中学教师参考读物

解析几何题解与研究

IEXIJIHETIJIE

YUYANJIU

吉林人民出版社

中学教师参考读物

解析几何题解与研究

朱维纶 编

吉林人民出版社

解析几何题解与研究

朱维纶 编

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 15½印张 348,000字

1981年2月第1版 1981年2月第1次印刷

印数：1—8,270册

书号：7091·1187 定价：1.04元

前　　言

本书在《数学习题集》——几何部分（1978年吉林人民出版社出版）的基础上编写的。

本书供中学数学教师讲授平面解析几何时参考用，也可供中学数学课外活动选材用。

错误和不当之处，请读者指正。

编　者

1979 年 8 月于吉林师大附中

目　　录

第一章　直角坐标、曲线方程

一、基础知识

1．数轴上两点 $P(x_1)$和 $Q(x_2)$，有

$$\boxed{PQ = x_2 - x_1}$$

2．同一条直线上任意三点A、B、C，有

$$\boxed{AB + BC = AC}$$

3．两点间的距离：

两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$有

$$\boxed{P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

4．直线的倾斜角$\alpha(o \leqslant \alpha < \pi)$，斜率为$K$．有

$\boxed{K = \mathrm{tg}\alpha}$ （$\alpha = \frac{\pi}{2}$时，K不存在，这时直线垂直 x 轴）

5．两条直线平行、垂直的充要条件：

两条直线l_1、l_2的斜率分别是K_1、K_2(K_1、K_2都存在)

$$\boxed{\begin{array}{l}(1)\ l_1 \parallel l_2 \Longleftrightarrow K_1 = K_2;\\ (2)\ l_1 \perp l_2 \Longleftrightarrow K_1 \cdot K_2 = -1.\end{array}}$$

6. 线段的定比分点：

两点P_1、P_2，直线P_1P_2上一点P，规定 $\boxed{\lambda = \dfrac{P_1P}{PP_2}}$，叫做$P$点把有向线段$P_1P_2$分成为$\lambda$的比.

（1）设两点$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，点$P(x, y)$把线段P_1P_2分成的比为λ，有：

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.}$$

（2）当P是线段P_1P_2的中点时，$\lambda = 1$，这时有：

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.}$$

7. 三角形的面积：

$\triangle ABC$，$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$，面积为S，有：

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{的绝对值.}}$$

8. 三点共线的条件：

三点$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$，直线AB、BC的斜率分别是K_{AB}、K_{BC}，则有：

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow A、B、C\text{ 三点共线；}$$

或$K_{AB} = K_{BC} \Longleftrightarrow A、B、C$ 三点共线.

9. 曲线和方程：

曲线 l 和方程 $f(x, y)=0$，如果有：

（1）l 上所有的点的坐标，都满足 $f(x, y)=0$；

（2）坐标满足 $f(x, y)=0$ 的所有的点，都在 l 上时，那么把 $f(x, y)=0$ 叫做l的方程；把 l 叫做 $f(x, y)=0$ 的曲线.

解析几何的基本思想：

（1）点用它的坐标表示——即点$\Longleftrightarrow$坐标；

（2）曲线用它的方程表示——即曲线上任意一点的坐标是它的方程的解；方程的任意一组解做为坐标所决定的点在它的曲线上.

10. 由曲线（点的轨迹）求它的方程的一般步骤：

（1）设曲线（点的轨迹）上任意一点$P(x, y)$；

（2）由曲线上的点所要适合的条件列出等式；

（3）用x、y表示这个等式，化简后得出方程；

（4）用“曲线的方程”的定义证明所得方程是这曲线的方程.

（注：化简过程都是同解变形时，所得方程即为曲线的方程，故不必证明.）

11. 由方程画它的曲线的一般步骤：

（1）把方程 $f(x, y)=0$ 化成用 x 表示 y 的函数解析式的形式；

（2）在函数定义域内，给 x 一系列值，并求出一系列对应的 y 的值；

（3）用每组对应值做为坐标在坐标系内描点；

（4）把这些点按顺序用光滑曲线连结起来，所得的曲线即为这个方程的曲线.

12. 由方程讨论它的曲线：

（1）曲线在坐标轴上的截距：

如果曲线和坐标轴有公共点，那么把在 x 轴上的公共点的横坐标叫做这曲线在 x 轴上的截距；把在 y 轴上的公共点的纵坐标叫做这曲线在 y 轴上的截距.

① 在方程 $f(x, y)=0$ 中，令 $y=0$，求出 x 的实数值，是这方程的曲线在 x 轴上的截距；

② 在方程 $f(x, y)=0$ 中，令 $x=0$，求出 y 的实数值，是这方程的曲线在 y 轴上的截距.

〔注：如果不存在 x（或 y）的实数值，说明这方程的曲线在 x 轴（或 y 轴）上没有截距.〕

（2）曲线关于坐标轴、原点的对称：

① 方程 $f(x, y)=0$ 中，以 $-y$ 代 y 而方程不变，则这个方程的曲线关于 x 轴对称；

② 方程 $f(x, y)=0$ 中，以 $-x$ 代 x 而方程不变，则这个方程的曲线关于 y 轴对称；

③ 方程 $f(x, y)=0$ 中，以 $-x$ 代 x，同时以 $-y$ 代 y 而方程不变，则这个方程的曲线关于原

点对称.

（注：显然曲线关于 x 轴、y 轴都对称，则必定关于原点对称；但反之曲线关于原点对称，则不一定关于 x 轴、y 轴对称.）

（3）曲线的范围：

方程 $f(x, y)=0$，化为用 x 表示 y 的函数解析式，再用 y 表示 x 的函数解析式，找出两个函数的定义域，由此可看出这个方程的曲线的范围.

13. 两条曲线的公共点：

两条曲线 l_1 和 l_2，它们的方程分别是 $f_1(x, y)=0$ 和 $f_2(x, y)=0$，则：

方程组 $\begin{cases} f_1(x, y)=0 \\ f_2(x, y)=0 \end{cases}$ 的实数解是 l_1 和 l_2 的公共点的坐标.

（注：如果这方程组没有实数解，说明这两条曲线没有公共点.）

二、问题解法举例

本章求解的问题计有：求点的坐标、曲线的方程、线段长、线段比、直线形面积、直线的倾斜角和斜率；证明三点共线、二直线垂直或平行，以及用点的坐标证明几何问题等等.

例题 1 求一点 $P(a, b)$ 关于两坐标轴夹角平分线的对称点的坐标.

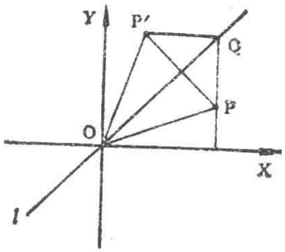

图 1·1

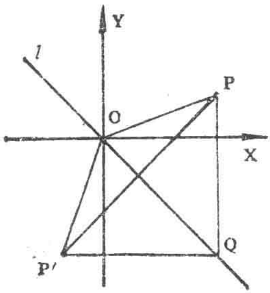

图 1·2

〔解题方向〕利用二坐标轴夹角平分线上的点的横、纵坐标间的特殊关系以及利用两点对称的特性求解.

〔解〕设 P点关于X轴、Y 轴夹角平分线 l 的对称点 $P'(x, y)$，原点为O.

在l上适当取一点 $Q(a, \pm a)$，则有 $|OP| = |OP'|$ 和 $|PQ| = |P'Q|$

$$\therefore \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + b^2, \\ (x-a)^2 + (y \mp a)^2 = (a-a)^2 + (a \mp b)^2. \end{cases}$$

解这个方程组得 $\begin{cases} x = b, \\ y = a; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -b, \\ y = -a. \end{cases}$

答：当 l 通过Ⅰ、Ⅲ象限时，$P'(b, a)$；

当 l 通过Ⅱ、Ⅳ象限时，$P'(-b, -a)$.

〔解题研究〕(1)题目的两个条件：第一，“P、P'关于l对称”，则有 l 上平分线段PP'；第二，“l 为二坐标轴夹角的平分线”，则有 l 的倾斜角为 45°或 135°，斜率为± 1，l上的点$M(x_0, \pm x_0)$.

(2)因设$P'(x, y)$，故依据条件应列出关于 x、y 的两个独立等

式，通过解方程组求解．在平面解析几何中，经常需要解二元方程组，宜熟练．

（3）在 l 上任取两点 C、D，用两个等式 $|PC|=|P'C|$、$|PD|=|P'D|$ 可解．既然在 l 上可任选两点，则可选两个特殊点，而以 O、Q 为最好，从而使解的过程简化，这种思想应当掌握．

（4）注意这种题目宜考虑全面，以避免丢解．

（5）本题别解如下：设 PP' 与 l 交于 $M(x_0, x_0)$，由 M 是 PP' 的中点以及直线 PP' 的斜率为 -1，

$$\therefore \begin{cases} x_0=\dfrac{a+x}{2}=\dfrac{b+y}{2}, \\ \dfrac{y-b}{x-a}=-1. \end{cases}$$

解得 $P'(b, a)$；

又设 $M(x_0, -x_0)$，直线 PP' 的斜率为 1，

$$\therefore \begin{cases} x_0=\dfrac{a+x}{2}=-\dfrac{b+y}{2}, \\ \dfrac{y-b}{x-a}=1. \end{cases}$$

解得 $P'(-b, -a)$．

例题 2　一点 C 到两坐标轴的距离相等，并且和 $A(10, 2)$、$B(7, 1)$ 两点在同一直线上，求 C 点的坐标．

〔解题方向〕利用"C 点到 x 轴、y 轴等距离的关系"以及"A、B、C 三点共线的条件"求解．

〔解〕∵ C 点到 x 轴、y 轴等距离，∴设 $C(x_0, \pm x_0)$，

又设直线 AB、AC 的斜率分别是 K_{AB}、K_{AC}，则

$$\frac{2\mp x}{10-x}=K_{AC}=K_{AB}=\frac{2-1}{10-7}=\frac{1}{3}.$$

解得$x=-2$或$x=1$.

答：$C(-2,-2)$或$C(1,-1)$.

〔解题研究〕(1)“点到两坐标轴的距离相等”，则这点的横、纵坐标相等或互为相反数。

(2)“三点共线”时，当判断这直线与x轴不垂直时，方可用上述解法。

(3)这类题目解答时注意不要丢解。

例题 3 求证：四点 $(6,11)$、$(-4,-9)$、$(11,-4)$和$(-9,6)$在同一个圆上.

〔解题方向〕设四点为A、B、C、D，证明过A、B、C三点的圆的圆心到A、D两点的距离相等。

〔证明〕(1)设$A(6,11)$、$B(-4,-9)$、$C(11,-4)$、$D(-9,6)$.$\triangle ABC$的外心$M(x_0,y_0)$，则

$$(x_0-6)^2+(y_0-11)^2=(x_0+4)^2+(y_0+9)^2$$
$$=(x_0-11)^2+(y_0+4)^2.$$

$$\therefore\begin{cases}x_0-3y_0+2=0,\\3x_0+y_0-4=0.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x_0=1,\\y_0=1.\end{cases}\text{即}M(1,1).$$

(2)$\because |MA|=\sqrt{(1-6)^2+(1-11)^2}=5\sqrt{5}$;

$|MD|=\sqrt{(1+9)^2+(1-6)^2}=5\sqrt{5}$.

$\therefore |MD|=|MA|$.

$\therefore$四点$A(6,11)$、$B(-4,-9)$、$C(11,-4)$、$D(-9,6)$共圆.

〔解题研究〕(1)本题的证法适用于证明四个以上的点共圆. 方法是先找出过三点的圆的圆心和半径长，再证明圆心到其余各点的距离都等于半径长。

(2)为此多次使用“两点间距离”的公式。

例题 4　P是线段AB的内分点．$A(2,3)$，$B(8,4)$，并且$\frac{AP}{PB}=\frac{PB}{AB}$，求$P$点的坐标．

〔解题方向〕设$\frac{AP}{PB}=\lambda$，利用求"线段分点坐标"公式先求出λ，然后求P点坐标。

〔解〕设$P(x, y)$，$\frac{AP}{PB}=\lambda$．$(\lambda>0)$，

$$\because \quad \frac{PB}{AB}=\frac{AP}{PB}=\lambda, \quad \therefore \quad \frac{PB}{BA}=-\lambda.$$

$$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{2+8\lambda}{1+\lambda} \cdots\cdots ① \quad 以及 8=\dfrac{x+2(-\lambda)}{1+(-\lambda)} \cdots ③ \\ y=\dfrac{3+4\lambda}{1+\lambda} \cdots\cdots ② \end{cases}$$

由①、③消去x得：$\lambda^2+\lambda-1=0$，

$$\therefore \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \ (舍负值).$$

把λ的值代入①、②得：

$$x=\frac{2+8\cdot\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}{1+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}=11-3\sqrt{5};$$

$$y=\frac{3+4\cdot\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}{1+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{9-\sqrt{5}}{2}.$$

答：$P\left(11-3\sqrt{5}, \ \frac{9-\sqrt{5}}{2}\right)$.

〔解题研究〕（1）涉及线段的定比分点问题，则常设出比值。

（2）本题另外解法略解如下：

设 $|PB|=x$，而 $|AB|=\sqrt{(8-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{37}$。

$\therefore |AP|=\sqrt{37}-x$。 $\because \dfrac{AP}{PB}=\dfrac{PB}{AB}>0$，

$\therefore \dfrac{\sqrt{37}-x}{x}=\dfrac{x}{\sqrt{37}}$。 $\therefore x^2+\sqrt{37}\,x-37=0$。

$\therefore x=\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\sqrt{37}$。 $\therefore \dfrac{PB}{AB}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$。

设 $P(x_0, y_0)$。同上得 $x_0=11-3\sqrt{5}$；$y_0=\dfrac{9-\sqrt{5}}{2}$。

例题 5 正六边形一条边的二端点的坐标是 $(2,0)$、$(5,3\sqrt{3})$，求这正六边形中心的坐标.

〔解题方向〕由正六边形性质可知它的中心是和一边 AB 为边所连成的正三角形的第三顶点．由此利用“两点间距离”的公式求解．

〔解〕设正六边形中心 $P(x_0, y_0)$，一边 AB，$A(2,0)$，$B(5,3\sqrt{3})$。

由 $|PA|=|PB|=|AB|$。

得：
$$(x_0-2)^2+y_0^2=(x_0-5)^2+(y-3\sqrt{3})^2$$
$$=(2-5)^2+(0-3\sqrt{3})^2=36.$$

$$\therefore \begin{cases} x_0+\sqrt{3}\,y_0=8, \\ (x_0-2)^2+y_0{}^2=36. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x_0=8, \\ y_0=0; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0=-1, \\ y_0=3\sqrt{3}. \end{cases}$

答：正六边形中心的坐标是 $(8,0)$ 或 $(-1,3\sqrt{3})$。

〔解题研究〕（1）用解析法解题时，也应首先考虑到几何图形的性质，在此基础上求解，

（2）本题实质是：“求以已知 AB 为一边的正三角形第三顶点的坐

标."

（3）本题如稍加发展为:"正八边形一边AB，$A(2,0)$，$B(0,2)$，求这正八边形中心的坐标"时，应怎样求解？

略解：设中心$P(x_0, y_0)$，则$|PA|^2=|PB|^2=\dfrac{\left[\dfrac{1}{2}|AB|\right]^2}{\sin^2 22.5^\circ}$，

$$\therefore\quad (x_0-2)^2+y_0^2=x_0^2+(y-2)^2=\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2}{\sin^2 22.5^\circ}$$

$$=\frac{2}{\sin^2 22.5^\circ}=4(2+\sqrt{2}).$$

$$\therefore\ \begin{cases} x_0=y_0, \\ (x_0-2)^2+y_0^2=4(2+2\sqrt{2}). \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} x_0=2+\sqrt{2}, \\ y_0=2+\sqrt{2}; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0=-\sqrt{2}, \\ y_0=-\sqrt{2}. \end{cases}$

例题 6 两点$P(-1,3)$、$Q(3,0)$，从原点O引$OM\perp PQ$，垂足是M点，求M点的坐标以及OM的长.

〔解题方向〕由垂直关系，利用斜率及P、M、Q三点共线的条件求解.

〔解〕设$M(x_0, y_0)$，直线PQ、OM的斜率分别为K_{PQ}、K_{OM}，则由$PQ\perp OM$以及P、M、Q三点共线，有：

$$-1=K_{PQ}\cdot K_{OM}=\frac{3-0}{-1-3}\cdot\frac{y_0}{x_0};$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0.$$