

TURING

图灵数字·统计学丛书

畅销60年概率论经典教材

An Introduction to Probability Theory
and Its Applications
Vol 1, 3rd Edition

概率论 及其应用

[美] 威廉·费勒 著

胡迪鹤 译

(卷1·第3版)



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING

图灵数字·统计学丛书

畅销60年概率论经典教材

An Introduction to Probability Theory
and Its Applications
Vol 1, 3rd Edition

概率论 及其应用

[美] 威廉·费勒 著

胡迪鹤 译

(卷1·第3版)

人民邮电出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

概率论及其应用:第3版.第1卷/(美)费勒著;
胡迪鹤译. —北京:人民邮电出版社,2014.1
(图灵数学·统计学丛书)
书名原文:An introduction to probability
theory and its applications
ISBN 978-7-115-33667-5

I. ①概… II. ①费… ②胡… III. ①概率论 IV.
①0211

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第273973号

内 容 提 要

本书涉及面极广,不仅讨论了概率论在离散空间中的诸多课题,也涉及了概率论在物理学、化学、生物学(特别是遗传学)、博弈论及经济学等方面的应用.主要内容有:样本空间及其上的概率计算,独立随机变量之和的随机起伏,事件的组合及条件概率,离散随机变量及其数字特征,大数定律,离散的马尔可夫过程及其各种重要特征,更新理论等.除正文外,本书还附有数百道习题和大量的附录.

本书既作概率论及相关学科的教学参考书,亦可作为科学研究的引导书.特别是此书中有关随机性和概率思想的论述,极具启发性.

◆ 著 [美] 威廉·费勒

译 胡迪鹤

责任编辑 朱 巍

特约编辑 江志强

责任印制 焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路11号

邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn

网址 <http://www.ptpress.com.cn>

大厂聚鑫印刷有限责任公司印刷

◆ 开本:700×1000 1/16

印张:25.5

字数:529千字

2014年1月第1版

印数:1—4 000册

2014年1月河北第1次印刷

著作权合同登记号 图字:01-2013-3664号

定价:69.00元

读者服务热线:(010) 51095186转600 印装质量热线:(010) 81055316

反盗版热线:(010) 81055315

广告经营许可证:京崇工商广字第0021号

站在巨人的肩上
Standing on Shoulders of Giants



iTuring.cn

第3版中译本译者序

威廉·费勒 (William Feller) 所著《概率论及其应用》(卷1) 初版出版于1950年, 1957年再版. 原著第2版曾出过中译本. 此译本是根据原著1970年的第3版修订版翻译的. 第3版较之前两版, 不仅正文、附录、习题, 甚至连参考文献, 都做了大量的增删和修改. 有些章节完全是新的, 如第3章; 有些专题增加了许多新内容, 如分支过程、马尔可夫链、各种极限定理等.

威廉·费勒对近代概率论的发展, 做出过卓越的贡献, 特别是他的两本专著——《概率论及其应用》(共2卷), 曾经影响了包括中国在内的世界各国几代概率论及其相关领域的学生和研究者. 即使用今天的标准来衡量, 该书仍是一本经典佳作.

该书涉及面极广, 不仅论述了概率论的诸多课题, 也包括了概率论在物理、化学、生物、遗传、博弈、经济等多方面的应用.

该书写作风格明快, 深入浅出, 引人入胜, 作者旁征博引, 面对复杂主题显得游刃有余, 充分展示了过人的才智.

译本尽量忠于原著, 但翻译毕竟是再创造, 中文和英文毕竟是两种语言, 断无数学中那种一一对应. 如译文有违原作, 或有不当之处, 敬请指教.

译本体例, 一如通例, 不再赘述.

胡迪鹤

2005年10月

第 2 版中译本译者序

著者原意想写 2 卷书，著者序言里还谈到第 2 卷所包含的内容。本卷只限于讨论“离散空间”。

在概率论的文献中，就内容精练而论，本书有它独特的地位。在离散空间的框架下，著者用可能是完全现代化的、严格而又直观的理论进行叙述，而所用的工具并没有超出初等数学的范围。书中配置了一系列重要的、具体的问题，使读者能逐步地掌握概率论的基础，作者还详细地研究了取整数值的随机变量的母函数的理论和应用（参阅第 11 章），为一般的随机变量的特征函数理论作了良好的开端。第 15 章到第 17 章里，专门研究了关于有限及可数情况的马尔可夫链的性质，对要继续进一步研究一般随机过程理论的读者，将会有很大帮助。

除了这些研究以外，本书的优点还在于汇集了大量的特殊问题，并且对许多例题作了完全而又具体的计算。在研究问题时，著者先用特殊的方法推出“直接”的解答，然后逐步进行在概率意义下的分析化处理。这也是本书可贵的地方之一。值得一提的是，为了正确而又明显地反映概率规律的现实性，著者精心地挑选了某些例题，引进了有关统计资料与概率理论相符合的问题。

本书写得比较生动，且有研究价值。但在重要的实际应用方面却讨论得不多，这一点不能不令人感到遗憾。

以下我们对译本做几点说明：首先，译本对原书的序言、绪论以及某些个别的问题和附注作了一些删改。

原书的参考文献都用脚注，为了改善版面，有文献附注的地方都加上方括号“[]”，所注文献放在本书最后部分。

人名的翻译，都按音译惯例。书末附有人名对照表，以资查阅。

这卷书按内容分上下册出版，上册包含较初等的内容，下册包含一些专题的研究。

全书初稿承许宝騄先生病中代为校阅，译者谨致最诚挚的谢意。

译者谨识

1960 年于北京大学

第 3 版 序

超过 25 年前, 当我开始构思此书时, 苏联以外的数学家只有少数人承认概率论是数学的一个正统分支. 其应用范围有限, 而且个别问题的处理往往难以置信地复杂. 在这种情况下, 本书不可能为现成的读者或满足当时的现实需求而写. 当时只希望能引起人们对概率论的一点点关注, 将各个部分联系起来, 发展统一的方法及指出其潜在的应用. 后来由于人们对概率论兴趣的增长, 该书出乎意料地拥有了许多非数学专业的读者. 在当时本书的观点显得较新, 有关内容其他书不多, 它被广泛采用不足为奇. 时至今日, 虽说本书大部分内容都可在各种面向特别应用的专著中找到, 而其受欢迎程度并未衰减. 为此, 在新版中, 本书特色仍保持不变. 希望该书能继续满足各层次读者的需求. 特别希望它仍拥有一批仅仅为了欣赏和受启发而阅读的读者.

这些年来, 我从与读者的联系中获益匪浅, 这使本书许多方面得到了改进, 许多章节改写得更易于学习. 该书的可读性也得到了改善, 因为换了种更漂亮的字体, 亦得益于麦克杜格尔夫人出色的编辑工作. 作为一个专业编辑, 她对读者的需求相当敏感.

改变最大的是第 3 章. 这一章在第 2 版中才加入, 事实上它是由一次意外的发现所促成的, 那就是其迷人的内容可以用初等方法来处理. 但是这类处理仍然依赖组合分析技巧, 只是目前已经可以用更简单、更自然的概率推导来替代. 本质上看, 这新的一章, 名副其实是全新的.

所有增加的内容中, 最显著的是增加了一些小节, 讨论分支过程、马尔可夫链和棣莫弗-拉普拉斯定理. 第 13 章做了重新安排. 全书例子和习题有小量变动.

我对作者索引的误导性表示遗憾, 但我认为如果一个概念或例子能够追本溯源的话, 我有义务把它交待清楚. 不过这样的索引往往指向一个偶发的评论, 而很少能指明被引用的论文的本意. 此外, 许多例子与习题从非数学论文中提炼而来, 它们原本是用不同的方法处理的. (后来的新书在引用这些非数学论文时, 反而说它们包含了我书中的例子. 这一方面说明概率论发展有多快, 有那么多人看了我的书, 同时也表明引用的作用是多有限.) 由于篇幅与本人能力的限制, 概率论从 20 世纪初萌芽阶段的研究到今天欣欣向荣的发展历史, 在本书中没有充分论述和揭示.

多年来, 我有幸与许多学生和年轻同事共事, 并得到他们的帮助与启发. 我要深深感谢美国陆军研究室, 它支持了我在普林斯顿大学的概率论研究工作. 古德曼提供了富有思想深度的教学经验小结, 皮特全力帮助我做证明, 在此对他们表示特别感谢.

威廉·费勒

1967 年 7 月

修订版序

与第1版相比，第3版命运多舛，反复出现多次恼人的勘误。现在这个修订版印次把所有已发现的错误改正了。而且在不动版的前提下，我们改进了有些表述，添加了习题提示。感谢出版商允许进行这些要花不少钱的更动，它们应当会极大地改善可读性。

几乎所有的改动建议都是来自伊利诺伊州芝加哥市共事的马卓尔教授和克罗夫特博士，以及丹麦皇家空军的库尔上尉（现已退役）。他们以超乎寻常的认真态度研读本书，我从他们那些令人愉快的信件中获益匪浅。

威廉·费勒

1970年6月

于新泽西州普林斯顿市

第 1 版 序

作者原来的本意是要写一本关于概率论的分析方法的书,把概率论作为纯数学的论题.这样的写法更容易保持一致性,从美学角度看也更令人满意,更能引起搞纯粹数学的人的共鸣.然而,由美国海军研究室提供支持的在康奈尔大学的概率论研究工作,使作者决定采取一种更具雄心的方法,试图满足多层次的需求.

本书的目的是把概率论作为一个完整的数学主题来严格地处理,避免用非数学的概念.同时,本书也企图描写经验背景和加强对各种实际应用的认识.为了后一目的,我们在书的正文之中插进许多特殊问题、数值估计和大量的例子.这些题材在排版方面都有清楚的标记,处理时多用形象的语言,少用形式的推导.本书汇集了一些特殊的专题,这是为了显示一般方法的效力,而且使本书对各个领域的专家们更有用处.为了阅读方便,除正文之外所穿插的章节都用星号“*”标出.对于阅读其他章节,并不需要预先了解标有星号章节的内容.

本书注重方法上的统一,并在这一方面作了认真的努力.概率论专家会在书中发现,许多原有的证明被简化了,出现了一些新的结果.特别是,为了本书的目的,书中发展了再现事件的理论.这个理论导出了一个对马尔可夫链的新的处理方法,即使对于有限情况的马尔可夫链都有简化的效果.

本书除了大量例子外,还附着着大约 340 个习题,基本都给出了完整的解答.有些是简单的练习题,但是大多数都可以作为正文的说明和补充材料.例题和习题的目的之一,是为了提高读者的直观能力,培养他们提出及解决概率问题的技巧.在前面所讨论的几个例题表明:一个显然很难的问题,一旦有了自然的提法,并且在合适的地方来讨论,就变得十分容易了.

在概率论的教学上有一种倾向:把概率问题尽快地转化为纯粹的分析问题,而忘却概率论本身的特殊性质.这种处理方法通常一开始引进随机变量的概念时不下严格定义.本书走向另一个极端,始终抓紧样本空间的概念.没有样本空间的概念,随机变量就只能是一种生硬的造作.

为了使真实的背景不为可测性问题和其他纯粹分析的困难所掩饰,本卷中只限于对离散样本空间进行讨论.这是一个很大的限制,但是会受到非数学背景的读者的欢迎.采用这个办法,我们能够收进一些特殊的、在一般文献中不易找到的专题.同时,这个办法能够让我们既能从初等的方法入手,又能对于像随机徘徊和马尔可夫链那样高等的专题做出相当详尽的处理.至于随机变量和分布的一般理论、极限定理、扩散理论等,我准备放在下一卷里去讨论.

没有海军研究室的支持,本书无法写成.这种支持带来的结果之一,是我与杜布

先生的频繁联络，他给我的批评与鼓励是无价的。我深深地谢谢他。其次我要感谢瑞典丹先生的帮助，他先后看了我两次修改稿。我妻子看了我的手稿和校样，无数次改正其中的错误，提出改进意见。

作者感谢钟开莱、冬斯克和戈德堡，他们审阅了手稿，纠正了不少错误，戈德堡还为大部分习题准备了解答。最后，感谢霍伦巴克小姐的耐心与专业的打字帮助，谢谢伊利亚什、霍夫曼、金尼等人帮助校对。

威廉·费勒

1950 年 1 月于康奈尔大学

关于使用此书的提示

本书中的讲解包含了许多内容，顺序并不总是由易到难的。本书的开始也有相对技术性较强的小节，而第 15 章和第 17 章有一些简单的小节。经验不足的读者在初读时不要试图从多个方面介入，以免只见树木不见森林。有些章会有引导性的附注，某些节标题前会加星号（*），这是为了方便读者阅读并进行内容取舍，没有标星号的节自成体系，标有星号的内容可以先略去不读。

概率的基本概念的引入在第 1 章、第 5 章、第 6 章和第 9 章。如果可能的话，初学者应该先尽可能专心把这些基本概念弄清。第 2 章是为提高学生的技巧和形成概率直观概念而安排的。这章中的某些经验是值得掌握的，但并不需要系统掌握全章内容。在后面出现适当场合时，再回到初等直观想象更加有益。为了初步引进连续分布的初等理论，要求有一个补充来说明。（第 2 卷中较初等的几章提供了合适的内容。）

若把母函数视为较一般算子的特例，第 9 章可以直接过渡到第 11 章。第 11 章应该接着讨论第 13 章（常返事件）或第 12 章（链反应，无穷可分分布）的某些应用的后续。学习下述方向的读者可以不需要学习母函数：极限定理和起伏理论（第 8 章、第 10 章和第 3 章）、随机过程（第 17 章）、随机徘徊（第 3 章和第 14 章的主要部分）。这些章几乎是彼此独立的。第 15 章中的马尔可夫链在概念上依赖于常返事件，但是，如果读者能接受不加证明的基本遍历定理，亦可独立学习。

第 3 章是独立的。它的内容本身极富吸引力。而且这一章因其新见地和新方法在概率论中又极富说明性。其中关于扔硬币的起伏问题的结果表明：在过广的层面上相信大数定律会招致错误，它们是如此地奇怪和如此地违背一般直觉，甚至使老练的同事都怀疑硬币实际上是按理论预测的结果来弄假的。3.6 节中有一个模拟实验的记录。这一章虽然仅仅处理了一类简单的扔硬币的博弈，但其结果是有代表性的，对一般的公平博弈都适用。

符号“►”表示一个证明或一族例子的结束。

最后，希望书后丰富的索引能有助于加强本书各部分之间的联系。

版 权 声 明

All Rights Reserved. This translation published under license. Authorized translation from the English edition, entitled *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol 1, 3rd Edition*, by William Feller, ISBN 0-471-25708-7, published by John Wiley & Sons. No part of this book may be reproduced in any form without the written permission of the original copyrights holder.

Simplified Chinese translation edition published by POSTS & TELECOM PRESS
Copyright 2014.

本书简体中文版由 John Wiley & Sons, Inc. 授权人民邮电出版社独家出版。
本书封底贴有 John Wiley & Sons, Inc. 激光防伪标签, 无标签者不得销售。
版权所有, 侵权必究。

目 录

第 0 章 绪论 概率论的性质	1	3.2 随机徘徊的基本记号 及概念	56
0.1 背景	1	3.3 主要引理	59
0.2 方法和步骤	2	3.4 末次访问与长领先	60
0.3 “统计” 概率	3	* 3.5 符号变换	64
0.4 摘要	4	3.6 一个实验的说明	66
0.5 历史小记	4	3.7 最大和初过	68
第 1 章 样本空间	6	3.8 对偶性 · 最大的位置	71
1.1 经验背景	6	3.9 一个等分布定理	73
1.2 例子	7	3.10 习题	74
1.3 样本空间 · 事件	11	* 第 4 章 事件的组合	76
1.4 事件之间的关系	12	4.1 事件之并	76
1.5 离散样本空间	14	4.2 在古典占位问题中 的应用	78
1.6 离散样本空间中的 概率预备知识	15	4.3 N 个事件中实现 m 件	81
1.7 基本定义和规则	17	4.4 在相合与猜测问题中的 应用	82
1.8 习题	19	4.5 杂录	84
第 2 章 组合分析概要	21	4.6 习题	85
2.1 预备知识	21	第 5 章 条件概率 · 随机独立性	88
2.2 有序样本	22	5.1 条件概率	88
2.3 例子	24	5.2 用条件概率所定义的 概率 · 罐子模型	91
2.4 子总体和分划	26	5.3 随机独立性	95
* 2.5 在占位问题中的应用	29	5.4 乘积空间 · 独立试验	98
2.6 超几何分布	34	* 5.5 在遗传学中的应用	101
2.7 等待时间的例子	37	* 5.6 伴性性状	104
2.8 二项式系数	39	* 5.7 选择	106
2.9 斯特林公式	40	5.8 习题	107
2.10 习题和例子	42	第 6 章 二项分布与泊松分布	112
2.11 问题和理论性的附录	45	6.1 伯努利试验序列	112
2.12 二项式系数的一些问题 和恒等式	48	6.2 二项分布	113
* 第 3 章 扔硬币的起伏问题和 随机徘徊	52	6.3 中心项及尾项	115
3.1 一般讨论及反射原理	52		

6.4 大数定律	116	10.3 “公平” 博弈论	191
6.5 泊松逼近	117	* 10.4 彼得堡博弈	193
6.6 泊松分布	120	10.5 不同分布的情况	194
6.7 符合泊松分布的观察结果 ...	122	* 10.6 在组合分析中的应用	197
6.8 等待时间 · 负二项分布	125	* 10.7 强大数定律	198
6.9 多项分布	128	10.8 习题	200
6.10 习题	129	第 11 章 取整数值的随机	
第 7 章 二项分布的正态逼近	133	变量 · 母函数	203
7.1 正态分布	133	11.1 概论	203
7.2 预备知识: 对称分布	136	11.2 卷积	204
7.3 棣莫弗-拉普拉斯		11.3 伯努利试验序列中的	
极限定理	139	等待时与均等	207
7.4 例子	142	11.4 部分分式展开	211
7.5 与泊松逼近的关系	145	11.5 二元母函数	214
* 7.6 大偏差	146	* 11.6 连续性定理	214
7.7 习题	147	11.7 习题	216
* 第 8 章 伯努利试验的		* 第 12 章 复合分布 · 分支过程 ...	220
无穷序列	150	12.1 随机个随机变量之和	220
8.1 试验的无穷序列	150	12.2 复合泊松分布	221
8.2 赌博的长策	152	12.3 分支过程的例子	225
8.3 波雷尔-坎特立引理	154	12.4 分支过程的灭绝概率	226
8.4 强大数定律	155	12.5 分支过程的总后代	228
8.5 迭对数法则	156	12.6 习题	230
8.6 用数论的语言解释	159	第 13 章 循环事件 · 更新理论 ...	232
8.7 习题	161	13.1 直观导引与例子	232
第 9 章 随机变量 · 期望值	163	13.2 定义	235
9.1 随机变量	163	13.3 基本关系	238
9.2 期望值	169	13.4 例子	239
9.3 例子及应用	171	13.5 迟延循环事件 · 一个一般性	
9.4 方差	174	极限定理	241
9.5 协方差 · 和的方差	176	13.6 ε 出现的次数	244
9.6 切比雪夫不等式	179	* 13.7 在成功连贯中的应用	246
* 9.7 科尔莫戈罗夫不等式	179	* 13.8 更一般的样型	249
* 9.8 相关系数	181	13.9 几何等待时间的记忆缺损 ...	250
9.9 习题	182	13.10 更新理论	251
第 10 章 大数定律	187	* 13.11 基本极限定理的证明	255
10.1 同分布的随机变量列	187	13.12 习题	258
* 10.2 大数定律的证明	189	第 14 章 随机徘徊与破产问题 ...	261

14.1 一般讨论	261	15.14 习题	320
14.2 古典破产问题	262	* 第 16 章 有限马尔可夫链的	
14.3 博弈持续时间的期望值	265	代数处理	324
* 14.4 博弈持续时间和初过时		16.1 一般理论	324
的母函数	266	16.2 例子	327
* 14.5 显式表达式	268	16.3 具有反射壁的随机徘徊	329
* 14.6 与扩散过程的关系	270	16.4 暂留状态·吸收概率	331
* 14.7 平面和空间中的随机徘徊 ..	274	16.5 在循环时间中的应用	335
* 14.8 广义一维随机徘徊		第 17 章 最简单的依时的	
(序贯抽样)	276	随机过程	337
14.9 习题	279	17.1 一般概念·马尔可夫过程	337
第 15 章 马尔可夫链	283	17.2 泊松过程	338
15.1 定义	283	17.3 纯生过程	340
15.2 直观例子	285	* 17.4 发散的生过程	342
15.3 高阶转移概率	290	17.5 生灭过程	344
15.4 闭包与闭集	292	17.6 指数持续时间	346
15.5 状态的分类	294	17.7 等待队列与服务问题	348
15.6 不可约链·分解	296	17.8 倒退(向后)方程	354
15.7 不变分布	298	17.9 一般过程	355
15.8 暂留链	303	17.10 习题	361
* 15.9 周期链	306	习题解答	365
15.10 在洗牌中的应用	308	参考文献	379
* 15.11 不变测度·比率极限定理 ..	309	索引	387
* 15.12 逆链·边界	313	人名对照表	392
15.13 一般的马尔可夫过程	317		

第 0 章 绪论 概率论的性质

0.1 背 景

概率论是一门数学学科，它与几何学或分析力学等学科有很相似的目标。对每一门学科我们都必须仔细地去区分理论的三个方面：(a)形式逻辑的内容；(b)直观的背景；(c)应用。不按这三方面之间的固有关系去考虑这三方面，就不能正确估计其全部结构的特性和优点。

1. 形式逻辑的内容

公理化的数学只论及某些无定义的事物之间的关系。这一点可以用下国际象棋来作很好的说明。要想描述国际象棋，只能陈述一组下棋规则，不可能给象棋下一个“定义”。尽管可以描写一下棋子的通常的形式，但仅凭对棋子本身形状的描述不一定能清楚地说明哪个棋子是王。虽然棋盘和棋子是有用的，但没有它们仍然可以下棋。重要的事情在于了解棋子的走法与作用，也就是要了解一组棋规。要问国际象棋中的一个“兵”或“王”的“定义”或“精确的本性”是什么，这是没有意义的。与此类似，在几何学中我们也不去过问点和直线到底是什么。点和直线是无定义的概念，而几何公理规定它们之间的一些关系，例如，两点确定一条直线等等。这些就是规则，没人提出异议。我们可以改变公理系统而去研究不同形式的几何，而且各种非欧几何的逻辑结构不依赖它们与现实的关系。物理学家就曾研究过在不同于牛顿的万有引力定律时物体如何运动。即使牛顿的万有引力定律是正确的，这种研究也是有意义的。

2. 直观的背景

与国际象棋不同，几何学和力学的公理反映了客观存在着的直观背景。事实上，几何的直观性是如此之强，它常常会跑在逻辑推理的前面。逻辑、直观与实际经验三者之间的相互依赖性达到怎样的高度，这个问题我们不需要去讨论。当然，人们的直观能力是可以锻炼和发展的。例如，下棋时，初学者总是小心翼翼，走棋时还要想一想下棋的规则；但是有经验的棋手在一瞥之间就能掌握复杂的情况，他的直觉往往不能用理由来解释。同样，数学直觉随着经验增加而增加，人们有可能对于一些概念例如四维空间发展一种自然感觉。

甚至人类的集体直观能力也在进步着。牛顿的力场概念、超距作用的概念、麦克斯韦关于电磁波的概念，起初都被认为是“不能想象的”和“违反直观的”。现代技

术和媒体、通信的普及，使得这些概念成为一些通常的语汇。同样，现在的学生不会体会到，当概率论还在萌芽的时候，它与某些思维方式、偏见及其他困难的斗争是多么艰苦卓绝。现在，报纸报导着民意测验的样本，统计的影响已经渗透到生活的各个方面，年青的女孩们也会从统计数字中查看自己结婚的可能性。于是对于“这个事件的机会是五分之三”这样的陈述，人人都有了直观的感觉。这虽然是很模糊的，但此直观感觉足够作为概率论入门的指南和背景。随着理论的发展，以及人们接触到一些更为微妙的应用，这个直观能力还要得到进一步发展。

3. 应用

应用几何学和力学的概念时，要把它们与某些物理对象等同起来，但是这个结合过程非常灵活，且变化无常，不能给出普遍的法则来。刚体这个概念是基本的、有用的概念，虽然没有一个物理对象真正具备它的条件。哪些物体能当作刚体来处理，要视所处环境和所需要的近似度来决定。橡胶当然不是刚体，但是在讨论汽车在冰上运动的时候，许多教科书是把橡胶轮胎当作刚体来处理的。按照理论的目的，我们可以不管物质的原子结构，有时把太阳当作一个连续物质的大球来处理，有时又把它当作一个质点来处理。

在应用中，抽象的数学模型只是当作工具来使用的，而对同一实际场合可以采用不同的模型来描述。数学理论的应用方式不依赖于事先形成的意见，它是一个有目的的技术，依赖于经验，而且随着经验改变。这些技术的哲学分析是值得研究的，但它不属于数学、物理学或统计学范畴。因此，必须把关于概率基础的哲学从数学和统计学中分离出去，犹如关于直观空间概念的讨论，现在已经从几何学中分离出去一样。

0.2 方法和步骤

概率论的历史（一般数学史亦然）呈现出理论和应用的相互促进的现象：理论的进展开辟了应用的新领域，反过来每一个新的应用又产生出新的理论问题和富有成果的研究。目前概率论已应用到很多领域，而我们要求它具有一个普遍性理论的那种灵活性，以便对广泛的需求提供恰当的工具。因此我们必须反对下述企图（与趋向）：把其理论、术语及思想库建立得过分接近于某一特殊兴趣范围。我们所要做的绝非如此，而是要按照在几何学和力学中已经证明为十分成功的方式来发展出一种数学理论。

我们先从扔硬币和掷骰子等最简单的实验出发，在这些场合，所有的陈述都有着明显的直观意义。我们把这个直观性翻译成一个抽象的模型，然后把这个模型加以推广，使它能够适用于更复杂的场合。书中的实例是用来阐明几种模型的经验背景和启发读者的直观能力的，但理论本身还是数学性质的。我们不拟力求解释概率的“真正