=\sin^3x\cdot\tan x$；

(C) $f(x)=x^3+x^4$；　(D) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$.　[　　]

(4) 设函数 $f(x)$ 是奇函数，且 $F(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$，则函数 $F(x)$ 是

(A) 偶函数；　　(B) 奇函数；

(C) 非奇非偶函数；　　(D) 不能确定．　　[　　]

(5) 函数 $y=\sin^2(2x+1)$ 的复合过程是

(A) $y=\sin^2 u$，$u=2x+1$；　　(B) $y=u^2$，$u=\sin(2x+1)$；

(C) $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=2x+1$；　　(D) $y=\sin u^2$，$u=2x+1$.　　[　　]

2. 填空题：

(1) 设 $f(x)=4x+3$，则 $f(f(x)-2)=$ ________.

(2) 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，如果 $f(x)+f(y)=f(z)$，则 $z=$ ________.

(3) 设 $f(x+1)=x^2+3x+2$，则 $f(x)=$ ________.

(4) 设 $y=-\sqrt{x^2-1}\,(x\geqslant 1)$，则其反函数为 ________.

3. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$.

4. 证明：函数 $f(x)=\dfrac{ax-b}{cx-a}$ 的反函数就是它自己 $(a^2+c^2\neq 0)$.

5. 某种物品从甲地运往乙地的规定费用如下：当物品重量不超过50kg时，按0.15元/kg计算；当物品重量超过50kg时，超出部分按每千克收费0.25元．记物品重量为 x(单位：kg)，记运费为 y(单位：元). 求 y 与 x 之间的函数关系．并问物品重量分别为25 kg及60 kg时运费各为多少?

6. 某型号空调每台售价为4000元时，每月可销售50000台；每台售价为3800元时，每月可多销售5000台．若该型号空调的需求量为价格的一次函数，试求该型号空调的每月需求函数.

自测题 A 答案

1.【解】 (1) 函数自变量满足 $3x^2-x\neq 0$，于是函数的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq 0\text{ 且 }x\neq\dfrac{1}{3}\right\}$.

(2) 函数自变量满足：$\begin{cases}9-x^2\neq 0,\\ 2-x>0,\end{cases}$ 解得函数的定义域为 $\{x\,|\,x<2\text{ 且 }x\neq -3\}$，即定义域为 $(-\infty,-3)\cup(-3,2)$.

2.【解】 (1) 令 $x^2=u$，于是函数 $f(u)$ 的自变量满足 $0\leqslant u=x^2\leqslant 1$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，所以函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,1]$.

(2) 令 $\ln x=u$，于是函数 $f(u)$ 的自变量满足 $0\leqslant \ln x=u\leqslant 1$，解得 $1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$，所以函数 $f(\ln x)$ 的定义域为 $[1,\mathrm{e}]$.

(3) 令 $\mathrm{e}^x=u$，于是函数 $f(u)$ 的自变量满足 $0\leqslant u=\mathrm{e}^x\leqslant 1$，解得 $x\leqslant 0$，所以函数 $f(\mathrm{e}^x)$ 的定义域为 $(-\infty,0]$.

3.【解】 $f(0)=3$，$f(2)=1$，$f(-1)=4$.

4.【解】 $f(f(x))=\dfrac{f(x)}{1-2f(x)}=\dfrac{\dfrac{x}{1-2x}}{1-2\cdot\dfrac{x}{1-2x}}=\dfrac{x}{1-4x}.$

5.【解】 $f(g(x))=\begin{cases}[g(x)]^2, & 0\leqslant g(x)\leqslant 1,\\ 3g(x), & 1<g(x)\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}e^{2x}, & 0\leqslant e^x\leqslant 1,\\ 3e^x, & 1<e^x\leqslant 2\end{cases}$

$$=\begin{cases}e^{2x}, & x\leqslant 0,\\ 3e^x, & 0<x\leqslant \ln 2.\end{cases}$$

6.【解】 (1) 令 $f(x)=xe^{-x^2}$，因为

$$f(-x)=-xe^{-(-x)^2}=-xe^{-x^2}=-f(x),$$

所以 $f(x)=xe^{-x^2}$ 为奇函数.

(2) 令 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，因为

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x),$$

所以 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 为偶函数.

(3) 令 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$，因为

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-f(x),$$

所以 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ 为奇函数.

(4) 令 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，因为

$$f(-x)=\frac{|-x|}{-x}=-\frac{|x|}{x}=-f(x),$$

所以 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 为奇函数.

(5) 令 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，因为

$$f(-x)=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x),$$

所以 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 为偶函数.

(6) 令 $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$，因为

$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}+(-x)=\sqrt{x^2+1}-x,$$

即

$$f(-x)\neq -f(x),\ f(-x)\neq f(x),$$

所以此函数既非偶函数也非奇函数.

7.【解】 (1) 由 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 解得 $x=\log_{\frac{1}{2}}y$，于是反函数为 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$，定义域为$(0,+\infty)$.

(2) 由 $y=\frac{2x+1}{3-x}$ 解得 $x=\frac{3y-1}{y+2}$，于是反函数为 $y=\frac{3x-1}{x+2}$，定义域为$(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

(3) 由 $y=2\sqrt[3]{x}$ 解得 $x=\frac{y^3}{8}$，于是反函数为 $y=\frac{x^3}{8}$，定义域为$(-\infty,+\infty)$.

8.【解】 设 x 为产品的销售量，y 为销售总收入，由题意可知，当销售量 $0\leqslant x<5000$ 时，销售的收入 $y=150x$；当销售量 $5000\leqslant x\leqslant 10000$ 时，销售的收入

$$y=150\times 5000+150\times 0.9\times(x-5000)=135x+75000.$$

于是销售总收入函数为

$$y=\begin{cases}150x, & 0\leqslant x<5000,\\ 135x+75000, & 5000\leqslant x\leqslant 10000.\end{cases}$$

9.【解】 当年产量 $0\leqslant x<3000$ 时，销售收益 $R=(2300-1000)x=1300x$；当年产量 $3000\leqslant x\leqslant 5000$ 时，销售收益为

$$R=(2300-1000)(0.7x+1000)-50x=860x+1300000.$$

于是本年的销售收益为

$$R(x)=\begin{cases}1300x, & 0\leqslant x<3000,\\ 860x+1300000, & 3000\leqslant x\leqslant 5000.\end{cases}$$

自测题 B 答案

1.【解】 (1) 应选(C)

函数自变量满足$\begin{cases}3-x\geqslant 0,\\ x+1>0,\end{cases}$解得 $x\leqslant 3$ 且 $x>-1$，所以 $y=\sqrt{3-x}+\lg(x+1)$ 的定义域为$(-1,3]$.

(2) 应选(D)

由复合函数的定义可得

$$f(\varphi(x))=\begin{cases}\ln x-1, & \ln x<0,\\ \ln x+1, & \ln x\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}\ln x-1, & 0<x<1,\\ \ln x+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

所以 $f(\varphi(\mathrm{e}))=\ln\mathrm{e}+1=2$.

(3) 应选(D)

可以检验(A)，(B)，(C) 不是奇函数，对于选项(D)，有

$$f(-x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}}{2}=-\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}=-f(x),$$

所以 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 为奇函数.