高級中學用

立體幾何學

黃泰編譯

上海民智書局發行

中華民國二十二年八月初版

高級中學適用 **立體幾何學**（一冊）

（每冊定價大[illegible]）（外埠[illegible]）

編譯者 泰

校訂者 榮

印刷者 民智印刷所 上海塘山路九百二十六號

發行者 民智書局 上海河南路二〇〇至二〇二號

分發行處 民智書局 南京 廣州 北平 武昌 長沙

[illegible]售處 海內外各大書坊

[illegible]民智書局 [illegible]路中市 〇〇[illegible]二〇二號

立體幾何

序

編者頻年授立體幾何,覺中西教本,切於我國最近學制,適合學者程度需要,簡易明白,教學皆便,當推 Schultze－Sevenoak－Schuyler 之立體幾何再訂本,良以該書教材編配,係據美國全國數學教材會議決案,其編製程序,亟合學習心理,初無過分抽象難解之處,其較難定理數則,列入附錄,以爲教者視實際需要如何,留伸縮餘地,書中例題,搜集該國最近各大學入學試題甚夥,配布適當,亦無偏倚勞逸不均之弊,我國新訂標準,亦不出此,以故此書風行遠近,良有以也。

顧以文字異殊,終非我有,工具間接,效率稍差,泰不敏,以此書爲藍本,迻譯而成今本,其優異諸點,悉爲保存,其於實際教學畧感不便者數處,則

畧加編易，以守擇善而從之義，倘希海內賢達，有以教之。

二十二年三月編者序於揚中

立體幾何

目錄

立體幾何

第一篇

空間之線及平面——多面角

1. 定義. 幾何學是研究物體之形狀，大小，位置眞理的一種學科。立體幾何或空間幾何，所討論的圖形，其原素不在同一平面內。

2. 定義. 一面內任意兩點，所決定的直線，能完全在此面內，這個面始能稱爲平面。

設一平面，僅有一平面，通過已知諸點或諸線則稱此面爲此諸點或諸線所決定。

設理一. 不在一直線上的三點，只能決定一平面。

設理二. 若兩平面有一公共點，必有第二公共點。

3. 定義. 設一直線，與一平面任何引長而不相遇，則稱此線與此面爲平行。

4. 定義. 設二平面任何引長，而不相遇，則稱此二平面相平行。

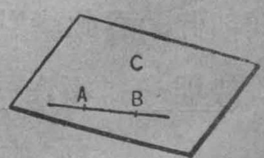
附註. 於立體幾何中，証明二直線皆平行，第一，須証明二直線任何引長而不相交，第二，尙須証此二直線，在同一平面內。

命題一　定理

5. (a) 一直線及線外一點，可決定一平面。

(b) 相交二直線，可決定一平面。

(c) 平行二直線，可決定一平面。



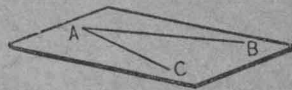
(a) 設直線 AB 及線外一點 C。

在 AB 上，任取兩點A, B,則 A, B, C 三點，可

決定一平面（設理一）

而AB直線，必全在此面內。（定義2）

（b）設AB, AC相交兩直線，在AC上，任取一點C，



則AB及C可決定一平面。（見a証）而AC應在此面內。（何故？）

（c）設AB, CD二平行直線則AB,及CD上任一點C,可決定一平面。（何故？）而CD應在此面內。

（平行線定義）

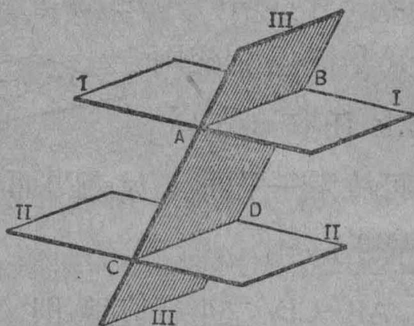
6. 推論　兩平面之交線，爲一直線。

因交線不能含不在一直線上之三點，因三點只能決定一平面故也。

例1. 空間任意四點，可決定幾平面？

命題二　定理

7. 一平面與二平行平面相截，其交線相平行。



設平面Ⅲ順次截二平行平面Ⅰ，Ⅱ於 AB, CD.

求証 AB ∥ CD。

證. AB, CD 同在平面 Ⅲ 內。

因 Ⅰ 與 Ⅱ 平行，故任何引長不能相遇，因而 AB 與 CD 任何引長不能相遇。

∴ AB ∥ CD.

8. 推論. 平行平面間之平行線必相等。

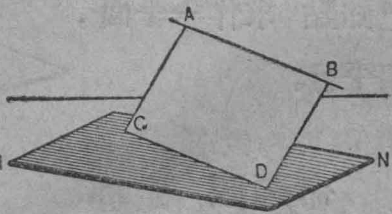
例 1. 一平面交二平行平面之一，必交於其二。

例 2. 一直線交二平行平面之一，必交於其二。

例3. 見命題二圖,若 AC ∥ BD, 試証 AB = CD

命題三　定理

9. 設兩直線相平行,則過此線之任一平面,必與彼線相平行。



設 AB ∥ CD 過 CD, 任作一平面 MN.

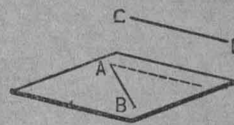
求証　MN ∥ AB。

証.　AB, CD 二平行線可決定一平面，交 MN 於 CD。

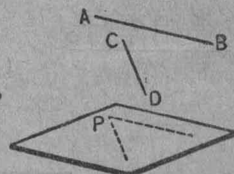
若 AB 引長,能與 MN 相交,則必交 MN 於 CD 上,此爲不可能。　　　　(何故？)

∴ MN ∥ AB。

10. 推論一. 過空間任意兩直線之一，可作一平面，僅可作一平面，與彼線相平行。



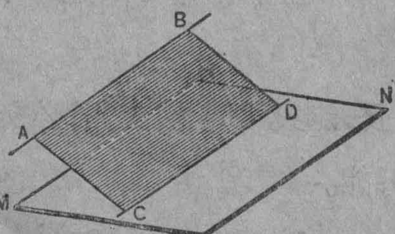
11. 推論二. 過定點可作一平面，僅可作一平面，與空間任意二直線皆平行。



例. 過二已知點求作一平面，與一已知線相平行。

命題四　定理

12. 一直線平行於一平面，則過此線之任一平面，與此平面之交線，亦必與此線平行。



設 AB ∥ MN. 過 AB 任作一平面 AC, 交 MN 於 CD。

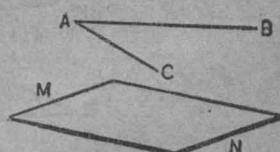
求証　　　　AB ∥ CD。

証, AB, CD 在同一平面內。

若 AB 與 CD 相遇, 則必與 MN 相遇, 此爲不可能。

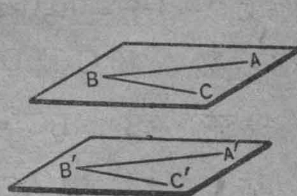
故　　　　AB ∥ CD.

13. 推論一. 設相交二直與各平行於一平面, 則此兩交線所定之平面, 亦與此面平行。



若 AB, AC 二交線所定之平面, 與 MN 相交, 則交線必同時平行於 AB 及 CD, 此爲不可能。

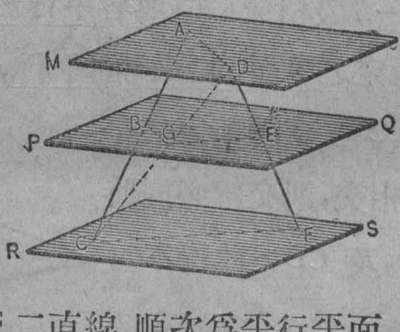
14. 推論二. 設空間兩角之邊, 兩兩平行, 則其所在之平面必平行。



因 AB 及 BC 順次平行於 A'B' 及 B'C' 故平面 ABC 平行於平面 A'B' 及 B'C'（何故）故平面 A'B'C' 平行平面 ABC（何故）

命題五　定理

15. 設有二直線為數平行平面所截，其對應諸線分成比例。



設 AB, DF 二直線，順次為平行平面，MN, PQ, RS 截於 A, B, C 及 D, E, F。

求証　AB : BC = DE : EF.

証．聯 DC. 過 AC, DC 作平面，交 MN 及 PQ 於

AD, BG。

則　　　　　AD ∥ BG。　　　　(何故？)

同理,過DC, DF作平面,交PQ及RS於GE ,CF。

則　　　　　GE ∥ CF。

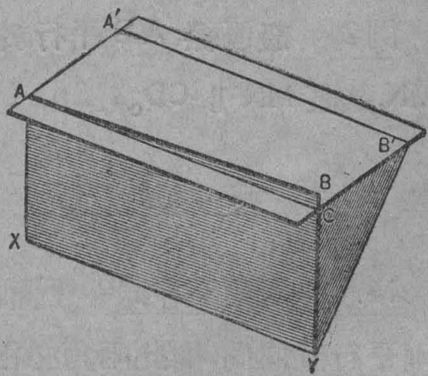
$$\because \quad \frac{AB}{BC}=\frac{DG}{GC} \quad 又 \quad \frac{DE}{EF}=\frac{DG}{GC},$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}。$$

16. 推論. 自任一點,作諸直線,爲二平行平面所截,其對應諸線分成比例。

命題六　定理

17. 設有二直線,各平行於第三直線,則此二直線相平行,



設直線 $AB \parallel XY$, $A'B' \parallel XY$。

求証　$AB \parallel A'B'$

証. 過 AB 及 XY, 可作一平面, 又過 A'B' 及 A 可作一平面，令此兩平面相交於 AC。

則　$AC \parallel XY$;　(何故?)

故　AB 與 AC 重合。　(何故?)

又 AB 及 A'B' 在同一平面內。

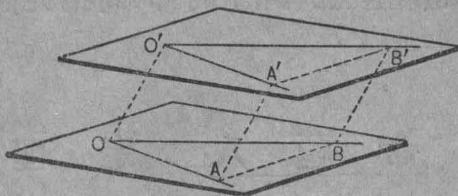
$\therefore AB \parallel A'B'$

例 1, 設一直線爲數平行平面截取之線分互相等,則於任意直線上截取之各線分亦相等。

例 2, 設直線 AB 平行於 CD, 且平行於平面 MN,試証 $MN \parallel CD$。

命題七　定理

18. 設兩角不在同一平面內,頂點同側之邊,兩兩平行且同向,則此兩角必相等。



設∠AOB 與∠A'O'B' 之邊兩兩平行且同向,

求証 $\angle AOB = \angle A'O'B'$

証. 取 $OA = O'A'$; $OB = O'B'$ 聯 OO', AA', BB'

則 OO'B'B 及 OO'A'A 均爲平行四邊形。(何故?)

故 AA' 與 BB' 與 OO' 平行且相等。

故 AA'B'B 亦爲平行四邊形。

$\therefore \quad AB = A'B'$。

$\therefore \quad \triangle AOB = \triangle A'O'B' \quad$ S.S.S.

$\therefore \quad \angle AOB = \angle A'O'B'$

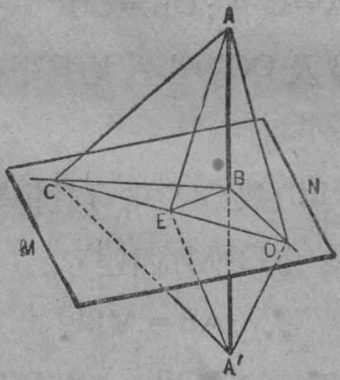
19. 定義. 一直線與一平面之交點,稱爲線足。

20. 定義. 一直線垂直於平面內過線足之任一直

線，則稱此線垂直於此平面。同時稱此面垂直於此直線。

命題八 定理

21. 一直線垂直兩交線於交點，則此直線必垂直於兩交線所定之平面。



設直線 AB ⊥ BC 及 BD。

求証 AB 垂直於 BC 及 BD 所定之平面 MN。

証. 在 MN 內，過 B 點 任作一直線 BE。