

高职高专教材

经济应用数学

主编 李忠杰 陈宝华

中国石油大学出版社

高职高专教材

经济应用数学

主 编 李忠杰 陈宝华
副主编 王九福 赵卫卫 杜春雷

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学/李忠杰,陈宝华主编. —东营:
中国石油大学出版社, 2010. 9
ISBN 978-7-5636-3224-4

I. ①经… II. ①李… ②陈… III. ①经济数学—高
等学校:技术学校—教材 IV. ①F224. 0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 167669 号

书 名: 经济应用数学
主 编: 李忠杰 陈宝华
副 主 编: 王九福 赵卫卫 杜春雷

责任编辑: 魏 瑾(电话 0532—86981539)

出 版 者: 中国石油大学出版社(山东 东营 邮编 257061)
网 址: <http://www.uppbook.com.cn>
电子信箱: weichbs@163.com
印 刷 者: 青岛鑫胶印刷有限公司
发 行 者: 中国石油大学出版社(电话 0546—8392062)
开 本: 185×260 印张: 16.5 字数: 422 千字
版 次: 2010 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
定 价: 29.80 元

版权专有, 翻印必究。举报电话: 0546-8391810

本书封面覆有带中国石油大学出版社标志的激光防伪膜。

本书封面贴有带中国石油大学出版社标志的电码防伪标签, 无标签者不得销售。

前 言

为满足 21 世纪我国高职高专教育大力发展的需要,作为财经类专业重要公共基础课的高等数学,迫切需要一本具有高职高专财经类专业特色的高等数学教材。结合目前高职高专的特点,我们对高等数学在会计、经管类专业的应用进行了研究,提出了将高等数学相关知识与经济过程中的实际应用联系起来,提升学生学习高等数学的积极性和兴趣。为此,我们组织从事多年财经类高等数学教学和部分财经类专业课教学的教师编写了这本富有特色的教材,除了充分体现“以应用为目的,以必需够用为度”的编写原则外,本教材还有如下特点:

1. 定位准确,针对性强

解决了工科类、财经类专业使用同一本教材的问题。各章节内容的选择,突出了财经类专业的特点。除基本理论外,还加强了理论知识在专业中的应用。

2. 可读性、趣味性强

为适应高职教育培养实用型人才的需要,对理论的证明及理论性较强的内容做了适当的淡化处理,主要利用实例及图形加以直观说明,降低了学生掌握知识的难度。习题难易适中,有利于学生消化所学内容。每章后面配有知识结构图,便于学生系统掌握本章知识,全书可读性、趣味性强,有利于培养学生的学习兴趣。

3. 突出经济性和应用性

本教材最大一个特点是突出了经济性和应用性。紧密联系财经类专业的特点,补充和开发了一些与经济相联系的实例,突出了高等数学在经济方面的应用。

全书共分七章,包括极限与连续、导数和微分、导数的应用、不定积分、定积分、线性代数、概率论与数理统计初步。书后配有习题答案。全书总课时在 110 学时左右。

本书作为山东商务职业学院 2009 年教研课题立项的教研成果,由李忠杰、陈宝华任主编,王九福、赵卫卫、杜春雷任副主编,同时得到了高等数学教研室赵明才、范彩荣、姜晓、陈尔建、孙寿尧的支持和积极参与,提出了很多宝贵意见,在此表示感谢。

由于编者水平有限,书中不足和考虑不周之处肯定不少,错误也在所难免,期望得到专家、同行和读者的批评指正,使本书在教学实践中不断完善。

编 者

2010 年 9 月

目 录

第一章 极限与连续	1
第一节 初等函数	1
一、函数的有关概念(1) 二、反函数(3) 三、基本初等函数(4) 四、复合函数、初等函数(6) 五、建立函数关系举例(7) 习题 1-1(8)	
第二节 数列的极限	9
一、数列极限的定义(9) 二、数列极限的四则运算(10) 三、无穷递缩等比数列的求和公式(11) 习题 1-2(11)	
第三节 函数的极限	12
一、当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限(12) 二、当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限(13) 三、当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的左极限与右极限(13) 习题 1-3(14)	
第四节 极限的运算	15
习题 1-4(16)	
第五节 无穷小与无穷大	17
一、无穷小(17) 二、无穷大(17) 三、无穷小的比较(19) 习题 1-5(20)	
第六节 两个重要极限	20
一、极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (20) 二、极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (21) 习题 1-6(22)	
第七节 函数的连续性	23
一、函数连续性的概念(23) 二、函数的间断点(25) 三、初等函数的连续性(26) 四、闭区间上连续函数的性质(27) 习题 1-7(28)	
第八节 极限在经济工作中的应用	29
一、复利问题(29) 二、抵押贷款问题(30) 三、融资问题(31) 习题 1-8(31)	
本章知识结构	32
复习题一	32
第二章 导数和微分	35
第一节 导数的概念	35
一、问题的引入(35) 二、导数的定义(36) 三、导数的几何意义(38) 四、可导与连续的关系(38) 习题 2-1(39)	
第二节 函数的和、差、积、商的求导法则	39
习题 2-2(41)	
第三节 反函数与复合函数的导数	41
一、反函数的求导法则(41) 二、复合函数的求导法则(42) 习题 2-3(43)	
第四节 隐函数和参数方程所确定的函数的导数及初等函数的导数	44
一、隐函数的导数(44) 二、参数方程所确定的函数的导数(45) 三、初等函数的导	

数(46) 习题 2-4(47)	
第五节 高阶导数	47
一、高阶导数的概念(47) 二、二阶导数的力学意义(48) 习题 2-5(49)	
第六节 微分	49
一、微分的概念(49) 二、微分的几何意义(50) 三、微分公式及运算法则(50)	
四、微分的应用(52) 习题 2-6(54)	
本章知识结构	55
复习题二	55
第三章 导数的应用	57
第一节 微分中值定理	57
一、费马定理(57) 二、罗尔(Rolle)定理(57) 三、拉格朗日(Lagrange)中值定理(58) * 四、柯西中值定理(59) 习题 3-1(59)	
第二节 洛必达法则	60
一、未定式的洛必达法则(60) 二、其他类型的未定式(61) 习题 3-2(62)	
第三节 函数单调性的判定	63
一、定理(函数单调性的判别法)(63) 二、函数单调性的一般判定步骤(64)	
习题 3-3(65)	
第四节 函数的极值及求法	65
一、函数的极值(65) 二、函数极值的判定和求法(66) 习题 3-4(68)	
第五节 函数的最大值和最小值	68
一、闭区间上的连续函数最值的求法(69) 二、开区间内的可导函数最值的求法(69)	
三、实际问题中函数最值的求法(69) 习题 3-5(70)	
第六节 曲线的凹凸和拐点	71
一、曲线的凹凸性和判定法(71) 二、曲线凹凸性和拐点的一般求法(72)	
习题 3-6(73)	
第七节 函数图像的描绘	73
一、曲线的渐近线(74) 二、函数图像的描绘(74) 习题 3-7(77)	
第八节 导数在经济分析中的应用	77
一、边际分析(77) 二、经济学中常用的函数及其边际函数(77) 三、弹性分析(81)	
习题 3-8(83)	
本章知识结构	84
复习题三	84
第四章 不定积分	86
第一节 不定积分的概念	86
一、原函数(86) 二、不定积分(87) 三、不定积分的几何意义(88) 习题 4-1(88)	
第二节 积分的基本公式和法则、直接积分法	89
一、积分的基本公式(89) 二、积分的基本运算法则(89) 三、直接积分法(90)	
习题 4-2(91)	
第三节 换元积分法	92
一、第一类换元积分法(又称凑微分法)(92) 二、第二类换元积分法(95)	

习题 4-3(98)	
第四节 分部积分法	99
习题 4-4(101)	
第五节 不定积分在经济学中的应用	101
一、由边际成本求总成本函数(102) 二、由已知边际收入求总收入函数和需求函数(102) 习题 4-5(103)	
本章知识结构	104
复习题四	104
第五章 定积分	106
第一节 定积分的概念	106
一、举例(106) 二、定积分的定义(107) 三、定积分的几何意义(108)	
习题 5-1(109)	
第二节 定积分的性质	110
习题 5-2(112)	
第三节 牛顿—莱布尼茨公式	113
一、积分上限函数及其导数(113) 二、牛顿—莱布尼茨公式(114) 习题 5-3(116)	
第四节 定积分的换元法与分部积分法	116
一、定积分的换元法(116) 二、定积分的分部积分法(118) 习题 5-4(119)	
第五节 定积分的应用	120
一、平面图形的面积(120) 二、旋转体的体积(121) 三、经济应用举例(123)	
习题 5-5(125)	
* 第六节 广义积分	126
一、广义积分的概念(126) 二、广义积分的计算(127) 习题 5-6(128)	
本章知识结构	128
复习题五	129
第六章 线性代数	131
第一节 行列式	131
一、行列式的概念(131) 二、行列式的基本性质(135) 三、行列式的计算(137)	
四、克莱姆(Cramer)法则(138) 习题 6-1(140)	
第二节 矩阵的概念和运算	141
一、矩阵的概念(141) 二、矩阵的运算(144) 习题 6-2(146)	
第三节 矩阵的初等变换与矩阵的秩	147
一、矩阵的初等变换(147) 二、矩阵的秩(148) 习题 6-3(149)	
第四节 逆矩阵	150
一、逆矩阵的概念(150) 二、逆矩阵的性质(150) 三、逆矩阵的求法(150)	
习题 6-4(153)	
第五节 线性方程组	153
一、线性方程组的矩阵形式(153) 二、一般线性方程组的解的讨论(154) 三、齐次线性方程组解的讨论(157) 习题 6-5(158)	
第六节 线性规划	159

一、线性规划问题的数学模型(159)	二、线性规划问题的图解法(161)	三、单纯形法(164)	习题 6-6(171)
本章知识结构			172
复习题六			172
第七章 概率论与数理统计初步			175
第一节 随机事件			175
一、随机现象(175)	二、随机事件(176)	三、事件间的关系及其运算(177)	习题 7-1(178)
第二节 概率的定义			179
一、概率的统计定义(179)	二、概率的古典定义(180)	习题 7-2(182)	
第三节 概率的运算公式			182
一、概率的加法公式(183)	二、概率的乘法公式(184)	三、全概率公式(185)	四、事件的独立性(186)
习题 7-3(187)			
第四节 随机变量及其分布			187
一、随机变量的概念(188)	二、离散型随机变量的分布列(188)	三、连续型随机变量的密度函数(190)	四、几个重要的随机变量的分布(192)
五、随机变量的函数与分布(195)	习题 7-4(197)		
第五节 随机变量的数字特征			198
一、数学期望和方差的概念(198)	二、数学期望和方差的性质(200)	三、随机变量的其他一些数字特征(201)	习题 7-5(201)
第六节 统计特征数 统计量			202
一、总体和样本(202)	二、统计量(203)	三、统计特征数(203)	四、统计量的分布(204)
习题 7-6(206)			
第七节 参数估计			206
一、参数的点估计(206)	二、参数的区间估计(208)	习题 7-7(210)	
第八节 假设检验			210
一、基本原理(210)	二、一个正态总体均值和方差的检验(212)	三、双总体均值和方差检验(213)	四、假设检验的两类错误(214)
习题 7-8(215)			
第九节 一元线性回归			216
一、建立一元线性回归方程(216)	二、一元线性回归的相关性检验(218)	三、预测与控制(218)	习题 7-9(219)
本章知识结构			221
复习题七			222
附录一 泊松(Poisson)分布表			225
附录二 标准正态分布数值表			228
附录三 χ^2 分布临界值表			230
附录四 t 分布临界值表			232
附录五 F 分布临界值表			234
附录六 检验相关系数 $\rho=0$ 的临界值(γ_α)表			240
习题答案			241

第一章 极限与连续

本章导读

极限概念是在研究变量在某一过程中的变化趋势时引出的.它是微积分学的重要基本概念之一,微积分学中的其他几个重要概念,如连续、导数、定积分等,都是用极限表述的,并且微积分学中的很多定理也是用极限方法推导出来的.这一章我们在对函数概念进行复习和补充的基础上将介绍数列与函数极限的概念,求极限的方法及函数的连续性.

通过本章的学习,希望大家:

- 了解反函数、函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性的概念;左、右极限的概念;无穷小、无穷大的概念;闭区间上连续函数的性质.
- 理解函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数的概念;函数极限的定义;无穷小的性质;函数在一点连续的概念;初等函数的连续性.
- 掌握复合函数的复合过程;极限四则运算法则.
- 会对无穷小进行比较;用两个重要极限求极限;判断间断点的类型;求连续函数和分段函数的极限;会用极限解决经济中的问题.

第一节 初等函数

一、函数的有关概念

1. 函数的定义

定义 设 D 是一个实数集. 如果对属于 D 的每一个数 x , 按照某种对应关系 f , 都有确定的数值 y 和它对应, 那么 y 就叫做定义在数集 D 上的 x 的函数, 记作 $y=f(x)$. x 叫做自变量, 数集 D 叫做函数的定义域, 当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时, 与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$, 当 x 取遍 D 中的一切实数值时, 与它对应的函数值的集合 $M=\{y|y=f(x), x \in D\}$ 叫做函数值的值域.

在函数的定义中, 如对于每一个 $x \in D$, 都有唯一确定的 y 与它对应, 那么这种函数称为单值函数, 否则称为多值函数. 如无特别说明, 我们以后研究的函数都指单值函数.

2. 函数的定义域

研究函数时, 必须注意函数的定义域. 在实际问题中, 应根据问题的实际意义来确定定义域. 对于用数学式子表示的函数, 它的定义域可由函数表达式本身来确定, 即要使运算有意义, 一般应考虑以下几点:

- (1) 分式中, 分母不能为零;
- (2) 在根式中, 负数不能开偶次方根;

(3) 在对数式中,真数不能取零和负数,底数大于零且不等于1;

(4) 在三角函数式中, $k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 不能取正切, $k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 不能取余切;

(5) 在反三角函数式中,要符合反三角函数的定义域;

(6) 如函数表达式中含有分式、根式、对数式或反三角函数式,则应取各部分定义域的交集.

例 1 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{4-x^2} + \sqrt{x+2}; \quad (2) y = \lg \frac{x}{x-1}; \quad (3) y = \arcsin \frac{x+1}{3}.$$

解 (1) $4-x^2 \neq 0$, 则 $x \neq \pm 2$, 又 $x+2 \geq 0$, 得 $x \geq -2$, 所以函数的定义域为 $(-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

(2) 由 $\frac{x}{x-1} > 0$, 可得 $x > 1$ 或 $x < 0$, 所以函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

(3) 由 $-1 \leq \frac{x+1}{3} \leq 1$, 可得 $-3 \leq x+1 \leq 3$, $-4 \leq x \leq 2$, 所以函数的定义域为 $[-4, 2]$.

两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时,这两个函数才被认为是相同的.

例如,函数 $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ 与 $y = 1$ 是两个相同的函数;又如,函数 $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y = x+1$ 是两个不同的函数.

3. 函数的表示法

常用的函数表示法,有公式法(解析法)、表格法和图像法三种.

有时,会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示.

例如:函数

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

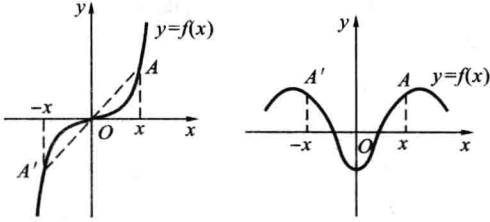
是定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个函数.

在定义域的不同范围内用不同的式子来表示的函数称为分段函数.

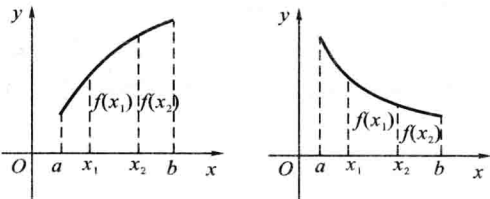
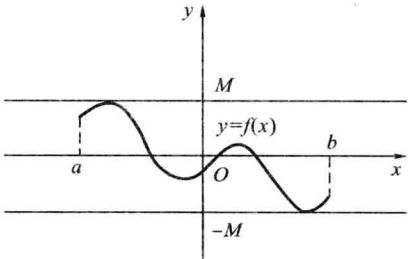
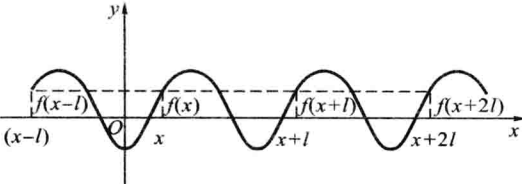
4. 函数的几种特性

我们已学过函数的四种特性,即奇偶性、单调性、有界性、周期性,将这四个特性作归纳,如表 1-1 所示.

表 1-1

特 性	定 义	几何特性
奇偶性	如函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称,且对任意的 x , 如果 $f(-x) = -f(x)$, 那么 $f(x)$ 为奇函数; 如果 $f(-x) = f(x)$, 那么 $f(x)$ 为偶函数.	 奇函数的图像关于原点对称, 偶函数的图像关于 y 轴对称.

续表

特 性	定 义	几何特性
单调性	对于任意的 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 且 $x_1 < x_2$, 如果 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加; 如果 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调减少.	 单调增函数图像沿 x 轴正向上升, 单调减函数图像沿 x 轴正向下降.
有界性	对于任意的 $x \in (a, b)$, 存在 $M > 0$, 有 $ f(x) \leq M$, 那么 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界; 如这样的数 M 不存在, 那么 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内无界.	 区间 (a, b) 内的有界函数的图像 全部夹在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.
周期性	对于任意的 $x \in D$, 存在正数 l , 使 $f(x+l)=f(x)$, 那么 $f(x)$ 为 D 上的周期函数, l 叫做这个函数的周期.	 一个以 l 为周期的周期函数的图像在定义域内每隔长度为 l 的区间上有相同的形状.

二、反函数

定义 设函数 $y=f(x)$, 它的定义域是 D , 值域为 M , 如果对值域 M 中任意一个值 y , 都能由 $y=f(x)$ 确定 D 中唯一的 x 值与之对应, 由此得到以 y 为自变量的函数叫做 $y=f(x)$ 的反函数, 记作 $x=f^{-1}(y)$, $y \in M$.

在习惯上, 自变量用 x 表示, 函数用 y 表示, 所以又将它改写成 $y=f^{-1}(x)$, $x \in M$.

由定义可知, 函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域分别是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域和定义域. 函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.

例 2 求函数 $y=3x-2$ 的反函数.

解 由 $y=3x-2$ 解得 $x=\frac{y+2}{3}$, 将 x 与 y 互换, 得 $y=\frac{x+2}{3}$, 所以 $y=3x-2$ ($x \in \mathbf{R}$) 的反函数是 $y=\frac{x+2}{3}$ ($x \in \mathbf{R}$).

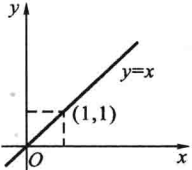
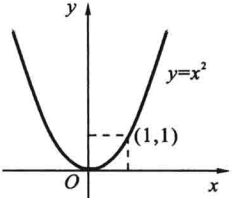
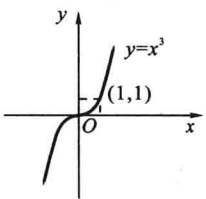
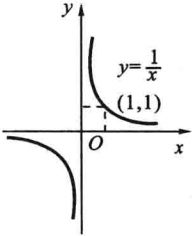
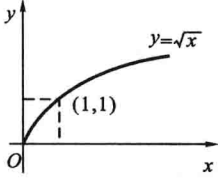
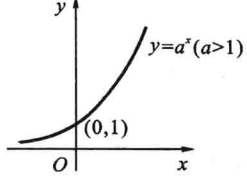
另外, 函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

三、基本初等函数

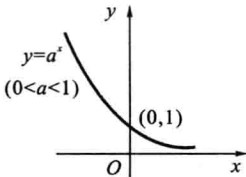
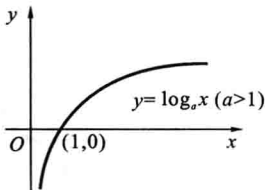
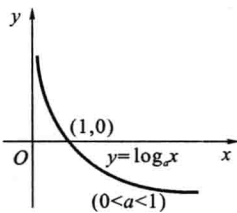
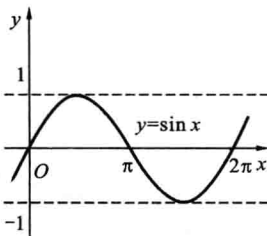
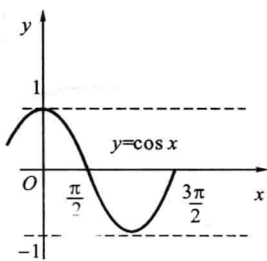
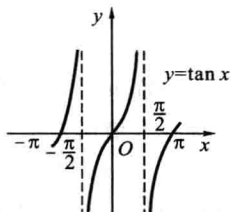
幂函数 $y=x^a$ ($a \in \mathbf{R}$)、指数函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$)、对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$)、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。

现把一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图像和特性列表,如表 1-2。

表 1-2

函 数	定义域与值域	图 像	特 性
幂 函 数	$y=x$ $x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$ $x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		偶函数 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少; 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加。
	$y=x^3$ $x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$ $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$		奇函数 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少; 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少。
	$y=x^{\frac{1}{2}}$ $x \in [0, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		单调增加
指 数 函 数	$y=a^x$ ($a>1$) $x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		单调增加

续表

	函 数	定义域与值域	图 像	特 性
指 数 函 数	$y=a^x$ ($0 < a < 1$)	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		单调减少
对 数 函 数	$y=\log_a x$ ($a > 1$)	$x \in (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ ($0 < a < 1$)	$x \in (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		单调减少
三 角 函 数	$y=\sin x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1, 1]$		奇函数, 周期为 2π , 有界, 在 $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$ ($k \in \mathbf{Z}$) 内单调增加, 在 $(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$ ($k \in \mathbf{Z}$) 内单调减少.
	$y=\cos x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1, 1]$		偶函数, 周期为 2π , 有界, 在 $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$ ($k \in \mathbf{Z}$) 内单调 减少, 在 $(2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi)$ ($k \in \mathbf{Z}$) 内单调增加.
	$y=\tan x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$) $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数, 周期为 π , 在 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ ($k \in \mathbf{Z}$) 内单调增 加.

续表

	函 数	定义域与值域	图 像	特 性
三角函数	$y = \cot x$	$x \neq k\pi (k \in \mathbf{Z})$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数, 周期为 π , 在 $(k\pi, k\pi + \pi) (k \in \mathbf{Z})$ 内单调减少.
反三角函数	$y = \arcsin x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$		奇函数, 单调增加, 有界
	$y = \arccos x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in [0, \pi]$		单调减少, 有界
	$y = \arctan x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$		奇函数, 单调增加, 有界
	$y = \operatorname{arccot} x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, \pi)$		单调减少, 有界

四、复合函数、初等函数

1. 复合函数

定义 设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$; 而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$, 其定义域为数集 A . 如果在数集 A 或 A 的子集上, 对于 x 的每一个值所对应的 u 值, 都能使函数 $y = f(u)$ 有定义, 那么 y 就是 x 的函数. 这个函数叫做函数 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数, 简称为 x 的复合函数, 记为 $y = f[\varphi(x)]$, 其中 u 叫做中间变量, 其定义域为数集 A 或 A 的子集.

例如, $y = \tan^2 x$ 是由 $y = u^2$ 与 $u = \tan x$ 复合而成的函数; 函数 $y = \ln(x-1)$ 是 $y = \ln u$ 与

$u=x-1$ 复合而成的函数, 它们都是 x 的复合函数.

注意 (1) 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 如 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数.

(2) 复合函数也可以由两个以上的函数复合构成. 如 $y=2^u, u=\sin v, v=\frac{1}{x}$, 由这三个函数可得复合函数 $y=2^{\sin \frac{1}{x}}$, 这里 u 和 v 都是中间变量.

例 3 指出下列各复合函数的复合过程:

$$(1) y=\sqrt{1+x^2}; \quad (2) y=\arcsin(\ln x); \quad (3) y=e^{\sin x^2}.$$

解 (1) $y=\sqrt{1+x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1+x^2$ 复合而成;

(2) $y=\arcsin(\ln x)$ 是由 $y=\arcsin u$ 与 $u=\ln x$ 复合而成;

(3) $y=e^{\sin x^2}$ 是由 $y=e^u, u=\sin v, v=x^2$ 复合而成.

2. 初等函数

定义 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成, 并能用一个式子表示的函数称为初等函数.

例如, $y=\ln \cos^2 x, y=\sqrt[3]{\tan x}, y=\frac{2x^3-1}{x^2+1}, y=e^{2x} \sin(2x+1)$ 都是初等函数.

在初等函数的定义中, 明确指出是用一个式子表示的函数, 如果一个函数必须用几个式子表示时, 那么它就不是初等函数. 例如:

$$g(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1+x, & x > 1 \end{cases}$$

就不是初等函数, 而称为非初等函数.

五、建立函数关系举例

在解决实际问题时, 通常要先建立问题中的函数关系, 然后进行分析和计算. 下面举一些简单的实际问题, 说明建立函数关系的过程.

例 4 某工厂生产人造钻石, 年生产量为 x kg, 其固定成本为 312 万元, 每生产 1 kg 人造钻石, 可变成本均匀地增加 50 元, 试将总成本 $C_{\text{总}}$ (元) 和平均成本 $C_{\text{均}}$ (元/kg) 表示成产量 x (kg) 的函数.

解 由于总成本 = 固定成本 + 可变成本, 平均成本 = 总成本 / 产量, 所以

$$C_{\text{总}} = 3\,120\,000 + 50x, \quad C_{\text{均}} = \frac{3\,120\,000 + 50x}{x} = \frac{3\,120\,000}{x} + 50.$$

例 5 某运输公司规定货物的吨千米运价为: 在 a 千米以内, 每千米 k 元; 超过 a 千米时超过部分每千米 $\frac{4}{5}k$ 元. 求运价 m 与里程 s 之间的函数关系.

解 根据题意可列出函数关系如下:

$$m = \begin{cases} ks, & 0 \leq s \leq a, \\ ka + \frac{4}{5}k(s-a), & s > a. \end{cases}$$

这里运价 m 和里程 s 的函数关系是用分段函数表示的, 定义域为 $(0, +\infty)$.

例 6 将直径为 d 的圆木料锯成截面为矩形的木材,如图 1-1 所示,列出矩形截面两条边长之间的函数关系.

解 设矩形截面的一条边长为 x ,另一条边长为 y ,由勾股定理,得 $x^2 + y^2 = d^2$. 解出得 $y = \pm \sqrt{d^2 - x^2}$,由于 y 只能取正值,所以 $y = \sqrt{d^2 - x^2}$,这就是矩形截面的两条边长之间的函数关系,它的定义域为 $(0, d)$.

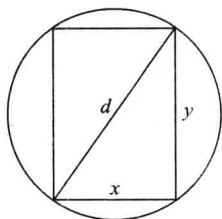


图 1-1

一般地,建立函数关系式应根据题意,先分析问题中哪些是变量,哪些是常量,在变量中,哪个是自变量,哪个是函数,并用不同的字母表示;再根据问题中给出的条件,运用数学、物理等方面的知识,确定等量关系;必要时,还需根据所给条件,确定关系式中需要确定的常数或消去式中出现的多余变量,从而得出函数关系式,并根据题意写出函数的定义域.如果变量之间的关系式在自变量的各个取值范围内各不相同,则需进行分段考察,并将结果写成分段函数.

习 题 1-1

1. 下列各题中所给的两个函数是否相同?为什么?

(1) $y = x$ 和 $y = \sqrt{x^2}$;

(2) $y = x$ 和 $y = (\sqrt{x})^2$;

(3) $y = 2 - x$ 和 $y = \frac{4 - x^2}{2 + x}$;

(4) $y = \ln \sqrt{x-1}$ 和 $y = \frac{1}{2} \ln(x-1)$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{3x+4}$;

(2) $y = \sqrt{1-|x|}$;

(3) $y = \frac{2}{x^2 - 3x + 2}$;

(4) $y = \lg \frac{1+x}{1-x}$;

(5) $y = \sqrt{2+x} + \frac{1}{\lg(1+x)}$;

(6) $y = \arccos \sqrt{2x}$.

3. 设 $f(x) = ax + b$, $f(0) = -2$, $f(3) = 5$,求 $f(1)$ 和 $f(2)$.

4. 已知 $f(x-1) = x^2 - 3x + 2$,求 $f(x)$.

5. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 3$;

(2) $g(x) = x^2 \cos x$;

(3) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$;

(4) $g(x) = \frac{x}{a^x - 1}$.

6. 证明函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(-1, 0)$ 内单调减少.

7. 将下列各题中的 y 表示为 x 的函数:

(1) $y = \sqrt{u}$, $u = x^2 - 1$;

(2) $y = e^u$, $u = \sin v$, $v = \ln x$.

8. 指出下列函数的复合过程:

(1) $y = \cos \sqrt{3x+2}$;

(2) $y = \sin^2 \frac{1}{x}$;

(3) $y = \ln(\sin e^{x+1})$;

(4) $y = 5^{\cot \frac{1}{x}}$.

9. 火车站收取行李费的规定如下:当行李不超过 50 kg 时,按基本运费计算,每公斤收费 0.15 元;当超过 50 kg 时,超重部分按每公斤 0.25 元收费,试求运费 y (元)与重量 x (kg)之间的函数关系式,并作出这个函数的图像.

10. 拟建一个容积为 8 000 立方米,深为 8 米的长方体水池,池底造价比池壁造价贵一倍,假定池底每平方米的造价为 a 元,试将总造价表示成底的一边长的函数,并确定此函数的定义域.

第二节 数列的极限

一、数列极限的定义

前面已经学过数列的概念. 现在进一步考察当自变量 n 无限增大时, 数列 $x_n = f(n)$ 的变化趋势, 先看下面两个数列:

$$(1) \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots;$$

$$(2) 2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots.$$

为清楚起见, 把这两个数列的前几项分别在数轴上表示出来(图 1-2, 1-3).

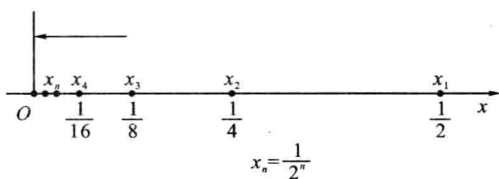


图 1-2

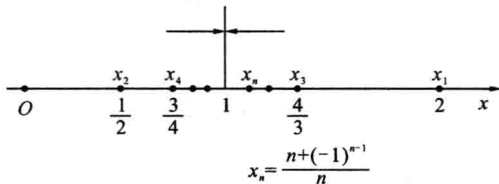


图 1-3

由图 1-2 可看出, 当 n 无限增大时, 表示数列 $x_n = \frac{1}{2^n}$ 的点逐渐密集在 $x=0$ 的右侧, 即数列 x_n 无限接近于 0; 由图 1-3 可看出, 当 n 无限增大时, 表示数列 $x_n = \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 的点逐渐密集在 $x=1$ 的附近, 即数列 x_n 无限接近于 1.

归纳这两个数列的变化趋势, 可知当 n 无限增大时, x_n 都分别无限接近于一个确定的常数. 一般地, 有如下定义.

定义 如果当 n 无限增大时, 数列 $\{x_n\}$ 无限接近于一个确定的常数 a , 那么 a 就叫做数列 $\{x_n\}$ 当 n 趋向无穷大时的**极限**, 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad \text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } x_n \rightarrow a.$$

因此, 数列(1)和(2)的极限分别记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1$.

例 1 观察下列数列的变化趋势, 写出它们的极限:

$$(1) x_n = \frac{1}{n}; \quad (2) x_n = 2 - \frac{1}{n^2}; \quad (3) x_n = (-1)^n \frac{1}{3^n}; \quad (4) x_n = -3.$$

解 列表考察这四个数列的前几项及当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它们的变化趋势, 如表 1-3 所示.

表 1-3

n	1	2	3	4	5	...	$\rightarrow \infty$
(1) $x_n = \frac{1}{n}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	...	$\rightarrow 0$
(2) $x_n = 2 - \frac{1}{n^2}$	$2 - \frac{1}{1}$	$2 - \frac{1}{4}$	$2 - \frac{1}{9}$	$2 - \frac{1}{16}$	$2 - \frac{1}{25}$	...	$\rightarrow 2$
(3) $x_n = (-1)^n \frac{1}{3^n}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$-\frac{1}{243}$	...	$\rightarrow 0$
(4) $x_n = -3$	-3	-3	-3	-3	-3	...	$\rightarrow -3$