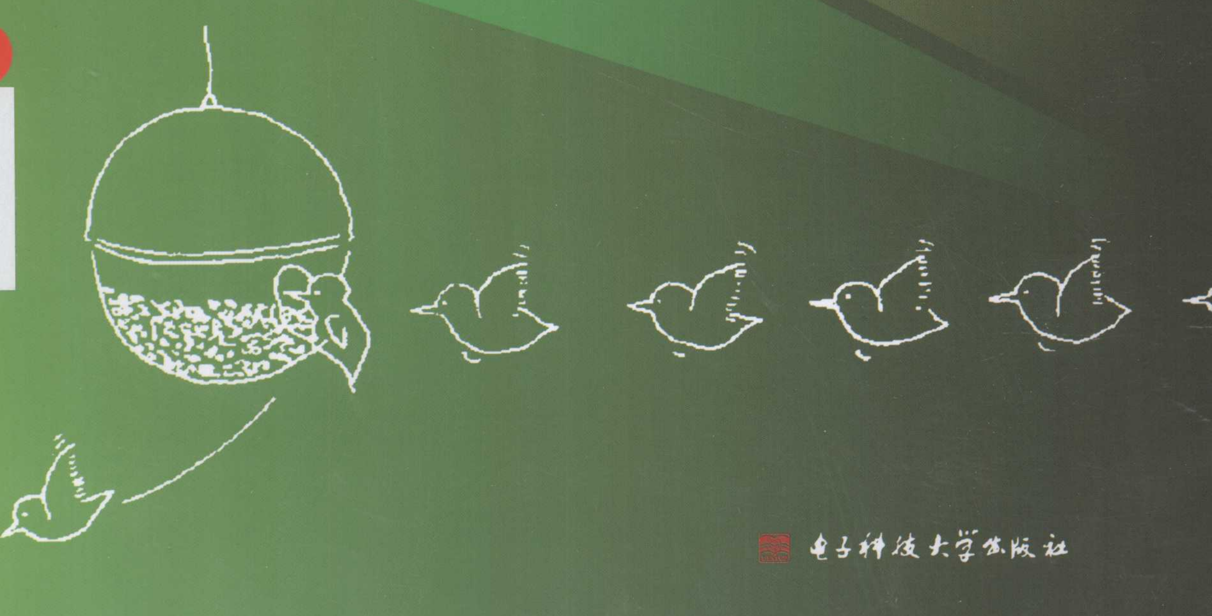
WUXIAN TONGXIN
ZIYUAN FENPEI YANJIU ZHONG DE
JICHU PAIDUILUN JI YINGYONG

无线通信资源分配研究中的
基础排队论及应用

蒋体钢◎著



电子科技大学出版社

WUXIAN TONGXIN
ZIYUAN FENPEI YANJIU ZHONG DE
JICHU PAIDUILUN JI YINGYONG

无线通信资源分配研究中的
基础排队论及应用

蒋体钢◎著

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

无线通信资源分配研究中的基础排队论及应用 / 蒋体钢著. —成都：电子科技大学出版社, 2013.11

ISBN 978-7-5647-1129-0

Ⅰ. ①无… Ⅱ. ①蒋… Ⅲ. ①排队论—应用—无线电通信—资源分配 Ⅳ. ①TN92

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 066817 号

内 容 提 要

本书以无线通信信道的资源分配为研究背景，从排队论的角度进行了分析和阐述。全书共分 7 章，系统介绍了排队论系统的基础理论以及在无线资源分配中的科研应用，重点阐述了几种典型排队系统的稳态性质，以及基本的分析方法和技术。第一章为书的绪论，第二章回顾了概率论基本知识，第三章介绍了一维 Markov 生灭排队模型，第四章介绍了多维 Markov 生灭排队模型，第五章介绍了嵌入式 Markov 链排队模型，第六章介绍了排队论分析的数值计算方法与程序设计，第七章介绍了排队论分析的仿真方法与程序设计，并对后六章给出了多个在无线通信领域科研中实际的科研例子。全书既有理论，又有科研应用实例，还有数值分析方法和仿真技巧及程序。

本书对应用数学、管理学、计算机科学、通信工程等领域从事相关研究的科研工作者和工程技术人员有较大的参考价值，同时也可作为计算机科学、通信工程和相关专业的高年级本科生或研究生及教师的教学参考书。

无线通信资源分配研究中的基础排队论及应用

蒋体钢　著

出　　版：电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）
策划编辑：周清芳
责任编辑：周清芳　袁　野
主　　页：www.uestcp.com.cn
电子邮箱：uestcp@uestcp.com.cn
发　　行：新华书店经销
印　　刷：成都蜀通印务有限责任公司
成品尺寸：185mm×260mm　印张 12　字数 300 千字
版　　次：2013 年 11 月第一版
印　　次：2013 年 11 月第一次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5647-1129-0
定　　价：28.80 元

前　言

无线通信系统的信道资源分配技术是充分利用有限珍贵频谱的重要技术。移动通信业务的迅猛发展，使得频谱资源和用户需求之间的矛盾越来越突出，从无线通信诞生至今，从20世纪90年代的蜂窝小区频谱复用技术，多层蜂窝系统资源分配，到目前的认知无线电、LTE，甚至智能电网、信道资源分配的研究一直是科研人员重点关注的核心问题之一。

无线通信系统的信道资源分配技术研究常常要用到排队论的专业知识，而很多高校并没有专门开设此课程，有的仅将它作为概率论与随机过程的一部分。且教学往往由数学系教师承担，在科研中的实际应用没有较好体现，对此我编写了这部主要针对计算机、通信等专业硕士研究生和博士研究生的专著。

本书既涵盖了无线通信系统信道资源分配技术研究所需的概率论的基础理论，还对一维Markov排队模型、多维Markov链排队模型、嵌入式Markov排队模型、排队模型数值分析与排队系统仿真进行了详细的论述，基本上从理论到实践包括了计算机与通信领域科研中常用的排队模型。

本书是笔者在多年的教学和科研工作基础上编写的，全面介绍了排队论的基础理论，及其在无线通信系统信道资源分配中的应用。对这个领域的研究笔者在国内外学术刊物和学术会议上已发表了40余篇论文，并将一部分相关的研究成果整理在本书中。

感谢电子科技大学通信抗干扰国家重点实验室和通信学院的同事们，在与他们的讨论中，我受益匪浅！

感谢电子科技大学出版社的编辑周清芳、袁野，他们为本书的出版做了大量工作！

感谢硕士研究生胡丽琴同学整理了本书第二章至第五章的部分公式。

感谢电子科技大学通信学院为我的研究工作提供了便利！

感谢国家自然科学基金（NSFC NO.61831003，NO. 61271170）、中央高校基本科研业务费（NO.ZYGX2011J008）的资助，使得本书的写作和出版成为可能！

感谢所有参考文献的作者们，他们辛勤的工作和成果给了本书工作极大的帮助和启迪！

谨将本书献给我的父母及家人，是他（她）们的理解、支持、关爱和勉励，才使我能顺利地完成本书。

排队论的内容是十分广泛的，与之有关的学科也很多，无线通信系统的信道资源分配技术除了排队论外，还有博弈论等其他技术，由于作者学识有限以及本书的篇幅有限，加之时间仓促，书中错误与片面之处在所难免，敬请读者不吝批评指正。

2013 年 11 月于成都

目　录

第一章　绪　论

一般而言，等待总是时间的浪费与工作效率的降低，没有人喜欢等待，那么应该如何设计得到最佳服务的等待方式？如何分析等待过程？何时被服务？等待时间特性如何？都需要建立数学模型进行分析。本书研究的就是排队系统的数学模型与分析方法。

本书将建立基本的排队系统模型，主要集中在排队模型的分析，以及排队模型在通信系统中的应用。实际上，相关的分析方法可以推广到其他应用领域，如商品生产系统、码头与车站调度、信息处理系统、系统控制等方面。

以下给出几个排队论应用的例子：

- **超级市场**

顾客在收银台的等待时间为多长？高峰时刻的等待时间为多长？收银台是否足够？

- **生产系统**

一台机器可以生产不同类型的产品。

各个产品的生产时间比例如何设置？当有更多机器的时候，如何调整各个商品生产时间比例？是否应该采用优先生产机制？

- **邮局服务**

一个邮局，可以分为多种柜台，包括平信、挂号、快件、包裹、汇款等。

柜台是否足够？每个柜台应该分别排队还是统一排队？

- **数据传输**

在计算机通信网络中，数据包从一台交换机到另一台交换机，当数据包的传输量超过链路容量时，交换机的存储器将溢出，此时所有到达数据包都将被丢弃。

数据包在交换机处的延迟是多少？丢失的比例为多大？存储器空间应该被设置为多大？

- **泊车**

一个超级市场将建立一个泊车场地。

其大小应该如何设计？

- **保险公司呼叫中心**

关于保险业务的电话业务咨询由呼叫中心服务，中心分成基于服务区域的分组结构，某个分组仅服务其所服务区域的电话咨询。

一个咨询电话到达时，它要等待多久才能获得服务？中心的电话是否足够？接线员是否足够？

- 路灯信号

在车辆和行人都能各自忍受等待时间的条件下如何设计路灯？信号变化频率与时间如何确定？

以上所有问题的回答往往都基于政治、经济、技术等方面的内容，但是，它们都有一个共同的特点，就是每个服务需求发生的时间以及要求服务的时间长度都是随机的，不能事先确定。

本书运用数学理论对这些现实生活中的应用加以分析，虽然这些系统是非常复杂的，但是往往可以通过数学模型将问题简化而得到有用的信息。

此数学理论是应用概率论的分支，有时候也称为业务理论、排队论、拥塞论、随机服务系统等等。业务理论往往应用在电话通信业务中，有时候也应用在交通流量分析中，这两种情况往往有些相似，即都是从数学方面进行分析。但是，一些模型是排队队列不能分析的，这就需要用拥塞理论和随机服务系统理论去分析。本书笼统称为排队论。

要解决这些实际问题往往需要很高深的数学方法，本书所述内容仅仅需要中等应用数学知识就可以了，而且给出了很多实际科研中的应用例子，力求从理论和实际研究方面加深对排队论的理解和掌握。

第二章　概率论与随机过程基础

本章主要讲授概率论与随机过程的基础知识，需要读者已经具有随机事件、概率、条件概率、概率分布函数、概率密度函数、事件独立特性等基本知识，这些基础知识的回顾对后文的Markov链、生灭过程、生成函数等的理解很有帮助，且可以作为后面几章的参考。

2.1　随机变量与生成函数

对一个可以在相同条件下无限重复的一个随机事件，如其出现某种结果的频率趋于一个稳定的值，将每次实验的结果与某个数字对应，那么就可以将随机实验的结果数量化，这样就引入了随机变量的概念。每次随机实验完成后，只需要关心实验结果数值本身就可以研究实际的随机事件特性。比如抛硬币，只有两种可能，正面朝上或者反面朝上，如令$X=1$表示正面朝上，$X=0$表示反面朝上，那么，这个变量X就和事件的结果一一对应起来，X就是一个随机变量。

令X为一个非负离散随机变量且有$P\{X=n\}=p(n)$, $n=0,1,2,\cdots$，那么，X的产生函数定义为

$$P_X(z)=E(z^X)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)z^n$$

注意到对所有的$|z|\leqslant 1$有$|P_X(z)|\leqslant 1$，还可以得到

$$P_X(0)=p(0)\text{，}\quad P_X(1)=1\text{，}\quad P_X'(1)=E(X)$$

更一般的，可以得到

$$P_X^{(k)}(1)=E(X(X-1)\cdots(X-K+1))$$

此处的上标（k）是k阶微分，对两个独立随机变量X和Y的和构成的新随机变量$Z=X+Y$，其生成函数为

$$P_Z(z)=P_X(z)P_y(z)$$

如果Z以概率q等于X，以概率$1-q$等于Y，那么有

$$P_Z(z)=qP_X(z)+(1-q)P_y(z)$$

2.2 生灭过程

设在某一个固定时刻t，系统的状态可以表示为$N(t)$，且其值为0,1,2,⋯，比如，（1）对一个电话交换机系统，$N(t)$可以表示为在$(0,t)$时间段内到达的呼叫电话数量；（2）对一个排队队列，$N(t)$可以表示为在时刻t时队列中的等待用户数量；（3）或表示在$(0,t)$时间内出生的人数数量；（4）或表示在时刻t时某个城市的人口数量。

要研究这样的一个随机变量$N(t)$，显然对某一个固定的t，$N(t)$是一个随机变量，则需要研究这一组随机变量$\{N(t), t \geqslant 0\}$的特性，这样的一组随机变量的集合就是一个随机过程，有兴趣的读者可以参考随机过程的专著[5][6][7][8][85]。

在时刻t时，如$N(t)=j$，那么就称系统处于状态E_j。

我们称满足以下特性的过程为生灭过程：

如果在任意时刻t，系统处于状态E_j，那么在$(t,t+h)$时间段内从状态E_j到状态E_{j+1}，即$E_j \to E_{j+1} (j=0,1,\cdots)$转变的条件概率等于$\lambda_j h + o(h)\ (h \to 0)$，且从状态$E_j$到$E_{j-1}$，即$E_j \to E_{j-1}\ (j=0,1,\cdots)$转化的条件概率等于$u_j h + o(h)\ (h \to 0)$，在此时间段内只有可能发生一个事件，发生两个及两个以上事件的概率是一个高阶无穷小，即$o(h)\ (h \to 0)$。例如：在此时间段内，E_j变为E_{j+1}，然后又变为E_{j+2}，这样在此时间段内发生两次状态转变$E_j \to E_{j+2}$的概率是一个高阶无穷小。

由全概理论，可以得到

$$P\{N(t+h)=j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{N(t+h)=j \mid N(t)=i\} P\{N(t)=i\} \tag{2.2.1}$$

当$h \to 0$,可以得到如下公式

$$P\{N(t+h)=j \mid N(t)=i\} = \begin{cases} \lambda_{j-1}h + o(h) & (i=j-1) \\ \mu_{j+1}h + o(h) & (i=j+1) \\ o(h) & (|i-j| \geqslant 2) \end{cases}$$

因为有

$$\sum_{i=0}^{\infty} P\{N(t+h)=k \mid N(t)=j\} = 1$$

当$h \to 0$，有

$$P\{N(t+h)=j \mid N(t)=j\} = 1 - (\lambda_j + \mu_j)h + o(h)$$

因此，如果令$P\{N(t)=j\} = P_j(t)$，等式（2.2.1）可以写为

$$P_j(t+h) = \lambda_{j-1}hP_{j-1}(t) + \mu_{j+1}hP_{j+1}(t) + [1-(\lambda_j+\mu_j)hP_j(t) + o(h)]$$
$$(h \to 0; j=0,1,\cdots; \lambda_{-1} = \mu_0 = P_{-1}(t) = 0)$$

将它们重新组合，并除以h，可以得到

$$\frac{P_j(t+h)-P_j(t)}{h}=\lambda_{j-1}P_{j-1}(t)+\mu_{j+1}P_{j+1}(t)-(\lambda_j+\mu_j)+\frac{o(h)}{h} \tag{2.2.2}$$

$$(h\to 0; j=0,1,\cdots;\lambda_{-1}=\mu_0=P_{-1}(t)=0)$$

现在令$h\to 0$，可以得到以下微分方程，这些微分方程就是生灭过程的基本方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_j(t)=\lambda_{j-1}P_{j-1}(t)+\mu_{j+1}P_{j+1}(t)-(\lambda_j+\mu_j)P_j(t) \tag{2.2.3}$$

$$(j=0,1,\cdots;\lambda_{-1}=\mu_0=P_{-1}(t)=0)$$

如在时刻$t=0$时，系统在状态E_j，式（2.2.3）的初始化条件是

$$P_j(0)=\begin{cases}1 & (j=i)\\ 0 & (j\neq i)\end{cases} \tag{2.2.4}$$

那么这里的系数λ_j和u_j分别称为生率和死率，对所有的j如果有$\lambda_j=0$，这样的过程称为“纯生过程”，对所有的j如果有$u_j=0$，这样的过程称为“纯死过程”。

对“纯生过程”或“纯死过程”，很容易发现式（2.2.3）总是有解，这可以通过迭代的方法求得。

例如，对一个纯生过程，其生率为常数$\lambda_j=\lambda$。假如系统在最初处于状态E_j，那么式（2.2.3）和式（2.2.4）变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_j(t)=\lambda P_{j-1}(t)-\lambda P_j(t)\qquad (j=0,1,\cdots;P_{-1}(t)=0) \tag{2.2.5}$$

且

$$P_j(0)=\begin{cases}1 & (j=0)\\ 0 & (j\neq 0)\end{cases} \tag{2.2.6}$$

对每个$t\geqslant 0$，根据迭代，可以得到

$$P_j(t)=\frac{(\lambda t)^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\qquad (j=0,1\cdots) \tag{2.2.7}$$

实际上式（2.2.7）满足均匀分布

$$\sum_{j=0}^{\infty}P_j(t)=1\qquad (t\geqslant 0) \tag{2.2.8}$$

根据式（2.2.7），$N(t)$具有均值为λt的Poisson分布特性，也就是$\{N(t),t\geqslant 0\}$是一个Poisson过程。因为实际排队系统中常常假设$\lambda_j=\lambda$，所以，此类过程非常重要。

还有一个重要的例子就是纯死过程的特例，此时的死率u_j正比于状态的标号，也就是$u_j=ju$，如果假定系统在$t=0$时刻状态为E_n，那么，式（2.2.3）和式（2.2.4）

变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_n(t)=-n\mu P_n(t) \qquad (P_n(0)=1) \tag{2.2.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_j(t)=(j+1)\mu P_{j+1}(t)-j\mu P_j(t) \\ (P_j(0)=0; j=n-1,n-2\cdots 2,1,0) \tag{2.2.10}$$

根据迭代方法求解上述公式，很容易得到其一般的概率方程

$$P_j(t)=\binom{n}{j}(\mathrm{e}^{-\mu t})^j(1-\mathrm{e}^{-\mu t})^{n-j} \qquad (j=0,1,\cdots n) \tag{2.2.11}$$

实际上式（2.2.11）满足概率论中的二项分布特性，其和为1.

注意：在纯生过程（$u_j=0$）或纯死过程（$\lambda_j=0$），式（2.2.3）总可以通过迭代的方法得到，即使方程的数量是无限的。

对式（2.2.3）和式（2.2.4），因为概率总和为1，都有式（2.2.12）的限制

$$\sum_{j=0}^{\infty}P_j(t)=1 \qquad (0\leqslant P_j(t)\leqslant 1; 0\leqslant t<\infty) \tag{2.2.12}$$

如果一个服务系统仅具有一个服务器，且仅仅有两种状态，E_0 或 E_1，分别表示服务器空闲或服务器忙的状态，那么，能使系统状态发生改变只可能有两种情形：

（1）服务器忙时一个正在服务的用户离开（$\lambda_0=\lambda$ 且对任意的 $j\neq 0$ 有 $\lambda_j=0$），

（2）服务器空闲时一个呼叫请求到达（$u_1=u_0$ 且对对所有的 $j\neq 1$，有 $\mu_j=0$）。

那么，当式（2.2.3）中的系数这样确定后，等式变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_0(t)=\mu P_1(t)-\lambda P_0(t) \tag{2.2.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_1(t)=\lambda P_0(t)-\mu P_1(t) \tag{2.2.14}$$

如果将式（2.2.13）和式（2.2.14）相加，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[P_0(t)+P_1(t)]=0$$

因此，对所有 $t>0$ 情况下的概率有

$$P_0(t)+P_1(t)=c \tag{2.2.15}$$

因为系统最初描述为一个概率分布，因此

$$P_0(0)+P_1(0)=1 \tag{2.2.16}$$

要满足式（2.2.15）和式（2.2.16），则需要c=1，因此

$$P_0(t)+P_1(t)=1 \qquad (t\geqslant 0) \tag{2.2.17}$$

将式（2.2.17）代入式（2.2.13），可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_0(t)+(\lambda+\mu)P_0(t)=\mu$$

进一步可得

$$P_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+(P_0(0)-\frac{\mu}{\lambda+\mu})\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} \tag{2.2.18}$$

则由式（2.2.17）和式（2.2.14）可以得到

$$P_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+(P_1(0)-\frac{\lambda}{\lambda+\mu})\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} \tag{2.2.19}$$

2.3　概 率 均 衡

如果t很大，也就是系统经历很长一段时间后，系统的状态概率是时间的函数，也就是令式（2.2.18）和式（2.2.19）中的$t\to\infty$，这样可以得到

$$P_0=\lim_{t\to\infty}P_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu} \tag{2.3.1}$$

$$P_1=\lim_{t\to\infty}P_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \tag{2.3.2}$$

因为

$$P_0+P_1=1 \tag{2.3.3}$$

且概率的极限值独立于初始$P_0(0)$和$P_1(0)$的值，也就是说，经过很长一段后，系统的概率与初始值相互独立，且各状态概率的和为1，系统就处于所谓的“统计平衡”状态。

处于此“统计平衡”状态的系统，一个重要的特征就是稳定。也就是说，状态概率不再随时间改变。

注意：统计平衡的概率特性不仅与系统本身的属性相关，而且与观察者对于系统的认知度有关。在我们的例子中，比如，观察者在时刻t观察系统，系统处于状态E_0；在时刻t观察系统，系统处于状态E_1。可见，状态不仅与系统本身的变化有关，而且与观察者何时观察系统有关。

回到公式（2.2.13）和式（2.2.14），如果令$t\to\infty$，可以得到

$$0=\mu P_1-\lambda P_0 \tag{2.3.4}$$

$$0=\lambda P_0-\mu P_1 \tag{2.3.5}$$

实际上式（2.3.4）与式（2.3.5）是相同的，进一步可得

$$P_1=\frac{\lambda}{\mu}P_0 \tag{2.3.6}$$

因为导致式（2.2.17）的初始条件式（2.2.16）不再出现，必须有

$$P_0+P_1=1 \tag{2.3.7}$$

这样就从式（2.3.6）和式（2.3.7）得到$P_0=\mu/(\lambda+\mu)$和$P_1=\lambda/(\lambda+\mu)$，也服

从式（2.3.1）和式（2.3.2），因此，可以通过解线性方程组式（2.3.4）和式（2.3.5）以代替解难度更大的线性差分方程组式（2.2.13）和式（2.2.14）。

推论：

对一个生灭过程，其状态分别为：$E_0,E_1,E_2,\cdots$，生率为 $\lambda_j \geqslant 0(j=0,1,\cdots)$，死率为 $\mu_j \geqslant 0(j=0,1,\cdots)$，令

$$S=1+\frac{\lambda_0}{\mu_1}+\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}+\cdots+\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}+\cdots \tag{2.3.8}$$

那么，以下极限概率存在

$$P_j=\lim_{t\to\infty}P_j(t) \qquad (j=0,1,\cdots) \tag{2.3.9}$$

且与初始状态无关，如果 $s<\infty$，那么

$$P_j=\begin{cases} S^{-1} & (j=0) \\ \dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}P_0 & (j=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{2.3.10}$$

因为式（2.3.10）中所有概率之和为1，所以各个概率可解。

根据概率稳定原理，将式（2.2.3）求极限，令 $t\to\infty$，有

$$(\lambda_j+\mu_j)P_j=\lambda_{j-1}P_{j-1}+\mu_{j+1}P_{j+1} \qquad (j=0,1,\cdots;\lambda_{-1}=\mu_0=0) \tag{2.3.11}$$

如果 $j=0$，那么，式（2.3.11）为

$$\lambda_0P_0=\mu_1P_1 \tag{2.3.12}$$

如果 $j=1$，那么，式（2.3.11）为

$$(\lambda_1+\mu_1)P_1=\lambda_0P_0+\mu_2P_2 \tag{2.3.13}$$

联合式（2.3.12）和式（2.3.13），可得式（2.3.14）

$$\lambda_1P_1=\mu_2P_2 \tag{2.3.14}$$

相似的，在 $j=2$ 时，由式（2.3.14）和式（2.3.11）得到 $\lambda_2P_2=\mu_3P_3$，由此循环，可得

$$\lambda_jP_j=\mu_{j+1}P_{j+1} \qquad (j=0,1,\cdots) \tag{2.3.15}$$

如果 $u_{j+1}>0$，由式（2.3.15）可得

$$P_{j+1}=\frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}P_j \qquad (j=0,1,\cdots) \tag{2.3.16}$$

或

$$P_j=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}P_0 \qquad (j=1,2,\cdots) \tag{2.3.17}$$

且因为

$$\sum_{j=0}^{\infty}P_j(t)=1 \tag{2.3.18}$$

故各个概率可解。

2.4　一些重要的概率分布

2.4.1　贝努里分布

如一个随机变量X服从贝努里分布，那么X只可能取0或1，且有概率$P\{x=1\}=p$，$P\{x=0\}=1-p=q$。可用抛硬币事件来描述，每次抛硬币结果如果正面向上$X=1$，否则$X=0$，贝努里随机变量均值为p，方差为pq。

2.4.2　二项分布

二项分布描述了n次贝努里独立试验中取相同值次数S_n的概率分布，比如，令S_n为统计n次贝努里试验后$X=1$的次数，那么，有$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$。因为每次贝努里试验的结果$\{X_j\}$是相互独立同分布的，每次的概率生成函数为$q+pz$，故，S_n的概率生成函数为$(q+pz)^n$。由此展开，S_n具有如下分布

$$P\{S_n=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad (k=0,1,\cdots n) \tag{2.4.1}$$

实际上也可以用普通的方法求得S_n的分布，因为每次试验是独立的，那么，k次$X=1$和$n-k$次$X=0$的概率为$p^k(1-p)^{n-k}$，那么就有

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

种排列组合。因为有$\binom{n}{k}$种不同的k次成功与$n-k$次失败的组合，故得到式（2.4.1）。

S_n均值为np，方差为npq，此变量是n个独立同分布的贝努里变量之和。

2.4.3　多项分布

刚刚讨论的n次独立随机事件，每次事件的结果只有两种可能，如果每次试验结果的可能是$r\geqslant 2$种，也就是说，第j次实验时，实验结果为第r种可能的概率分