(O-5306.01)

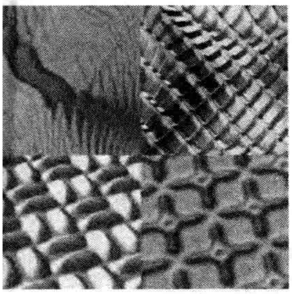
www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-038876-6

科学数理分社
电　话：(010) 64033664
E-mail：math-phy@mail.sciencep.com
网　址：http://www.math-phy.cn

上架建议：科普

定 价：59.00 元



丛书主编：赵焕光

文化数学欣赏丛书 -2

人生相遇函数

赵焕光　黄忠裕　著

科学出版社

内 容 简 介

本书从数学学科的特色、人文欣赏的视野着手，运用通俗的语言、生动的例子介绍函数的数学文化内涵及其函数知识在现实世界中的广泛应用. 主要内容包括函数概念与函数图像常识及其美学欣赏、相遇比例函数、相遇增长函数、相遇周期函数的数学文化内涵欣赏及其实际应用.

本书可作为高等院校所有专业的本(专)科生、硕士生、中学数学智优生、中学数学教师、具有一定数学基础知识的高校教师及其行政管理人员的数学文化修养提高读本，也可作为数学师范本科、数学教育硕士、重点中学校本课程的选修课教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

人生相遇函数/赵焕光，黄忠裕著. —北京：科学出版社，2013.10
(文化数学欣赏丛书；2)
ISBN 978-7-03-038876-6
Ⅰ. ①人… Ⅱ. ①赵… ②黄… Ⅲ. ①函数–普及读物 Ⅳ. ①O174-49
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 243974 号

责任编辑：王丽平／责任校对：刘亚琦
责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 10 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2013 年 10 月第一次印刷 印张：15
字数：300 000

定价：59.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

本书获得浙江省温州人经济研究中心、
温州大学社科联资助

前　言

我国著名学者梁漱溟先生 (1893~1988) 曾说过 “人的一生要处理好三个关系: 人与物的关系, 人与人的关系, 人与心的关系”. 由此可见, 人的一生要跟各种各样的关系打交道. 函数正是研究一种变量对另一种变量的相依关系的数学工具, 明确关系是函数的永恒话题. 法国数学家、物理学家拉格朗日 (Lagrange, 1736~1813) 曾经说: “死亡是我最后遇到的一只函数.” 这就是说, 函数伴随着他的一生. 其实, 函数概念也始终伴随着我们每个人的一生, 每个人毕生探索的课题就是形成自己的函数概念并用好函数概念. 因此, 把人生与函数联系起来进行数学文化内涵考察是颇有趣味的事情.

人的精神生命与文化教育共存亡, 数学教育是文化教育不可或缺的重要组成部分. 德国数学家 F· 克莱因 (C. F. Klein, 1849~1925) 在领导第一波国际数学教育改革运动时, 曾主张函数概念应该成为数学教育的灵魂, 并建议 “以函数概念为中心, 将全部数学教材集中在它的周围, 进行充分的综合”. 时至今日, 函数概念及其函数思想始终是一条贯穿中学数学及其大学数学基础课的主脉络. 日本著名数学史与数学教育家小仓金之助 (1885~1962) 曾经说: “数学教育的意义在于开发科学的精神. 数学教育的核心是函数概念的形成.” 由此可见, 函数概念在数学教育中占有举足轻重的地位.

从人文修养提高的视野看, 函数概念的形成与发展是人类精神世界的智慧结晶. 函数概念中蕴涵着 “变化与不变”“运动与静止”“局部与整体”“独立与联系” 等众多对立统一的辩证思想. 因此, 函数概念在发展人的辩证思维能力方面及提高人的整体素质方面有巨大的潜在精神价值. 形成函数观念的人, 对于在客观世界中存在的数量对应关系会有一种特殊的敏感性, 会经常联想到利用一种数量集合去刻画另一种集合. 于是, 他 (她) 就会经常自觉或不自觉地寻找数量化的方法, 试图数量化、定量化地描述客观世界. 这样, 他 (她) 就表现为具有数量感极强的人, 而数量感正是现代公民最可贵的思维品质之一.

“学以致用”, 学习函数要关注函数的实际应用是天经地义的事情. 大家明白, 数学的实际意义在数学之外, 数学的生命力在于用数学做什么. 如果看不到数学与当代生活的联系, 那么人们就会失去学习与研究数学的动力, 学习函数当然不能例外. 在日常生活中, 大家都会直接或间接地运用函数概念. 当然, 不同类型的人运用函

数概念的侧重点是有所不同的, 如政府决策者通常需要运用宏观的函数概念从整体上把握全局, 而个体经营者则需要用微观的函数概念“斤斤计较”地种好自己的“一亩三分地”! 学者们运用函数概念的着眼点有时候也是不相同的, 如数学家们往往强调“对应法则”, 即注重过程; 而物理学家们则更多关注的是结果, 在他们的心目中发现有实验支持的结果比起如何得到结果更为重要, 只有当“对应法则”对结果的定性分析研究非常有用时, 才被他们乐意接受. 然而, 太强调急功近利的“用”将会舍本求末, 学习函数万万不可忽视函数文化的育人功能及其美学欣赏功能. 如果忽略其中任何一个功能, 那么人们学习函数的热情将会无法维持. 让函数走进日常生活, 让人文丰富函数内涵. 如果我们带着一颗欣赏函数文化的心、漫步在奇妙无比的函数百花园中、感受博大精深的函数文化内涵、领悟函数人生的真谛, 那么我们的内心就会变得无比充盈, 我们的人生也会因此而丰富多彩.

全书分 4 章. 第 1 章为函数概念与函数图像常识, 主要内容包括函数概念产生的文化背景及其发展演变历程、函数概念科学价值探究及其美学欣赏、函数图像常识及美学欣赏; 第 2 章为相遇比例函数, 主要内容包括正反比例函数的数学文化内涵、正反比例函数在物理学中的应用、正比例函数的成长、一次函数的数学文化内涵、一次函数的不变量及其应用、二次函数的数学文化内涵、二次方函数的成长及其应用; 第 3 章为相遇增长函数, 主要内容包括单调函数常识、指数函数、对数函数与幂函数的数学文化内涵及其实际应用; 第 4 章为相遇周期函数, 主要内容包括三角学基础及其应用、三角函数与周期函数的数学文化内涵及其实际应用. 函数话题容纳百川, 我们没有能力面面俱到, 但求有自己的独特见解; 我们不追求百分之百的正确, 但求能给他人少许启迪; 我们不指望阅读者能从本书中获得多大收益, 但求能拓展他们的思考空间.

本书写作的思路与框架由我与黄忠裕共同讨论形成, 初稿由我提供, 黄忠裕提供与函数文化有关的若干素材并参与修改及其定稿工作. 本书在写作过程中参阅了大量文献及其网络资料, 在此向被本书引用的参考文献作者表示衷心的感谢. 本书在修改过程中得到温州大学王佑镁教授、韦文生教授及其温州大学数学学院方均斌副教授、应裕林副教授、章勤琼博士等同仁的帮助; 吾妻钱亦青在书稿打印及文献查阅中付出巨大的努力. 本书得到浙江省重点学科应用数学、浙江省省级教学团队数学课程与教学论团队、温州大学优势专业数学与应用数学、温州大学重点教材基金等资助, 在此一并表示感谢!

赵焕光

2013 年 5 月

目 录

第 1 章

函数概念与函数图像常识

常识是最基础、最普通, 进而也是最容易被人接受的知识. 常识就像大厦的地基, 地基不牢靠, 不管大厦有多雄伟, 终究是空中楼阁. 我们这个时代需要太多的常识回归, 无论是学术、工作还是生活的. 单向度的经济追求使得我们的社会 (包括个人) 迷失了前进的方向; “高、精、尖” 的追求使得学科所隐含的关于人生智慧的常识往往被我们忽略与忘记. 因此, 欲把人生与函数联系起来进行数学文化内涵考察, 我们得从了解函数概念与函数图像的常识着手.

1.1 函数概念产生的文化背景及其发展演变历程

法国数学家庞加莱 (Poincaré, 1854~1912) 有诗云: “源头茫昧虽难觅, 活水奔流喜不休.” 探索函数概念产生的文化背景、追忆函数概念的历史演变及其发展进程, 可以让我们的灵魂回归到那激动人心的岁月, 进而冲刷掉我们当下缺乏激情的内心空虚和惆怅.

1.1.1 函数概念产生的文化背景

函数概念的产生与变量有关, 变量又与运动和变化有关. 大家明白, 在客观世界中, 变化是常态, 不变是特例. 我们的周边世界, 无论是自然界还是人类社会总在不断发展并不断变化着. 毫不夸张地说, 变化无处不在. 就以人体身高为例, 每个成年人身高早上要比晚上高, 这是因为早晨的时候, 由于休息, 人的肌肉充实了, 关节处舒展了; 到了晚上, 由于白天的活动而积累下来的疲劳必然使肌肉弹性削弱、关节压缩, 因而人体就比早晨矮些. 当然, 用肉眼是不容易看出这微小的身高变化的, 但是可以用比较精确的仪器测量出来. 只要善于仔细观察、善于用心认真思考, 我们随时随地都可以发现各种各样的变化现象: 国民生产总值在不断变化; 经济社会的就业率与失业率在不断变化; 股票市场的股票价格一直在波动; 城市中的高楼

大厦逐年增多; 大量的工业和生活用水使地下水逐年减少; 大气中的污染物逐年增加; 适宜人类居住与耕种的土地逐年减少; 生活在地球上的人类总数每一瞬间都在增加; 地球平均温度随着它离太阳的距离的周期性变化也周期性变化着; 河流泥沙的沉淀使得陆地在河流的入海口向大海延伸; 风雨的力量使一些古老的山脉高度逐渐降低, 而地壳内部的变化又使得另一些山脉在长高; 行星相对于太阳的位置或人造卫星相对于地球的位置一直在不断变化 …… 总而言之, 任何事物都在变化着, 而且变化始终是具有相对性: 运动是相对于空间的变化, 生命是相对于时间的变化, 发电是相对于能量形式的变化 …… 人们探索事物的变化规律及其各种变化之间的相互关系需要用到函数概念.

然而, 在那遥远的古希腊, 赫赫有名的思想家赫拉克利特 (Heraclitus, 约公元前 530~前 470) 认为: "世界永远在不断变化, 根本不存在相对静止的事物." 他有一句留传至今的名言 "人不能两次走进同一条河流". 在同一个时代, 赫拉克利特的伟大对手巴门尼德 (Parmenides) 则认为: "世界是静止的、永恒的, 变化与运动只是幻觉." 这两种截然不同的对立观点深深地影响着后世的哲学家与数学家. 古希腊思想的集大成者亚里士多德 (Aristotle, 公元前 384~前 322) 认为: "数学的研究对象是静止的东西, 是事物不变的属性." 受亚里士多德的影响, 历经一千多年, 数学家们始终是回避研究事物的运动和变化. 可是随着时间的流逝, 不变和静止的数学开始落后了, 取代不变和静止的数学的是变化和运动的数学, 而且变化和运动的数学一跃而后来居上, 其原因是这种新型数学符合新时代的要求.

长时期的封建制度把欧洲分隔成许多小国家, 每个国家划分为若干个省, 每个省又划分为若干个县. 那个时期的政治经济活动实行闭关自守的政策, 任何一点点开放的活动都是非常困难的. 从 14 世纪开始, 商品开始出现于社会生活中, 于是产生了使闭关自守这道墙崩塌的外部条件. 商品就像个体身体很小但群体力量巨大的蚂蚁群一样, 从村庄到村庄, 从城市到城市, 迅速地发展起来. 为了制造商品就兴办了新型工业, 为了交换商品则诞生了商品交易市场, 为了运输商品又促使陆地和海上的交通随之蓬勃发展起来. 此时, 工厂的工人和商人们的身价顿时倍增. 如果大家认为工人和商人们从此就可以安安稳稳地从事能赚大钱的职业, 那么就大错特错了. 长期的封建社会构筑起来的封建制度这座根深蒂固的堡垒, 仍然继续维护其自身的既得利益而阻挡着新生事物的前进道路. 于是, 新生势力与守旧势力就发生了冲突, 并且这种冲突屡屡变成白热化的战争. 战争需要配制火药、制造大炮. 为了配制火药促使化学必须有新的发展; 为了计算炮弹的弹道则促使物理学与数学必须有新的突破.

此外, 为了开发新的原料产地和商品市场, 就商人而言, 欧洲的舞台已经显得过于狭小. 正因为如此, 意大利航海家哥伦布 (Cristoforo Colombo, 1451 ~ 1506) 在西班牙国王支持下, 带领商船队从地中海出发驶往大西洋和印度洋去开拓新市场.

商船队经过地中海由一个岛屿绕过一个岛屿航行的时候, 必须有新的航海技术. 在漫无边际的大海中航行, 有时候连一个岛屿的影子也看不见, 只能凭借太阳、月亮和星星这些来自遥远天空的物体来决定船队所在的位置, 因此需要精确地知道太阳和月亮的运动, 因而创造了新的天文学, 天文学的发展又需要新的数学.

综上所述, 正是实践的需要促使自然科学各门学科及其数学转向对运动的研究, 转向对各种变化过程和各种变化着的量的依赖关系的研究. 正是这种转向, 迎来了近代科学诞生和大发展的黄金时期; 也正是这种转向, 才促使函数概念产生. 正是函数概念的产生, 才使得数学由研究状态进入研究过程, 这是数学发展史上的辉煌成就之一.

1.1.2 函数概念的演变历程

人们常用"女大十八变"解释女子在发育成长过程中, 其容貌与性格等发生重大变化的状况. 其实, 用这个比喻解释函数概念演变的历史及其发展概况也非常贴切. 数学发展史告诉我们, 函数概念自从诞生以来, 经历了一次又一次的抽象, 才使其不断地完善成如今的完美形式.

1. 函数概念的萌芽及最初的函数定义

意大利科学家伽利略 (Galileo, 1564 ~ 1642) 强烈反对那种"不变才是高贵、完全的科学"的顽固观点, 他为创立近代力学而著的《两门新科学》(1638 年) 书中写道: "对于把形成不生不灭、不变化的宇宙的自然界物体看成非常高贵和完整, 相反地却把有生有灭、易变化的事物视作不完整, 我甚感吃惊, 并从理智上反对这种谬误 …… 那些高度评价不消灭性、不变性的人们, 就是因为想长生不老和害怕死去, 所以才吹捧不消灭性、不变化性, 然而他们却没有想到如果人能够长生不老, 那么就不可能从天堂来到人间."

《两门新科学》几乎从头至尾都包含着函数这个概念, 不过伽利略是用文字和比例的语言表达函数关系的. 例如, 在讲到运动时, 他说: "从静止状态开始以定常加速度下降的物体, 其经过的距离, 与所用时间的平方成正比." 用现代的术语来表述, 伽利略在这里给出了函数 $S = gt^2/2$. 因此, 人们把伽利略归在创立函数概念的先驱行列是很合理的.

法国数学家笛卡儿 (Descartes Rene, 1596 ~ 1650) 把变量引入数学, 创立解析几何, 对函数概念的发展起着举足轻重的作用. 实际上, 他在 1637 年出版的《几何学》中引入坐标系, 并没有使用"变量"这个词, 而称为"未知和未定的量". 然而, 他注意到平面上点的坐标 (x, y) 中的 y 依赖于 x 变化, 却孕育着函数概念的萌芽以及函数用图形表示的思想. 恩格斯在《自然辩证法》中对其作了高度评价, 他说:

"数学中的转折点是笛卡儿的变数. 有了变数, 运动进入了数学; 有了变数, 辩

证法进入了数学; 有了变数, 微分和积分也就立刻成为了必要, 而它们也能立刻产生了 ……"

英国大科学家牛顿 (Newton, 1642~1727) 研究微积分时 (1665 年) 一直用"流数"这个词表示函数思想, 并运用"无穷小"的分析方法对函数的性质进行研究, 但在他那里并没有清晰的函数概念.

"函数"这个词, 由德国大学者莱布尼茨 (Leibniz, 1646~1716) 首先引进. 他在 1673 年的一篇手稿中, 用"function"一词表示:"曲线上点的横坐标、纵坐标、切线长、垂线长等随着曲线上点的变动而变动的几何量."莱布尼茨这里的函数概念是建立在几何基础之上的, 因此被后人称为"函数概念的几何学起源". 其实, 这也是函数的图像表示法之源头. 他在 1692 年的一篇论文中又用函数一词表示 x 的幂 (即 $x, x^2, x^3, \cdots$), 把幂与函数看成同义语, 这又可以看成"函数概念的解析学起源". 其后, 他又用"函数"表示"依赖于一个变量的量". 现在, 人们一般把莱布尼茨引用的函数概念的最初形式看成函数的最初定义.

2. 函数概念解析说

微积分的发展促使函数概念用解析表达式 (即联系两个变量之间关系的数学算式) 表示. 数学家们把函数从几何约束中解放出来, 是函数概念的第一次重大演变. 1694 年, 瑞士数学家约翰 · 伯努利 (Bernoulli John, 1667~1748) 首先给出"解析说函数概念"的雏形:"一个变量的函数是指由这个变量和常量以一定方式构成的一种量."他的意思是凡是变量 x 和常量构成的式子都称为 x 的函数, 并强调函数要用公式来表示.

约翰 · 伯努利的学生、数学王子、瑞士数学家欧拉 (Euler, 1707~1783) 对函数概念作了更深入的研究和界定. 自 1748 年到 1775 年, 他用了三种不同方式给函数下定义. 1748 年, 他在其著作《无穷小分析论》中对伯努利的定义作如下的修正:"一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何一种方式构成的解析表达式."

他这里所说的"解析表达式", 是指对变量及数通过算术运算、三角运算、指数运算与对数运算构成的数学式子. 后来他又利用几何曲线修改了自己提出的函数定义:"函数就是一条可以随意描绘的曲线."或者说函数就是:"在 xy 平面内任意画出的曲线所确定的 x 与 y 之间的关系."

关于函数符号 $f(x)$, 早在 1734 年, 欧拉发表的一篇文章中曾用 $f(x/(a+c))$ 表示 $x/(a+c)$ 的函数, 这是数学史上首次利用英语单词"function"的首个字母 f 当作函数符号, 一直沿用至今.

法国数学家拉格朗日在其著作《解析函数论》(1797 年) 中把欧拉定义中的"构成"换作"计算", 给出下述"函数概念解析说"定义:

"所谓一个或几个量的函数是指一个适用于计算的表达式, 这些量以任何方式

出现在表达式中.”

他在《函数计算教程》(1801 年) 中又用“运算组合”给出更加明确的“函数概念解析说”定义:“函数代表着要得到未知量的值而对已知量必须完成的那些不同运算, 未知量的值本质上只是计算的最终结果. 换言之, 函数是运算的一个组合.”

函数的解析说定义在 18 世纪曾经占有统治地位. 很显然, 函数的解析说定义是不完善的, 它把用图形、表格及其他方式给出的函数都排斥在外. 但这种定义方式并非一无是处, 毕竟“解析式”是具体可以看到的东西, 对帮助初学者理解函数概念是有益的. 实际上, 微积分要研究的大多数函数都是有解析式的. 此外, 利用函数解决实际问题, 需要建立函数模型, 只有找到数学解析式, 才能通过讨论和计算使得问题得以解决. 因此, 从数学教育的角度看, 我们不能忽视数学史上曾经出现过的函数的解析说定义所起的作用.

3. 函数概念变量依赖说

函数概念的第二次重大演变是用“运动与变化”的观点给函数下定义. 18 世纪中叶, 偏微分方程中的弦振动问题引起了人们关于函数概念的争论, 迫使数学家们引进使用更广泛的函数概念. 1775 年, 欧拉在他的《微分学》著作中给出“变量依赖说”的函数定义:“如果某些变量以如下方式依赖于另一些变量, 即当后者变化时, 前者也随之发生变化, 则称前一些变量是后一些变量的函数.”

欧拉这种定义函数的方式朴素地反映了函数概念中的辩证思想, 体现了从“自变”到“因变”的过程. 从“关注结果”转向“关注过程”, 这是数学发展史上的重大进步. 因此, 欧拉的这个函数定义被认为是科学函数概念的雏形. 美中不足的是在这个定义中,“依赖”与“随之变化”的含义, 从数学的角度看, 并非十分清晰.

法国数学家柯西 (Cauchy, 1789~1857)1823 年在《分析教程》中对欧拉的函数定义又稍作改进:

“在某些变量之间存在着这样的关系, 即给定了这些变量中一个变量的值, 就可以决定所有其他变量的值的时候, 人们通常想象这些量是用其中的一个来表达的, 这时最初的这个量就取名为自变量, 而由这自变量表示的其他量就叫做这个自变量的函数.”

按照柯西这个定义, 不管函数 $f(x)$ 是用一个解析式表示还是用多个解析式表示, 只要由自变量的一个值可以决定因变量的相应值, $f(x)$ 就是 x 的函数. 显然, 这个定义远比以往的函数概念更为一般, 而且孕育着现代“关系说函数概念”的思想源头. 我们从这个定义中还可以看到, 柯西没有区分单值函数与多值函数. 这样, 虽然多少会给函数概念使用上带来不便, 然而它却蕴藏着多值函数与集值映照概念的思想源头.

函数概念的“因变量”与“自变量”之说正是欧拉与柯西那个时代的产物.

4. 函数概念变量对应说

函数概念的本质是变量之间的对应关系 (规律), 只有突出对应关系在函数定义中的地位, 才能真正把握函数概念. 利用变量的 "对应关系" 给函数下定义, 摆脱了解析式 (数学表达式) 对函数概念的约束, 这是函数概念的第三次重大演变.

德国数学家狄利克雷 (Dirichlet, 1805~1859) 在 1837 年给出了至今还常用的 "变量对应说" 定义: "如果对于给定区间上的每个 x 的值, y 总有完全确定的值与之对应, 那么 y 就叫做 x 的函数."

进一步, 他还指出, 在整个区间上 y 是否按照一种或多种关系依赖于 x, 或者 y 依赖于 x 是否可用数学运算式来表达, 都是无关紧要的. 他还特地构造了一个既无法用图像描绘也无法用数学运算式表示的函数, 后人用他的名字命名对此加以说明.

1851 年, 德国数学家黎曼 (Riemann, 1826~1866) 把以上函数定义中的 "完全确定的值" 改为 "唯一的一个值", 给出下述更加明确的 "变量对应说" 定义:

"我们假定 Z 是一个变量, 它可以逐次取所有可能的实数值. 若对于它的每一个值, 都有未定量 W 的唯一的一个值与之对应, 则称 W 为 Z 的函数."

用现代的眼光看, 黎曼的函数定义中的语句 "它可以逐次取所有可能的实数值" 是完全多余的. 但在黎曼那个时代, 数学家们普遍认为黎曼的函数定义已经足够清晰和完美, 因此被数学家们欣然接受.

其实, "完美" 在任何场合都是相对的. 大家仔细回顾一下, 从伯努利的函数定义一直到黎曼的函数定义, 都要涉及变量. 但在集合论没有创建之前, 变量的含义是不清晰的. 一般认为, 变量就是指某一个过程中变化的量 (或者说可以取不同数值的量), 保持不变的量称为不变量或常量.

自从德国数学家康托尔 (Cantor, 1845~1918) 在 19 世纪末创建集合论以后, 美国数学家维布伦 (O. Veblen, 1880~1960) 首先重新定义了变量与常量:

"所谓变量, 是代表某集合中任意一个 '元素' 的记号, 由变量所表示的任一元素, 称为该变量的值. 变量 x 代表的 '元素' 的集合为该变量的变域, 而常量是上述集合中只包含一个 '元素' 情况下的特殊变量."

在此基础上, 维布伦给出下述近代 "变量对应说" 定义:

"若在变量 y 的集合与变量 x 的集合之间有这样的对应关系: 对 x 的每一个值, 有完全确定的 y 值与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数."

上述 "变量对应说" 的函数定义中, 虽然突出了 "对应关系" 的地位, 但仍然是用 "变量" 定义函数, 而没有用 "对应规律" 定义函数. 德国数学家戴德金 (Dedekind, 1831~1916) 在 1887 年由 "对应" 给出 "映射" 的定义:

系统 S 上的一个映射蕴涵了一种规则, 按照这种规则, S 中每一个确定的元素 s 都对应着一个确定的对象, 它被称为 s 的映象, 记作 $\Phi(s)$. 我们也可以说, $\Phi(s)$

对应于元素 s, $\Phi(s)$ 由映射 Φ 作用于 s 而产生或导出; s 经映射 Φ 变换成 $\Phi(s)$.

黎曼等的 "函数概念对应说" 定义与戴德金的映射定义结合在一起演变出目前我国高中数学教材中普遍使用的 "函数概念对应关系说" 的现代定义:

设 A, B 为两个非空集合, 如果按某个确定的对应关系, 对于集合 A 中每一元素 x, 总有集合 B 中唯一确定的元素 y 与之对应, 那么这个对应关系就叫做一个映射. 当 A, B 为非空数集时, 这样的映射就称为函数.

利用集合之间的 "对应关系" 给函数下定义, 摆脱了 "变量" 对函数概念的约束, 使得函数概念的适用范围更为广泛. 因此, 可以把它看成函数概念的第四次重大演变.

5. 函数概念关系说

函数概念 "变量对应说" 定义中虽然突出了 "对应法则" 的地位, 但对应法则 f 是什么尚欠明确定义 (或者说回避交代), 因而显得含糊. 为了回避 "对应", 德国数学家豪斯多夫 (Hausdorff, 1868～1942) 在他的《集合论纲要》(1914 年) 用 "序偶" 来定义函数, 但 "序偶" 的含义又是不明确的. 波兰数学家库拉托夫斯基 (Kuratowsk, 1896～1980) 于 1921 年用集合概念定义 "序偶", 对豪斯多夫的定义加以完善. 在此基础上, 法国的布尔巴基学派对 "关系" 加以限制给出下述十分形式化的函数定义:

设 A 与 B 是给定的数集, f 是笛卡儿乘积集 $A\times B(=\{(x,y)|x\in A, y\in B\})$ 的一个子集 (也称 A 与 B 的一个关系). 如果对于任何 $x\in A$, 存在唯一的 $y\in B$, 使得 $(x,y)\in f$(等价于若 (x,y), $(x,z)\in f$, 则必有 $y=z$), 则称 f 是定义在 A 上, 取值在 B 中的函数.

"关系说" 函数定义是用集合论的语言, 即对笛卡儿乘积集加以适当限制再对函数下定义, 消除了 "变量""对应" 等含义模糊的用语, 因而是完全数学化的定义. 按照这一定义方式, 函数概念完全明确了. 所谓 "函数", 无非就是一张 "表", 借此表给出 x 的值, 可以知道相应的 y 的值. 这种定义方式的最大优越性, 还在于把 "几何" 与 "代数" 有机地统一起来, 定义中的 "f", 既可以看成对应法则, 也可以看成函数的图像 (而且适用于不同的坐标系). 进一步, 这种完全形式化的定义, 还便于为计算机所接受. 由此可见, 这种高度统一的形式化函数定义, 又可以看成函数概念的第五次重大演变.

然而, 函数的这种定义方式由于过于形式化, 抽去了函数关系生动的直观 (变化) 特征, 看不到直接的 "对应关系", 更加没有明显的解析式, 因此初学者难以掌握它. 也许正是基于这个理由, 目前中学数学教材中普遍不使用这种 "最现代化" 的函数定义方式.

1.1.3 函数概念的现代发展

纵观数学发展史, 正是伽利略、笛卡儿等伟大人物对运动与变化的研究催生了

函数思想, 并为函数概念的产生提供实际背景; 牛顿与莱布尼茨则用无穷小方法对函数的性质进行研究并创立微积分. 微积分诞生之后, 函数作为微积分的研究对象牢牢地占据着近代数学的中心地位. 进一步, 随着微积分的不断完善与发展, 函数概念又不断地得到改进与拓展, 并且逐渐精确化、科学化.

20 世纪, 函数概念又发生了重大变化. 首先是 "函数空间" 概念的出现, 人们不再孤立地看待每一个函数, 而是考虑各种类型的所有函数构成的种种函数空间, 并把函数作为自变量, 于是就出现 "函数的函数" 这种新概念. 1903 年, 法国数学家阿达马 (Hadamard, 1865 $\sim$ 1963) 首次提出 "泛函" 一词, 其后很快产生了一门研究泛函与算子性质及运算规律的泛函分析学科.

特别值得一提的是由德国大数学家希尔伯特 (David Hilbert, 1862 $\sim$ 1943) 设想出来的 "平方可和" 函数空间 L^2. 到目前为止, L^2 空间是结构最佳的函数空间, L^2 空间中的每个函数有长度, 两个函数之间不仅有距离而且有夹角. 几何学中的许多经典结果都可以在这个空间中得到反响, 甚至连最为著名的勾股定理也能在这个空间中找到一个完美的对应形式. L^2 空间理论在现代科学中有着广泛的应用, 当然, 在其他函数空间中, 并非所有的工作都进展得如此顺利. 如今, 函数研究所面临的问题往往不是要找出能用来解答某个问题的明确函数表达式, 而是要找到能安置问题的合适的函数空间, 即把定性问题 (存在性) 摆在定量问题之前. 诚如狄利克雷所言: "现代分析的一个越来越明显的趋势是用概念来代替计算".

至此, 数学家对函数概念的讨论并没有完结, 紧跟着又产生了广义函数概念. 1935 年, 俄罗斯数学家索伯列夫给出了第一个广义函数的严格定义, 建立起在研究现代偏微分方程中理论研究中有广泛应用的索伯列夫空间理论. 1945 年, 法国数学家施瓦兹 (Schwartz, 1915 $\sim$ 2002) 建立起更为完整的广义函数理论. 其后, 又出现了超广义函数以及比超广义函数更为一般的广义函数. 随着数学的发展, 函数概念还将得到不断丰富和扩张.

点滴感悟 回顾函数概念的发展演变历程, 对思考我们的人生, 也包括对数学教育的思考, 应该具有很大的借鉴意义. 任何人的心灵都是慢慢成长并不断完善的, 任何人在不同阶段都会犯这样或那样的错误, 我们绝不能用 "完善" 的尺度去衡量一个人. 尤其对教育工作者, 更需要我们对学生多一点期待、多一点关爱.

1.2 函数概念科学价值探究及其美学欣赏

1.2.1 函数概念科学价值探究

函数概念有何科学价值? 这是函数研究所面临的首要问题. 这里仅根据自己多年从事数学学习与教学的体会, 从函数概念的科学价值内涵理解的视角谈几点感性