■ 大学公共课系列教材

线性代数教程

XIANXING DAISHU JIAOCHENG

李　静◎主　编

DAXUE GONGGONGKE XILIE JIAOCAI

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

■ 大学公共课系列教材

线性代数教程

XIANXING DAISHU JIAOCHENG

主　　编◎李　静
副 主 编◎王雅丽　郭　军　庞　坤
　　　　　陈　伟
参编人员◎刘军丽　张文敏　李增提
　　　　　黄中升　王秀兰

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数教程／李静主编．—北京：北京师范大学出版社，2013.11

ISBN 978-7-303-17086-9

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①李…　Ⅲ．①线性代数－师范大学－教材　Ⅳ．①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 216672 号

营 销 中 心 电 话　010-58802181 58805532
北师大出版社高等教育分社网　http://gaojiao.bnup.com
电 子 信 箱　gaojiao@bnupg.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnupg.com
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：北京京师印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm × 230 mm
印　　张：14
字　　数：260 千字
版　　次：2013 年 11 月第 1 版
印　　次：2013 年 11 月第 1 次印刷
定　　价：28.00 元

策划编辑：胡廷兰　　责任编辑：胡廷兰
美术编辑：毛　佳　　装帧设计：毛　佳
责任校对：李　菡　　责任印制：孙文凯

内容提要

《线性代数教程》考虑知识点的多角度变式和内容水平的阶梯过渡，以教师高效教学和学生高效学习为目标，强调合情理解和演绎推证相结合、统筹接受教学和自主学习，兼顾数学的工具性和素养性，同时力求体现非数学专业的特点，突出数学知识的具体背景，注重数学应用能力的培养.

全书内容包括行列式、矩阵及其运算，向量与方程组，矩阵相似与对角化，二次型等内容. 单元内容后设有练习及提示，不同层次习题后设一道历年考研真题及解答.

本书适合作为普通高等学校理工类各专业和经济管理类有关专业“线性代数”课程的教材，尤其适合报考研究生的读者以及自学者使用.

前 言

《线性代数教程》是河北省高等教育教学改革研究重点项目“本原性问题驱动下的高等数学变式教学研究与实践(2012GJJG108)”的一个实践成果. 编者基于“数学学习在于学会思考，问题意识有助于专业创新，学生主体性发挥在于问题的启发思考”等理念，考虑“线性代数”抽象、严谨等特点，集多年教学经验和教学研究成果，在继承传统优点的基础上，独创性地开辟了本书的编写风格.

(1)设置本原性问题促使学生学会数学思考

本书每一节开始设置的“导学思考”中涵盖宏观和微观两类问题. “宏观问题”帮助学生比较粗略地了解或认识“材料内容”，做到以旧带新，激发学习兴趣；“微观问题”帮助学生微观地探究或研究“材料内容”，驱动学生把握数学本质，这些问题给学生指明了高效学习与能力提高的路径，可以帮助教师引领学生课前思考、课上聚焦实质、课后总结反思. 问题旨在促进思考，不在乎回答正确与否.

(2)变式教学思想渗透到认知的全过程

本书根据非数学专业学生由具体到抽象的思维特点，在背景理解的基础之上，注重知识脉络的梳理、知识之间的合理“过渡”. 在继承以往“够用、需要、适合”的工具性理念的基础之上，本书编写充分体现了过程性、阶梯性、合情性的过程变式，同时，注重数学思想方法的本质提炼和学习掌握概念变式，以及问题变式，并借用“数学素养”教育理念激发学生学习数学的热情.

(3)多类型、多层次例、习题安排促进学生自主发展

本书在例、习题的安排上，遵循“例题是教师搀扶着走，

练习是拄着拐杖走，习题是自己独立走”的基本理念．全书例题“坡度”平缓，类型变式多元多样，凸显解题思想方法．练习附有提示，以帮助学生尝试运用所学方法技巧．习题分三个层次设置，以充分照顾程度不同学生的学习，便于教师有针对性地布置习题作业；考研题目是章节内容的深化，可以激发学生进行更深层次的知识拓展．全书最后附有习题的解题思路和答案．

(4)教师教和学生学的有机统一

本书是从使学生学会数学思考的角度设计的，这样的设计有助于学生开展有效、高效的学习，有助于年轻教师有效地研究教学内容，更快地适应学生的学习状态与规律，进而得到学生的认可．基于此，本教材确定书名为《线性代数教程》，即它是学生学和教师教有机融合的程式或教学范式．

本书由廊坊师范学院数学与信息科学学院李静任主编，廊坊师范学院王雅丽、郭军和陈伟，中国人民武装警察部队学院庞坤任副主编．全书的结构框架和书中各章的“导学思考”内容由李静设计．编写分工如下：第1章和第2章§2.5～§2.6，李静；第2章§2.1～§2.4，王雅丽；第3章，刘军丽(廊坊师范学院)；第4章，张文敏(廊坊师范学院)．每章初稿均由主编李静修改、完善和定稿，最后由王雅丽、郭军、庞坤，以及廊坊师范学院黄中升和李增提统稿．感谢北京师范大学出版社编辑胡廷兰老师及同仁对本书的帮助和支持．

本书是廊坊师范学院数学与信息科学学院数学与应用数学重点专业的建设教材，得到了廊坊师范学院副院长李士杰教授以及教务处的大力支持，在此表示衷心的感谢！同时，感谢廊坊师范学院外国语学院王秀兰女士的校正工作．

由于水平有限，加之时间仓促，书中难免有疏漏和不足之处，望广大读者和同行专家批评指正．

编　者

2013年10月

目 录

第 1 章　矩　阵

矩阵是近代数学中一个非常重要的概念，在自然科学和工程技术乃至经济管理工作中具有广泛的应用．本章主要介绍矩阵的概念、运算，与矩阵相关的行列式的性质、计算和应用，可逆矩阵和分块矩阵等基本理论知识．

§1.1　矩阵的概念

导学思考

(1)矩阵是数吗？还是别的什么？

(2)矩阵在形状或元素上有哪些变式？

1.1.1　矩阵的定义

例　某工厂生产的四种产品 P_1，P_2，P_3，P_4，每种产品在 1 月、2 月、3 月的销售额(单位：万元)如表 1.1 所示．

表 1.1

	P_1	P_2	P_3	P_4
1 月	12	10	12	9.9
2 月	13	13	12	10
3 月	12.5	13	9	8

如果我们将主要关注的对象——表中数据按原次序排列，并加上括号，形成一个整体，那么就可以简略地表示为矩形数表(矩阵)．

$$\begin{pmatrix} 12 & 10 & 12 & 9.9 \\ 13 & 13 & 12 & 10 \\ 12.5 & 13 & 9 & 8 \end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

定义　将 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$排成 m 行 n 列的一个数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.1.2}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ **矩阵**，组成矩阵(1.1.2)的每个数称为矩阵(1.1.2)的元素，位于第 i 行、第 j 列的元素 a_{ij} 称为矩阵(1.1.2)的(i, j)元素. i 称为 a_{ij} 的**行指标**，j 称为 a_{ij} 的**列指标**.

通常用大写字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 表示矩阵. 可将矩阵(1.1.2)简记为

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n} \text{ 或 } \boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn} \text{ 或 } \boldsymbol{A}=(a_{ij}).$$

比如，矩阵(1.1.1)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 12 & 10 & 12 & 9.9 \\ 13 & 13 & 12 & 10 \\ 12.5 & 13 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

是 3×4 矩阵，其中 $a_{24}=10$，$a_{32}=13$.

1.1.2　矩阵的特类

矩阵中的元素都是实数，称为**实矩阵**；矩阵中的元素至少一个是复数，称为**复矩阵**. 元素都是零的矩阵称为**零矩阵**，记为 $\boldsymbol{O}_{mn}$ 或 $\boldsymbol{O}$. 本书中的矩阵除特别说明外，都指实矩阵.

如果矩阵中的 $m=n$，称之为 n 阶矩阵或 n 阶方阵，记为 $\boldsymbol{A}_n$. 一阶方阵可看作一个数.

当 $m=1$，即只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

称为**行矩阵**，或**行向量**.

当 $n=1$，即只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**，或**列向量**.

方阵中从左上角到右下角的元素所在的直线称为主对角线.

主对角线下侧的元素全为零的方阵，称为**上三角形矩阵**，如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

主对角线上侧的元素全为零的方阵，称为**下三角形矩阵**，如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

上三角形矩阵与下三角形矩阵称为**三角矩阵**.

主对角线两侧的元素全为零的方阵称为**对角阵**，如

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

可以记作

$$\boldsymbol{A}_n = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

主对角线上的元素都为 1 的对角阵称为**单位矩阵**，简称**单位阵**，记为 $\boldsymbol{E}$，如

$$\boldsymbol{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

显然，单位阵的元素 a_{ij} 为

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

类似地，三阶单位阵、四阶单位阵分别表示为 $\boldsymbol{E}_3$，$\boldsymbol{E}_4$.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数、列数分别相等，则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵**.

两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，若 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

练习：当 $\begin{bmatrix} x & 3y \\ z & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u & u \\ 1 & 3x \end{bmatrix}$ 时，问 x，y，z 与 u 各取何值？

提示：利用矩阵相等定义考虑．

§1.2 矩阵的运算

导学思考

(1)矩阵可以同数一样进行加、减、乘、除、乘方等运算吗？运算后的结果仍是矩阵吗？

(2)矩阵的乘法规则是什么？其乘法运算律与普通数一样吗？

(3)矩阵的转置是什么运算？结果怎样？

1.2.1 矩阵的加法，数与矩阵相乘

定义 1 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

是两个同型矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可以相加，且规定其和为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

例 1 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

解：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

由矩阵加法的定义，容易得到矩阵加法运算满足以下运算规律.

(1)交换律：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}.$$

(2)结合律：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}).$$

(3)零和律：

$$A+O=O+A=A.$$

定义 2　设 k 是一个实数，

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

称矩阵

$$B=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

为数 k 与矩阵 A 的乘积，简称为数乘，记为 $B=kA$，也可记为 $B=Ak$.

当 $k=-1$ 时，

$$B=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

为 A 的负矩阵，记为 $-A$.

由数乘矩阵的定义，不难得出其运算满足以下运算规律.

(1)分配律：

$$k(A+B)=kA+kB.$$

$$(k+l)A=kA+lA.$$

(2)结合律：

$$(kl)A=k(lA)=l(kA).$$

(3)零一律：

$$1A=A.$$

$$0A=O.$$

$$kO=O.$$

$$(-1)A=1(-A)=-A.$$

例 2　设 A，B 是两个同型矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

求：(1)$3\boldsymbol{A}$；(2)$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$.

解：

(1)$$3\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3\times1 & 3\times(-2) & 3\times3\\ 3\times2 & 3\times5 & 3\times7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -6 & 9\\ 6 & 15 & 21\end{bmatrix};$$

(2)$$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & -6 & 9\\ 6 & 15 & 21\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 8 & -2 & 16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -6 & 9\\ -2 & 17 & 5\end{bmatrix}.$$

例 3 设矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 满足等式 $5(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})=2(2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 1 & -2\\ -1 & 5 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}5 & 3 & 1\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解：由 $5(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})=2(2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})$，得

$$5\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{C}=4\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{C}.$$
$$7\boldsymbol{C}=4\boldsymbol{B}-5\boldsymbol{A}.$$
$$\boldsymbol{C}=\frac{1}{7}(4\boldsymbol{B}-5\boldsymbol{A}).$$

于是

$$4\boldsymbol{B}-5\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}20 & 12 & 4\\ -12 & 4 & 12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}20 & 5 & -10\\ -5 & 25 & 5\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0 & 7 & 14\\ -7 & -21 & 7\end{bmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{C}=\frac{1}{7}(4\boldsymbol{B}-5\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & -3 & 1\end{bmatrix}.$$

练习：已知 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，且 $k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，证明 $k=0$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

提示：考虑 $ka_{ij}=0$.

1.2.2 矩阵与矩阵相乘

先看一个例子.

设风帆公司甲、乙两种产品的生产成本如表 1.2 所示.

表 1.2　　(单位：百元)

生产成本 \ 产品	甲	乙
1. 原材料费用	10	20
2. 人工	5	3

该公司 2008 年第一、第二两季度产品计划生产件数如表 1.3 所示.

表 1.3　　(单位：件)

产品 \ 季度	第一季度	第二季度
甲	400	450
乙	200	260

求此公司 2008 年第一、第二季度生产成本的各项费用，即原材料费用，人工费用分别是多少?

解：根据表 1.2 和表 1.3，风帆公司 2008 年

第一季度原材料费用$=10\times400+20\times200=8\,000$.

第一季度人工费用$=5\times400+3\times200=2\,600$.

类似地，

第二季度原材料费用$=10\times450+20\times260=9\,700$.

第二季度人工费用$=5\times450+3\times260=3\,030$.

可得 2008 年第一、第二季度的生产成本的各项费用，见表 1.4.

表 1.4　　(单位：百元)

生产成本 \ 季度	第一季度	第二季度
1. 原材料费用	8 000	9 700
2. 人工	2 600	3 030

把表 1.2 写成矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}10 & 20\\ 5 & 3\end{bmatrix}.$$

把表 1.3 写成矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}400 & 450\\ 200 & 260\end{bmatrix}.$$