经济管理类数学基础

# 微积分
## 学习辅导

王义东 于伟红 主编

清华大学出版社

经济管理类数学基础

# 微积分
## 学习辅导

王义东 于伟红 主编



清华大学出版社
北 京

## 内 容 简 介

本书是于伟红、王义东主编的经济管理类数学基础系列教材《微积分》的配套辅导书.

为帮助读者系统地学习和掌握微积分的主要内容和基本方法，本书针对教材每章内容，均编配5部分内容，即基本要求、内容提要、例题选讲、习题解答及自测题.在教材例题的基础上，有针对性地精选了大量的典型例题和习题，帮助读者系统地掌握基本概念、基本解题方法与思路.

本书不仅是教材的配套辅导书，也便于高等学校本科在校学生或函授学员独立选作参考辅导书，同时也可作为相关任课教师的辅助工具书.



**图书在版编目(CIP)数据**

微积分学习辅导/王义东，于伟红主编. --北京：清华大学出版社，2013

(经济管理类数学基础)

ISBN 978-7-302-34131-4

Ⅰ.①微… Ⅱ.①王… ②于… Ⅲ.①微积分－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第243503号

**责任编辑**：陈 明
**封面设计**：常雪影
**责任校对**：刘玉霞
**责任印制**：沈 露

**出版发行**：清华大学出版社
**网 址**：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
**地 址**：北京清华大学学研大厦A座 **邮 编**：100084
**社 总 机**：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
**投稿与读者服务**：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
**质 量 反 馈**：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
**印 刷 者**：北京富博印刷有限公司
**装 订 者**：北京市密云县京文制本装订厂
**经 销**：全国新华书店
**开 本**：185mm×230mm **印 张**：23 **字 数**：503千字
**版 次**：2013年10月第1版 **印 次**：2013年10月第1次印刷
**印 数**：1～3000
**定 价**：37.00元

产品编号：052114-01

# 丛书序

随着我国经济与管理学科的迅速发展,数学作为经济与管理学科的重要基础课受到越来越广泛的关注和重视. 数学课的教学目的在于培养学生的抽象思维能力、逻辑思维能力、科学的定量分析能力等基本数学素质,特别是培养学生在研究经济理论和经济管理的实践中综合运用数学思想方法去分析问题和解决问题的能力. 数学课的教学质量,直接影响后续专业课的教学和相关专业学生的培养质量.

经济管理类数学基础系列课程主要有微积分、线性代数、概率论与数理统计三门课程. 长期以来,中央财经大学应用数学学院一直非常重视这些基础课程的建设与改革. 学院曾于1998年组织骨干教师编写出版了这三门课程的教材. 该教材被评为中央财经大学重点系列教材,自出版发行以来,深受广大教师及学生的好评,还在一定程度上满足了兄弟院校教学的需要.

近年来,随着我校教育教学改革的不断深入,我们进一步对数学课的教学内容、教学手段等方面进行了一系列改革,力求使之更加适应新形势下财经应用型创新人才培养的要求. 依据新的培养目标和培养方案,参考2009年教育部最新颁布的研究生入学数学考试大纲,我们重新修订了这三门课的教学大纲,组织教学小组积极探索提高公共数学课教学质量的途径、方法和有效手段. 经过几年的努力,我们在课程建设方面取得了一定的成绩. 目前,三门经济管理类数学课程均已成为校级精品课,其中微积分于2008年被评为北京市精品课程.

2010年5月,教育部为贯彻落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》,扎实有序地推进教育改革,决定在全国范围分区域、有步骤地开展改革试点工作. 中央财经大学的"财经应用型创新人才培养模式改革"成为首批国家教育体制改革试点项目. 基于此,我们在课程建设中进一步突出了学生创新意识和创新能力的培养,成立教学改革课题组,开展"数学课程与教材一体化建设的研究".

在上述工作的基础上,我们编写了这套"经济管理类数学基础"系列教材,包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》,以及配套的习题课教材和电子教案. 教材内容涵盖了教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会最新制定的"经济管理类本科数学基础教学基本要求",并且满足经济类、管理类各专业对数学越来越高的要求. 在我们原有教材的基础上,该系列教材凝聚了作者近年来在大学数学教学改革方面的一些新成果,借鉴了近几年国内外一批优秀教材的有益经验. 教材在内容上注重基本概念、基本理论和基本技

能的讲解，突出理论联系实际，努力体现实用性.根据经济管理类专业学生的实际情况，尽量以直观的、通俗的方法重点阐述数学方法的思想、应用背景及其在金融、保险、统计等领域应用中应该注意的问题.选择与当今社会经济生活和现代科技密切相关的实例，避免那种远离实际而只讲数学的抽象定义、定理、证明的模式，尽量突出数学建模的思想和方法.通过加强对经济学、管理学具体问题的数学表述和数学理论问题的经济学含义解释，使得数学的能力培养功能与应用功能有机结合，培养学生在经济学中的数学思维方式和数学应用能力，实现经济、管理类数学基础教育的“培养素质、提高能力特别是专业素质”的目标.我们希望系列教材与精品课程互为依托，进一步促进课程与专业建设水平全面提高.

在本系列教材的编写和出版过程中，得到中央财经大学教务处、应用数学学院以及清华大学出版社的大力支持，在此一并致谢.

尽管作者都有良好的愿望和多年的教学经验，但由于受经验和水平的限制，加之时间仓促，书中难免存在作者未发现的错漏，恳请使用本书的读者不吝指正，以便进一步完善.

编　者

2012 年 5 月

# 前言

本书是与“经济管理类数学基础”系列教材中的《微积分》配套使用的辅导教材，依据经济管理类各专业对微积分课程的教学辅导要求编写，主要为使用该教材的教师和学生提供帮助，也可供报考相关专业研究生的学生作复习之用.

全书按章编写，基本与主教材同步，内容设计较为全面. 每章均包括基本要求、内容提要、例题选讲、习题解答、自测题五个功能模块.

**基本要求**主要根据教育部数学基础课程教学指导委员会制定的经济管理类微积分课程的教学基本要求确定，依照惯例，按“理解”、“了解”或“掌握”、“会”的次序表示程度上的差异.

**内容提要**针对每章的主要知识脉络进行梳理，提纲挈领地帮助学生精炼知识结构，强化重点内容，以点带面地掌握主教材的内容框架.

**例题选讲**基于内容提要分层次展开，在类型的选取、难度的把握和数量的安排上都进行了充分研究，力求具有一定的典型性和示范性，并对教材内容有适当的扩展和延伸.

**习题解答**对教材中绝大部分习题给出了较为详细的分析解答，便于学生一边解题一边对照，充分领会各类题型的常见解题思路和技巧.

**自测题**安排在每章最后，利于学生复习并及时了解本章知识的学习掌握情况，同时也可以进一步开拓思路，达到更为深刻和透彻理解教材内容这一目的.

本书有以下特色：

1. 在某些题目前给出分析思路，或题目后加以评注，总结解题规律，有助于学生举一反三.

2. 力求将典型方法、解题技巧、常见错误分析、数学应用等多方面的教学要求，融于该部分之中，以帮助学生提高数学素养，培养其分析问题、解决问题的能力.

3. 习题解答部分可单独作为基础练习使用，例题选讲部分可供提升综合能力使用.

本书共分 10 章，第 1、2、10 章由刘丽敏编写，第 3、4 章由于伟红编写，第 5、6、9 章由姜玲玉编写，第 7、8 章由王义东编写. 全书由王义东统稿.

由于编者水平有限，书中内容难免有不妥之处，恳请广大读者批评指正，以期不断完善.

编　者

2013 年 4 月

# 目录

# 第1章

# 函　　数

## 基本要求

1. 理解函数的概念，会建立简单应用问题的函数.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 掌握复合函数及分段函数的概念，理解反函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及图像，了解初等函数的概念.

5. 理解函数的参数方程、极坐标方程，掌握直角坐标与极坐标的转化.

6. 了解复数的运算，复数的三种表示形式(代数形式、指数形式、三角形式)，并会相互转化.

## 内容提要

### 一、函数

1. **函数的定义**　设数集 $D$ 是一非空数集，若按照某一对应法则 $f$，对于 $D$ 内每个数 $x$ 都有唯一确定的数 $y$ 与之对应，则称 $f$ **是定义在 $D$ 上的一元函数**，简称为**函数**，记做 $y=f(x)$，$x\in D$，其中 $D$ 称为函数 $f$ 的**定义域**，记做 $D_f$，$R=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $f$ 的**值域**，记做 $R_f$.

2. **反函数**　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D_f$，值域为 $R_f$，若对任意的 $y\in R_f$，有唯一确定的 $x\in D_f$ 满足 $f(x)=y$，则 $x$ 是定义在 $R_f$ 上以 $y$ 为自变量的函数，记做 $x=f^{-1}(y)$，并称 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的**反函数**.

3. **复合函数**　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D_f$，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 $D_\varphi$，若集合 $D=\{x\mid\varphi(x)\in D_f,x\in D_\varphi\}\neq\varnothing$，则由 $y=f[\varphi(x)]$，$x\in D$ 确定的函数称为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**. 通常称 $y=f(u)$ 为**外层函数**，$u=\varphi(x)$ 是**内层函数**，$u$ 为**中间变量**.

4. **基本初等函数**　常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

5. **初等函数** 基本初等函数经过有限次四则运算和复合所生成的函数.

6. **参数方程** 若变量 $y$ 与 $x$ 之间的函数关系通过方程 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$ 确定,则称其为参数方程,变量 $t$ 称为**参数**.

7. 在平面内取一个定点,叫做**极点**;自极点 $O$ 引一条射线 $Ox$,叫做**极轴**;再选定一个长度单位、一个角度单位(通常用弧度)及其正方向(通常取逆时针方向).这样就建立了一个**极坐标系**.如图 1-1:设 $M$ 是平面内一点,极点 $O$ 与点 $M$ 的距离 $|OM|$ 叫做点 $M$ 的**极径**,记为 $r(r\geqslant 0)$;以极轴 $Ox$ 为始边,射线 $OM$ 为终边的 $\angle xOM$ 叫做点 $M$ 的**极角**,记为 $\theta$;有序实数对 $(r,\theta)$ 叫做点 $M$ 的**极坐标**,记为 $M(r,\theta)$.

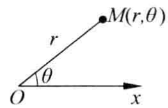

图 1-1

8. 直角坐标与极坐标互化公式 $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ 与 $\begin{cases} r^2=x^2+y^2, \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}. \end{cases}$

## 二、复数

1. **复数的概念** 引入一个新数 i 叫做虚数单位,并规定:

(1) $\mathrm{i}^2=-1$;

(2) 实数可以与它进行四则运算,原有的运算法则仍然成立.

称形如 $z=x+\mathrm{i}y(x,y\in\mathbf{R})$ 的数叫**复数**,实数 $x$ 和 $y$ 分别称为复数 $z$ 的**实部**和**虚部**,记为 $x=\mathrm{Re}z, y=\mathrm{Im}z$. 全体复数的集合称为**复数集**,记为 $\mathbf{C}$. 虚部为零的复数是实数,即实数集是复数集的真子集. 虚部不为零的复数称为**虚数**,实部为零且虚部不为零的复数称为**纯虚数**. 称复数 $x+\mathrm{i}y$ 和 $x-\mathrm{i}y$ 互为**共轭复数**,复数 $z$ 的共轭复数记为 $\bar{z}$,即

$$x-\mathrm{i}y=\overline{x+\mathrm{i}y} \quad \text{或} \quad x+\mathrm{i}y=\overline{x-\mathrm{i}y}.$$

2. **复数的运算** 设复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,那么

(1) $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$;

(2) 两个复数相乘,按多项式乘法法则进行,其中 $\mathrm{i}^2=-1$,即

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1);$$

(3) 若 $z_2\neq 0$,对于 $\dfrac{z_1}{z_2}$,分子分母同乘以分母的共轭复数,再进行化简,即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \quad z_2\neq 0.$$

全体复数引入上述运算后就称为**复数域**. 与实数域不同,复数域中不能规定复数的大小.

3. **复数的表示形式** 利用直角坐标与极坐标的关系及欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,复数有以下三种表示形式:

**代数形式** $z=x+\mathrm{i}y$;

**三角形式**　$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$；

**指数形式**　$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

## 例题选讲

**例1**　求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\ln\cos x}$；　(2) $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$.

**解**　(1) 只有 $\sqrt{4-x^2}$ 与 $\ln\cos x$ 同时有意义，且分母不为 0 时的 $x$ 才是定义域内的点，即

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ \cos x>0,\\ \cos x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ 2n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2n\pi+\dfrac{\pi}{2},\quad n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.\\ x\neq 2n\pi,\end{cases}$$

上述不等式的解为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，即函数的定义域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(2) 只有当 $\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$，$\sqrt{2x-x^2}$，$\ln(2x-1)$ 同时有意义，且分母不为 0 时的 $x$ 才是定义域内的点，即

$$\begin{cases}\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1,\\ 2x-x^2\geqslant 0,\\ 2x-1>0,\\ 2x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6\leqslant 2x\leqslant 8,\\ x(x-2)\leqslant 0,\\ x>\dfrac{1}{2},\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4,\\ 0\leqslant x\leqslant 2,\\ x>\dfrac{1}{2},\\ x\neq 1.\end{cases}$$

上述不等式的解为 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2]$，即函数的定义域为 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2]$.

**例2**　判别下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$；(2) $f(x)=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$，其中 $a>0,a\neq 1,F(x)$ 为偶函数.

**解**　(1) 当我们遇到 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ 或 $a\pm\sqrt{b}$ 时，考虑分子或分母有理化，有

$$f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(2) 令 $g(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$，那么

$$g(-x)=\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2}.$$

显然 $g(x)+g(-x)=0$,即 $g(x)$为奇函数.由于 $F(x)$为偶函数,所以 $f(x)$是奇函数.

**例 3** 试把下列函数分解成基本初等函数的四则运算与复合.

(1) $y=\dfrac{e^{x^2}-\ln(x^4+1)}{\sin^3 x}$; (2) $y=\arcsin\left(a^{x^3}\sqrt{x^2+5}\right)$;

**解** (1) $y=\dfrac{e^u-\ln v}{w^3}$,$u=x^2$,$v=x^4+1$,$w=\sin x$.

(2) $y=\arcsin u$;其中 $u=v\cdot w$;$v=a^{v_1}$,$v_1=x^3$;$w=\sqrt{w_1}$,$w_1=x^2+5$.

**例 4** 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2.\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

**解** 由函数 $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2\end{cases}$ 的图像易得

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x\in[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}],\\ 0, & x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-1,1)\cup(\sqrt{3},+\infty).\end{cases}$$

**例 5** 设 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}(x\neq 0,a^2\neq b^2)$,求 $f(x)$.

**解** 令 $x=\dfrac{1}{t}$,则 $af\left(\dfrac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$. 令 $t=x$,得 $af\left(\dfrac{1}{x}\right)+bf(x)=cx$. 与原式联立解得 $f(x)=\dfrac{c}{b^2-a^2}\left(bx-\dfrac{a}{x}\right)$.

**例 6** 若 $z=e^{it}$,试证:$z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos nt$;$z^n-\dfrac{1}{z^n}=2i\sin nt$,其中 $n$ 为正整数.

**解** $z^n+\dfrac{1}{z^n}=e^{int}+e^{-int}=\cos nt+i\sin nt+\cos(-nt)+i\sin(-nt)=2\cos nt$;

$z^n-\dfrac{1}{z^n}=e^{int}-e^{-int}=\cos nt+i\sin nt-\cos(-nt)-i\sin(-nt)=2i\sin nt$.

# 习题解答

## 复习题一

1. 求下列函数的自然定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x+2}$; (2) $y=\sqrt{x^2-9}$;

(3) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+1}$; (4) $y=\dfrac{1}{[x+1]}$.

**解** (1) 由 $x+2\neq0$ 得 $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$;

(2) 由 $x^2-9\geqslant0$ 得 $(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$;

(3) 由 $x^2\neq1,x+1\geqslant0$ 得 $(-1,1)\cup(1,+\infty)$;

(4) 由 $[x+1]\neq0$ 得 $(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$.

2. 下列各对函数中哪些相同,哪些不同?

(1) $f(x)=\frac{x}{x},g(x)=1$; (2) $f(x)=x,g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=1,g(x)=\cos^2x+\sin^2x$; (4) $f(x)=1,g(x)=\sec^2x-\tan^2x$.

**解** (1) 不同(定义域不同);(2) 不同(值域不同);(3) 相同;(4) 不同(定义域不同).

3. 下列函数中哪些是偶函数?哪些是奇函数?哪些是非奇非偶函数?

(1) $y=x+x^2-x^3$; (2) $y=a+b\cos x$;

(3) $y=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$; (4) $y=x\sin\frac{1}{x}$.

**解** (1) 非奇非偶;(2) 偶;(3) 奇(分子有理化);(4) 偶.

4. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt{\ln(x^2+1)}$; (2) $y=2^{\sin^2\frac{1}{x}}$;

(3) $y=\sin[\lg(x^2+1)]$; (4) $y=\arcsin^2\frac{2x}{1+x^2}$.

**解** (1) $y=\sqrt{u},u=\ln v,v=x^2+1$; (2) $y=2^u,u=v^2,v=\sin\omega,\omega=\frac{1}{x}$;

(3) $y=\sin u,u=\lg v,v=x^2+1$; (4) $y=u^2,u=\arcsin v,v=\frac{2x}{1+x^2}$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇函数,且 $f(1)=a$,对任何 $x$ 值都有

$$f(x+2)-f(x)=f(2).$$

(1) 用 $a$ 表示 $f(2)$ 和 $f(5)$;

(2) 问 $a$ 取何值时,$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

**解** (1) 将 $x=-1$ 代入 $f(x+2)-f(x)=f(2)$ 得 $f(1)-f(-1)=f(2)$;由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇函数,所以 $-f(-1)=f(1)=a$,即 $f(2)=2a$.

将 $x=3$ 代入 $f(x+2)-f(x)=f(2)$ 得 $f(5)-f(3)=f(2)$,将 $x=1$ 代入 $f(x+2)-f(x)=f(2)$ 得 $f(3)-f(1)=f(2)$,所以 $f(5)=2f(2)+f(1)=5a$.

(2) 若 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数,则 $f(x+2)-f(x)=0=f(2)=2a$,所以 $a=0$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & |x|\leqslant2,\\ 0, & |x|>2,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

**解** 由函数 $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & |x|\leqslant2,\\ 0, & |x|>2\end{cases}$ 的图像易得

$$f[f(x)]=\begin{cases}4-(4-x^2)^2, & -2\leqslant x\leqslant-\sqrt{2},\\ 0, & -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2},\\ 4-(4-x^2)^2, & \sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2,\\ 4, & |x|>2.\end{cases}$$

7．求下列函数的反函数及反函数的定义域.

（1）$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$；

（2）$y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}(x\geqslant0)$；

（3）$y=\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant0)$；

（4）$y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant4,\\ 2^x, & 4<x<+\infty.\end{cases}$

**解** （1）由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$得 $2^x(y-1)=-y$,所以 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$,即反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$ $(0<x<1)$；

（2）由 $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}(x\geqslant0)$得$\dfrac{x-1}{x+1}=\arcsin\dfrac{y-1}{2}$,所以 $x=\dfrac{1+\arcsin\dfrac{y-1}{2}}{1-\arcsin\dfrac{y-1}{2}}$,即反函数为 $y=\dfrac{1+\arcsin\dfrac{x-1}{2}}{1-\arcsin\dfrac{x-1}{2}}$,$1-2\sin1\leqslant x<1+2\sin1$；

（3）由 $y=\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant0)$得 $x^2=1-y$,因为 $x<0$,所以 $x=-\sqrt{1-y}$,即反函数为 $y=-\sqrt{1-x^2}(0\leqslant x\leqslant1)$；

（4）由 $y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant4,\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$ 得 $x=\begin{cases}y, & -\infty<y<1,\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant16,\\ \log_2 y, & 16<y<+\infty.\end{cases}$ 所以反函数为

$$y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant16,\\ \log_2 x, & 16<x<+\infty.\end{cases}$$

8．设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$,求 $f[f(x)]$,$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

**解** $f[f(x)]=\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2}=\dfrac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)}$，　$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]=\dfrac{1}{1-(1-x^2)^2}=\dfrac{1}{x^2(2-x^2)}$.

9．设 $z=\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$,求 $|z|$ 及 $\mathrm{Arg}z$.

**解**　$|z|=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$，$\mathrm{Arg}z=-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

10. 设 $z_1=\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$，$z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$，试用指数形式表示 $z_1\cdot z_2$ 及 $\frac{z_1}{z_2}$.

**解**　$z_1=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$，$z_2=2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$，所以 $z_1\cdot z_2=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{12}\mathrm{i}}$，$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{12}\mathrm{i}}$.

## 自测题

1. 求下列函数的自然定义域.

(1) $f(x)=\arcsin\frac{3x}{x+1}$；　(2) $f(x)=\log_{(x-1)}(16-x^2)$；

(3) $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{1-x^2}$；　(4) $f(x)=\arccos(1-x)+\ln\frac{1+x}{1-x}$.

2. 下列各对函数中哪些相同，哪些不同？

(1) $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$；　(2) $f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x-5}}$ 与 $g(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-5}}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{x-1}$；　(4) $f(x)=\mathrm{e}^{\ln x}$ 与 $g(x)=x$.

3. 下列函数中哪些是偶函数？哪些是奇函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $f(x)=\arctan(\sin x)$；　(2) $f(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\sin x$；

(3) $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^x+1}$；　(4) $f(x)=x^3+|\sin x|$.

4. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sin^5\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}$；　(2) $y=3^{\ln(x^2+5)}$；

(3) $y=\arctan[\lg(x^2+1)]$；　(4) $y=\sqrt{\tan\frac{x+1}{2}}$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x>0,\\ x+1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-x^2, & x>0,\\ x, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$.

6. 求 $y=\frac{1-\sqrt{4x+1}}{1+\sqrt{4x+1}}$ 的反函数及反函数的定义域.

7. 设 $f(\sin^2x)=\cos 2x+\tan^2x$，$0<x<1$，求 $f(x)$.

8. 将复数 $\frac{(\cos 5\theta+\mathrm{i}\sin 5\theta)^2}{(\cos 2\theta-\mathrm{i}\sin 2\theta)^3}$ 化为指数形式和三角形式.

9. 设 $x_n+\mathrm{i}y_n=(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^n$（$x_n, y_n$ 为实数，$n$ 为正整数）. 试证 $x_ny_{n-1}-x_{n-1}y_n=4^{n-1}\sqrt{3}$.

# 第 2 章

# 极限与连续

## 基本要求

1. 理解函数极限与数列极限的定义.

2. 理解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限四则运算法则,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

3. 理解无穷小的概念和基本性质,掌握无穷小的比较方法,了解无穷大的概念,掌握无穷大与无穷小的关系.

4. 理解一元函数连续点及区间上连续的定义,会判别函数间断点的类型.

5. 了解连续函数的性质及初等函数的连续性,掌握利用初等函数的连续性求极限的方法.

6. 能正确叙述和简单应用闭区间上连续函数的性质.

7. 总结学过的求极限的方法并能灵活应用这些方法求极限.

## 内容提要

### 一、极限的定义

$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$;$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$;$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$;$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$;$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$;$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$;$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$. 将数列$\{x_n\}$看作整标函数$x_n=f(n)$,即定义域为正整数集的函数,以上七种形式的极限有如下的统一定义:

$\forall\varepsilon>0$,∃时刻,在此时刻之后,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$. 见下表:

| 过程 | $n\to\infty$ | $x\to\infty$ | $x\to+\infty$ | $x\to-\infty$ | $x\to x_0$ | $x\to x_0^+$ | $x\to x_0^-$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ∃时刻 | $X>0$ | | | | $\delta>0$ | | |
| 此时刻之后 | $n>X$ | $\|x\|>X$ | $x>X$ | $x<-X$ | $0<\|x-x_0\|<\delta$ | $0<x-x_0<\delta$ | $-\delta<x-x_0<0$ |
| $f(x)$ | $\|f(x)-A\|<\varepsilon$ | | | | | | |