

数理化自学丛书

代 数

第 三 册

代数几何讲义

代数

数理化自学丛书

代 数

第 三 册

数理化自学丛书编委会
数学编写小组编

上海人民出版社

数理化自学丛书

代 数 (第 三 册)

数理化自学丛书编委会

数 学 编 写 小 组 编

(原上海科技版)

上海人民出版社出版

(上海绍兴路5号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张12.25 字数250,000

1963年12月第1版 1977年11月第1版 1977年11月第1次印刷

统一书号: 13171·218 定价: 0.81 元

内 容 提 要

本书是数理化自学丛书代数第三册,内容包括不等式,函数和它的图象,一次函数,二次函数,有理指数的幂函数,指数函数和对数函数,常用对数,指数方程和对数方程,数列等九章,书中有详细的说明和分析,并附有大量例题和习题,供练习巩固之用。

本书供学习本丛书代数一、二册的青年工人、在职干部、知识青年自学之用,也可供中等学校青年教师参考。

重 印 说 明

《数理化自学丛书》是一九六六年前出版的。计有《代数》四册，《平面几何》二册，《三角》一册，《立体几何》一册，《平面解析几何》一册；《物理》四册；《化学》四册。这套书的特点是：比较明白易懂，从讲清基本概念出发，循序前进，使读者易于接受和理解，并附有不少习题供练习用。这套书可以作为青年工人、知识青年和在职干部自学之用，也可供中等学校青年教师教学参考，出版以后，很受读者欢迎。但是在“四人帮”及其余党控制上海出版工作期间，这套书横被扣上所谓引导青年走白专道路的罪名，不准出版。

英明领袖华主席和党中央一举粉碎了祸国殃民的“四人帮”。我国社会主义革命和社会主义建设进入新的发展时期。党的第十一次全国代表大会号召全党、全军、全国各族人民高举毛主席的伟大旗帜，在英明领袖华主席和党中央领导下，为完成党的十一大提出的各项战斗任务，为在本世纪内把我国建设成为伟大的社会主义的现代化强国，争取对人类作出较大的贡献，努力奋斗。许多工农群众和干部，在党的十一大精神鼓舞下，决心紧跟英明领袖华主席和党中央，抓纲治国，大干快上，向科学技术现代化进军，为实现四个现代化作出贡献，他们来信要求重印《数理化自学丛书》。根据读者的要求，我们现在在原书基础上作一些必要的修改后，重新出版这套书，以应需要。

十多年来，科学技术的发展是很快的。本丛书介绍的虽仅是数理化方面的基础知识，但对于应予反映的科技新成就方面内容，是显得不够的。同时，由于本书是按读者自学的要求编写的，篇幅上就不免有些庞大，有些部分也显得有些烦琐。这些，要请读者在阅读时加以注意。

对本书的缺点，希望广大读者批评指出，以便修订时参考。

一九七七年十一月

目 录

重印说明

第一章 不等式 1

§ 1.1 不等式的概念 1

§ 1.2 绝对不等式和条件不等式 4

§ 1.3 不等式的基本性质 7

§ 1.4 一元一次不等式组 13

§ 1.5 一元二次不等式 22

§ 1.6 分式不等式 31

* § 1.7 一元二次不等式组 37

* § 1.8 高次不等式 40

§ 1.9 不等式的其他一些性质 44

* § 1.10 无理不等式 53

§ 1.11 不等式的证明 55

§ 1.12 关于绝对值的不等式 50

本章提要 70

复习题一 73

第二章 函数和它的图象 77

§ 2.1 常量和变量 77

§ 2.2 函数 82

§ 2.3 函数的定义域 85

§ 2.4 函数的值 89

§ 2.5 平面上的直角坐标系 91

§ 2.6 函数关系的表示法 98

§ 2.7 函数的图象的绘制 102

本章提要 105

复习题二 106

第三章 一次函数 109

§ 3.1 函数 $y=kx (k \neq 0)$ 109

§ 3.2 函数 $y=kx+b (k \neq 0)$ 122

§ 3.3 根据已知条件确定一个一次函数 129

§ 3.4 方程 $ax+by+c=0$ 的图象 132

§ 3.5 二元一次方程组的图象解法和解的组数 137

本章提要 140

复习题三 141

第四章 二次函数 143

§ 4.1 函数 $y=ax^2+bx+c (a \neq 0)$ 143

§ 4.2 二次函数的图象 144

§ 4.3 二次函数图象的作法 153

§ 4.4 根据已知条件确定二次函数 156

§ 4.5 二次函数的性质 159

§ 4.6 利用二次函数的图象解一元二次方程 167

§ 4.7 利用二次函数的图象解一元二次不等式 170

*§4.8 一元二次不等式的解 的讨论	173
本章提要	178
复习题四	179
第五章 有理指数的幂函 数	182
§5.1 函数 $y=x^3$	182
§5.2 函数的一些重要 性质	185
§5.3 函数 $y=x^{-1}$	192
§5.4 函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)	195
§5.5 函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 和 $y=x^{\frac{1}{3}}$	198
§5.6 反函数	201
§5.7 单值函数和多值函 数	205
本章提要	209
复习题五	210
第六章 指数函数和对数函 数	212
§6.1 指数概念的扩展	212
§6.2 指数函数	216
§6.3 对数	226
§6.4 对数函数	231
§6.5 关于对数的定理	238
本章提要	244
复习题六	246
第七章 常用对数	249
§7.1 常用对数	249

§7.2 对数表	255
§7.3 常用对数的求法	258
§7.4 反对数表	267
§7.5 利用对数进行计算	270
§7.6 对数的换底公式	273
本章提要	276
复习题七	276
第八章 指数方程和对数方 程	279
§8.1 指数方程	279
§8.2 对数方程	284
*§8.3 指数方程和对数方程 的图象解法	290
*§8.4 指数和对数方程组	292
本章提要	295
复习题八	295
第九章 数列	297
§9.1 数列	297
§9.2 等差数列	307
§9.3 等比数列	313
§9.4 等差中项和等比中 项	327
*§9.5 数列的极限	333
*§9.6 无穷递缩等比数列	344
*§9.7 化循环小数为分数	349
本章提要	352
复习题九	354
总复习题	359
习题答案	368

第一章 不 等 式

在日常生活、生产实际和科学研究中,我们不但要考察量与量之间的相等关系,也要考察量与量之间的不等关系. 反映在数学里,我们不但要研究等式,并且也要研究不等式.

在代数第二册里,我们曾学习过关于不等式的一些初步知识. 这一章里,我们将在复习这些知识的基础上,系统地学习关于不等式的知识.

§ 1.1 不等式的概念

1. 实数大小的比较 我们知道,两个实数 a 与 b 之间,总存在,而且只存在,下面三种关系中的一种:

(1) a 大于 b , 记做 $a > b$;

(2) a 小于 b , 记做 $a < b$;

(3) a 等于 b , 记做 $a = b$.

我们还知道,要比较两个实数 a 和 b 的大小,只要考察它们的差就可以了,就是:

如果 $a - b$ 是正的,那末 $a > b$, 如果 $a - b$ 是负的,那末 $a < b$, 如果 $a - b$ 是零,那末 $a = b$;

反过来,如果 $a > b$, 那末 $a - b$ 是正的, 如果 $a < b$, 那末 $a - b$ 是负的, 如果 $a = b$, 那末 $a - b$ 是零.

用式子来表示,就是:

设 a, b 为两实数,

$$\begin{aligned} \text{如果 } a-b \begin{cases} >0, \\ <0, \\ =0, \end{cases} \quad \text{那末 } a \begin{cases} >b, \\ <b, \\ =b; \end{cases} \\ \text{反过来, 如果 } a \begin{cases} >b, \\ <b, \\ =b, \end{cases} \quad \text{那末 } a-b \begin{cases} >0, \\ <0, \\ =0. \end{cases} \end{aligned}$$

在上面所讲的式子里, $a > b$ 和 $a < b$ 这两个式子是用不等号“ $>$ ”和“ $<$ ”把两个实数 a 和 b 联结起来构成的, 它们都叫做不等式; $a = b$ 是用等号“ $=$ ”把两个实数 a 和 b 联结起来构成的, 它叫做等式。

2. 代数式的值的大小比较 有时候, 我们也要比较两个代数式的值的大小。这时, 可以根据一个代数式的值大于、小于、或者等于另一个代数式的值, 而分别用符号“ $>$ ”, “ $<$ ”, 或者“ $=$ ”把它们联结起来。在前两种情况下, 就组成了不等式; 在后一种情况下, 就组成了等式。例如

$$3+2>4, \quad a+1<a+2$$

等等都是不等式;

$$3+2=5, \quad (a+1)^2=a^2+2a+1$$

等等都是等式。

因为单独用一个字母或数字所表示的数, 也可以看做是代数式, 所以我们说:

用不等号“ $>$ ”或者“ $<$ ”把两个代数式联结起来所成的式子叫做不等式; 用等号“ $=$ ”把两个代数式联结起来所成的式子, 叫做等式。

象比较两个实数的大小一样, 比较两个代数式的值的大小, 也只要考察它们的差就可以了。

例 1. 比较 $(x+3)(x-5)$ 和 $(x+2)(x-4)$ 的大小。

$$\begin{aligned}
 \text{【解】} \quad & (x+3)(x-5) - (x+2)(x-4) \\
 &= (x^2 - 2x - 15) - (x^2 - 2x - 8) \\
 &= -7 < 0, \\
 \therefore \quad & (x+3)(x-5) < (x+2)(x-4).
 \end{aligned}$$

例 2. 比较 $(x^2+1)^2$ 和 x^4+x^2+1 的大小.

$$\begin{aligned}
 \text{【解】} \quad & (x^2+1)^2 - (x^4+x^2+1) \\
 &= (x^4+2x^2+1) - (x^4+x^2+1) \\
 &= x^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ 如果 } x=0, \text{ 那末 } x^2=0, \text{ 这时有} \\
 (x^2+1)^2 - (x^4+x^2+1) &= 0, \\
 \therefore (x^2+1)^2 &= x^4+x^2+1.
 \end{aligned}$$

(2) 如果 $x \neq 0$, 因为不等于零的任何实数的平方都是正数, 所以 $x^2 > 0$, 这时有

$$\begin{aligned}
 (x^2+1)^2 - (x^4+x^2+1) &> 0, \\
 \therefore (x^2+1)^2 &> x^4+x^2+1.
 \end{aligned}$$

注 上面这两种情况, 合在一起可以写做

$$(x^2+1)^2 \geq x^4+x^2+1.$$

这个式子表示 $(x^2+1)^2$ 的值不小于 x^4+x^2+1 的值.

象这种用符号“ $\geq$ ”(读做大于或等于)或者“ $\leq$ ”(读做小于或等于)把两个代数式联结起来的式子, 也叫做不等式. 为了区别, 我们把用符号“ $>$ ”或者“ $<$ ”联结而成的不等式叫做严格不等式, 而用符号“ $\geq$ ”或者“ $\leq$ ”联结而成的不等式叫做非严格不等式.

例 3. 比较 $(a-1)^2$ 和 a^2+1 的大小.

$$\begin{aligned}
 \text{【解】} \quad & (a-1)^2 - (a^2+1) = (a^2-2a+1) - (a^2+1) \\
 &= -2a.
 \end{aligned}$$

因为字母 a 可能表示正数或负数, 也可能表示零, 所以要分做三种情况来考察:

(1) 如果 a 是正数, 那末 $-2a$ 就是负数, 这时有

$$(a-1)^2 < a^2 + 1.$$

(2) 如果 a 是负数, 那末 $-2a$ 就是正数, 这时有

$$(a-1)^2 > a^2 + 1.$$

(3) 如果 a 是零, 那末 $-2a$ 也是零, 这时有

$$(a-1)^2 = a^2 + 1.$$

上面讨论的三种情况, 合在一起可以写做

$$(a-1)^2 \begin{cases} < a^2 + 1 & \text{如果 } a > 0, \\ > a^2 + 1 & \text{如果 } a < 0, \\ = a^2 + 1 & \text{如果 } a = 0. \end{cases}$$

习 题 1.1

比较下列各题中两个代数式的值的大小:

1. $(a-5)(a-7)$ 和 $(a-6)^2$.

2. $(a+1)(a^2-a+1)$ 和 $(a-1)(a^2+a+1)$.

3. $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ 和 $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$,
($x \neq 0$).

4. $a^2 + b^2$ 和 $2ab$.

[提示: 按照 $a=b$ 或者 $a \neq b$ 分别考察.]

5. $(\sqrt{x}-1)^2$ 和 $(\sqrt{x}+1)^2$.

§ 1.2 绝对不等式和条件不等式

在上节的例 1 中, 我们看到不论字母 x 表示什么实数, 不等式

$$(x+3)(x-5) < (x+2)(x-4)$$

总能成立. 在例 2 中, 我们看到当 $x \neq 0$ 的时候, 不等式

$$(x^2+1)^2 > x^4 + x^2 + 1$$

才能成立, 而当 $x=0$ 的时候, 这个不等式就不成立.

绝对

如果不论用什么数值代替不等式中的字母，它都能够成立，这样的不等式叫做**绝对不等式**。如果只有用某些范围内的数值代替不等式中的字母，它才能够成立，这样的不等式叫做**条件不等式**。

例如，不等式

$$(x+3)(x-5) < (x+2)(x-4)$$

和

$$a+1 > a-2$$

都是绝对不等式；而不等式

$$(x^2+1)^2 > x^4 + x^2 + 1$$

和

$$(a-1)^2 < a^2 + 1$$

都是条件不等式。

两边都不含有字母而能够成立的不等式，也叫做绝对不等式。例如

$$5 > 3, \quad -5 < -3$$

等等，都是绝对不等式。

例1. 判断下列这些不等式中，哪些是绝对不等式，哪些是条件不等式？哪些不能成立？

$$(1) \sqrt{2} > 1.4; \quad (2) x^2 + 1 > 0;$$

$$(3) x^2 + 1 < 0; \quad (4) x + 1 < 0.$$

【解】 (1) 因为不等式 $\sqrt{2} > 1.4$ 的两边都不含有字母，并且 $\sqrt{2} = 1.414\cdots$ 的值确实大于 1.4，所以这个不等式是绝对不等式。

(2) 因为不论 x 是什么实数， x^2 都不是负数，因此 $x^2 + 1$ 的值总大于零。这就是说，不论 x 是什么实数，不等式 $x^2 + 1 > 0$ 总能成立，所以这个不等式是绝对不等式。

(3) 因为不论 x 是什么实数， $x^2 + 1$ 的值总大于零，所以不论用什么数值代替 x ，不等式 $x^2 + 1 < 0$ 都不能成立。

(4) 因为只有用比 -1 小的值代替 x , 不等式 $x+1<0$ 才能成立, 所以这个不等式是条件不等式.

在含有字母的不等式中, 求出字母应当取什么范围内的数值才能使不等式成立, 这个手续叫做解不等式. 这里的字母叫做不等式的未知数, 所求出的使不等式能够成立的未知数的那些数值范围, 叫做不等式的解.

从上面所举的例子中, 可以看到不等式的解可能有三种不同情况:

(1) 任何实数都是不等式的解: 例如何实数都是不等式 $x^2+1>0$ 的解. 这种不等式就是绝对不等式.

(2) 只有某些范围内的实数是不等式的解: 例如只有比 -1 小的实数是不等式 $x+1<0$ 的解. 这种不等式就是条件不等式.

(3) 任何实数都不是不等式的解: 例如何实数都不是不等式 $x^2+1<0$ 的解. 通常我们说这个不等式没有解.

例 2. 通过观察, 确定下列各不等式的解:

(1) $x^2<0$; (2) $(x-1)^2>0$; (3) $(x-1)^2+1>0$.

【解】 (1) 不论 x 是什么实数, x^2 的值不能小于零, 这个不等式没有解.

(2) 只要 $x \neq 1$, $(x-1)^2$ 的值总大于零, 所以这个不等式的解是除去 $x=1$ 以外的全体实数, 也就是

$$x < 1 \quad \text{或者} \quad x > 1.$$

(3) 不论 x 是什么实数, $(x-1)^2$ 的值都不能是负数, 因此 $(x-1)^2+1$ 的值总大于零. 所以这个不等式的解是全体实数.

习 题 1.2

1. 应用比较不等式左右两边两个代数式值的大小的方法, 证明下

列各不等式是绝对不等式:

$$(1) (x+1)(x-5) < (x-2)^2;$$

$$(2) (a+1)\left(a^2 + \frac{1}{2}a + 1\right) > \left(a + \frac{1}{2}\right)(a^2 + a + 1).$$

2. 通过观察, 确定下列各不等式的解:

$$(1) x^2 > 0;$$

$$(2) (x+1)^2 < 0;$$

$$(3) \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0;$$

$$(4) (x+1)^2 > 0.$$

3. 把下列不等式中左边的式子先配方化成 $(x+m)^2 + k$ 的形式, 再确定它的解:

$$(1) x^2 - 2x + 3 > 0;$$

$$(2) x^2 - x + 1 < 0;$$

$$(3) x^2 + 3x + \frac{9}{4} > 0;$$

$$(4) x^2 + x + \frac{1}{4} < 0.$$

§1.3 不等式的基本性质

对于等式来说, 我们已经知道它具有下面这些基本性质:

(1) 如果 $a=b$, 那末 $b=a$; 反过来, 如果 $b=a$, 那末 $a=b$. (相等的对称性)

(2) 如果 $a=b$, $b=c$, 那末 $a=c$. (相等的传递性)

(3) 如果 $a=b$, 那末 $a+c=b+c$.

(4) 如果 $a=b$, 那末 $ac=bc$.

类似地, 不等式也有下面这些基本性质:

性质 1. 如果 $a > b$, 那末 $b < a$; 反过来, 如果 $b < a$, 那末 $a > b$.

这个性质叫做**不等的对逆性**. 利用这个性质, 以后当我们研究不等式的时候, 只需研究用一种不等号(例如用大于号“ $>$ ”)联结起来的不等式的性质, 就可以推出用另一种不等号(例如用小于号“ $<$ ”)联接起来的不等式所具有的类似性质.

性质 2. 如果 $a > b$, $b > c$, 那末, $a > c$.

这个性质叫做不等式的传递性. 利用这个性质, 我们可以从一个不等式过渡到另一个不等式.

例如, 从不等式 $\pi > 3$ 和 $3 > 2\sqrt{2}$, 可以得出不等式

$$\pi > 2\sqrt{2}.$$

性质 3. 如果 $a > b$, 那末 $a + c > b + c$.

这个性质指出: 不等式的不等号两边加上一个相同的数, 仍旧得到一个不等式, 并且这个不等式与原来的不等式有相同的不等号.

例 1. 已知 $a + b > c$, 求证 $a > c - b$.

【证明】 在不等式 $a + b > c$ 的不等号两边同加上 $-b$, 得

$$a + b + (-b) > c + (-b),$$

$$\therefore a > c - b.$$

这个例子指出: 不等式中任何一项可以把它的符号变成相反的符号后, 从一边移到另一边.

过去我们在解一元一次不等式的时候, 就经常应用到这一法则(移项法则).

例 2. 解不等式 $3x - 1 > 2x$.

【解】 把不等式中含有 x 的项移到不等号的左边, 常数项移到不等号的右边得

$$3x - 2x > 1.$$

$$\therefore x > 1.$$

上面关于不等式的三个基本性质, 都是很明显的. 现在我们进一步来研究在一个不等式的不等号两边同乘以一个数(正数、负数、或者零)的时候, 将会产生怎样的结果. 我们先来看下面的例子.

例 3. 已知 $a > b$, 比较 ac 和 bc 的大小.

分析 要比较 ac 和 bc 的大小, 只要考察它们的差 $ac-bc$, 就是 $(a-b)c$ 是什么样性质的数就可以了. 根据已知条件 $a>b$, 可以知道差的一个因式 $a-b$ 一定是正数, 因此, 差 $(a-b)c$ 是正数、负数或者是零, 要根据 c 是正数、负数或零来确定.

【解】 $ac-bc=(a-b)c.$

$\because a>b, \therefore a-b$ 是正数.

(1) 如果 c 是正数, 那末因为两个正数的积仍是正数, 所以 $(a-b)c>0$, 这时 $ac>bc$.

(2) 如果 c 是负数, 那末因为一个正数与一个负数的积是负数, 所以 $(a-b)c<0$, 这时 $ac<bc$.

(3) 如果 c 等于零. 那末 $(a-b)c$ 等于零, 所以

$$ac=bc.$$

上面的例子, 指出了不等式的第四个基本性质.

性质 4. 如果 $a>b$, 那末

$$ac \begin{cases} > bc & (\text{当 } c>0 \text{ 的时候}), \\ = bc & (\text{当 } c=0 \text{ 的时候}), \\ < bc & (\text{当 } c<0 \text{ 的时候}). \end{cases}$$

过去, 我们在解一元一次不等式的时候, 也经常应用到这个性质.

例 4. 解不等式:

$$2(x+1) + \frac{x-2}{3} > \frac{7x}{2} - 1.$$

【解】 在不等式的两边同乘以 6. 得

$$12(x+1) + 2(x-2) > 21x - 6,$$

就是

$$14x + 8 > 21x - 6.$$

移项, 得

$$14x - 21x > -6 - 8,$$

就是

$$-7x > -14.$$