

油藏数值模拟微机速算原理

YOU CANG SHU ZHI MO NI WEI JI SU SUAN YUAN LI
冯文光 著 葛家理 罗蛰潭 审

四川科学技术出版社



油藏数值模拟微机速算原理

冯文光 著

葛家理 罗蛰潭 审



四川科学技术出版社
1991.成都

责任编辑 赵 健 安小望
特约编辑 袁顺生
封面设计 韩健勇

油藏数值模拟微机速算原理
冯文光 著

四川科学技术出版社出版发行

(成都市盐道街三号)

西南冶金地质印刷厂 印刷

开本 787×1092 毫米 1/16 印张 17.25

1991年6月第1版 1991年6月第1次印刷

印数 1-2000册 字数 415千字

ISBN 7-5364-2022-6/TE·3

定价 9.95元

内 容 简 介

该书系作者四次给研究生讲课、两次给大专生讲课的讲义经反复修改、提高、升华而成。该书的中心是三维、多相三维油藏数值模拟的微机速算法，在微机上实现大型油藏数值模拟；在大型计算机上实现特大型油藏数值模拟。书中首次引入三维模拟的新方法有：加权分裂法、加权分数步长法、加权稳定修正法、通用算法、附加参数法、奇异算子法、近似分数算子法、高精度加权分数步长法、切氏加速法及分数扫描法、矩阵分数法等。作者提出的三维、多相三维油藏数值模拟的微机速算法有：切氏超松弛法、切氏对称超松弛法、递推的切氏超松弛法、变时空迭代的最佳超松弛法、变时空迭代的最佳对称超松弛法、全变超松弛法、全变对称超松弛法、全变向前向后加速松弛法、最佳线松弛法、变时空迭代的块松弛法；黑油模型相分离分数步长法、黑油模型分数扫描分数步长法、黑油模型变松弛法、有限组分模型相分离分数步长法、有限组分模型分数扫描分数步长法、凝析油气藏数值模拟相分离分数步长法、稠油热采数值模拟分数扫描分数步长法；分布参数最优识别与边界识别的充要条件等。

该书理论上全面系统、实用性强。解法上不解矩阵，零元素不存不算，三维问题一维化，多相问题单相化，使油藏数值模拟微机化、普及化。

该书可作为油藏工程专业、地下水文工程专业本科生、研究生的教材，特别适用于油田开发地质人员、油藏工程技术人员、地下水文工程技术人员参考。

前 言

在滚动勘探早期就应该开始并坚持不断地进行油田开发最优决策。油田开发最优决策是全方位的。地质勘探、油田开发、油气储运等工作都要围绕油田开发最优化展开各项工作。从油田投产一开始,无论是单井动态,还是整个油田动态,都要进行监测与控制。油藏数值模拟是油田开发最优决策的有效工具。油藏数值模拟的微机化、普及化、三维和多相三维模拟的微机速算法是目前迫切需要解决的问题。

本书系统地论述了微机速算法的基本原理,特别是三维、多相三维油藏模拟的微机速算法。为了便于大学生及初学者学习,本书第二章阐述了单相一维差分法,第三章阐述了单相二维差分法,第四章阐述了单相一维、二维差分方程的解法,第六章第一节阐述了 Buckley-Leverett 方程差分格式及其解法,第七章重点阐述了利用测井资料确定储层参数的方法及参数处理的方法。为了便于研究生学习,解决油田开发的实际问题,本书第五章论述了单相三维模拟的微机速算法,第六章论述了黑油模型、闪蒸黑油模型、有限组分模型、凝析油藏模拟的微机速算法,第八章简单介绍了网格新技术,第九章证明了分布参数最优识别和边界识别的充要条件,第十章简述了稠油热采数值模拟的微机速算法。

罗蛰谭教授一直热情地关心和支持作者,使本书能与读者见面。葛家理教授、罗蛰谭教授全面、系统地对全书进行了审校。

在本书撰写过程中,受到彭大钧教授的大力支持和帮助;中国科学院成都分院研究员吕涛、四川石油管理局高级工程师钟孚勋审阅了全书,并提出了许多宝贵意见;袁顺生同志以及四川科学技术出版社理工编辑室的同志为本书的编辑付出了辛勤的劳动;李远芝等同志为本书排版不辞辛劳;张永贵同志、杨跃忠同志认真、仔细地校对了全书。李志凯同志、90级研究生杨仓虎、石京平、谭荣、刘勇健等为本书清绘了全部图件。在此谨向他们以及给予热情帮助的其他同志表示衷心的感谢!

由于作者水平有限、编写经验缺乏,本书一定存在不少错误和不妥之处,敬请读者批评指正。

作者

1990年2月于成都地质学院

目 录

<p>第一章 绪论 1</p> <p>第二章 单相一维渗流的有限差分方程 4</p> <p>2.1. 单相一维渗流问题的差分格式 4</p> <p> A. 空间离散 4</p> <p> B. 时间离散 7</p> <p> C. 差分格式 8</p> <p> a. 前差显式方程(F-D) 8</p> <p> b. 后差方程(B-D) 8</p> <p> c. Crank-Nicolson 差分方程(C-N) 9</p> <p> d. Richardson 差分方程 10</p> <p> e. 菱形格式 10</p> <p> f. Sauljevs 法 10</p> <p> g. 改进 Sauljevs 法 11</p> <p> h. 跳蛙式 11</p> <p> i. 加权六点格式 11</p> <p> j. 三时阶的一般差分格式 12</p> <p>2.2. 差分格式的适定性 16</p> <p> 2.2.1 离散误差与相容性 16</p> <p> 2.2.2 收敛性 17</p> <p> 2.2.3 差分格式的稳定性 20</p> <p> A. 调和分析法 21</p> <p> B. 矩阵法 26</p> <p> C. 分离变量法 26</p> <p>2.3. 选配参数构造差分格式 26</p> <p>2.4. 网格系统与边界条件 27</p> <p>2.5. 变系数的离散问题 30</p> <p> A. 非均匀网格的差分方程 30</p> <p> B. 非均匀网格的对称矩阵 34</p> <p>2.6 柱座标中轴对称径向流 35</p> <p>第三章 单相二维渗流的有限差分方程 39</p> <p>3.1 二维渗流的分类 39</p> <p>3.2 平面渗流(x-y)的差分方程 40</p> <p> A. 离散方法 40</p> <p> B. 平面渗流的有限差分方程 41</p>	<p> a. 前差显式 41</p> <p> b. 后差隐式 41</p> <p> c. Crank-Nicolson 差分格式 42</p> <p> d. 加权两层差分格式 42</p> <p>3.3 分数步长法 42</p> <p> A. 交替方向法 42</p> <p> a. 交替方向显式(ADE) 43</p> <p> b. 交替方向隐式(ADI) 44</p> <p> B. Douglas 法 45</p> <p> C. Douglas-Rarchford 法 46</p> <p> D. 局部一维法(LOD) 46</p> <p> E. 线 Sauljevs 法 47</p> <p> F. 附加参数法 48</p> <p> G. 多参数法 49</p> <p> H. 奇异算子法 49</p> <p> I. 分裂法 50</p> <p> J. 线松弛格式 51</p> <p> K. 上松弛格式 51</p> <p>3.4 单井模型的差分方程 51</p> <p>3.5 边界条件的处理 53</p> <p> A. 外边界条件的处理 53</p> <p> B. 内边界条件的处理 55</p> <p> a. 奇点析出法 55</p> <p> b. 井底定压 58</p> <p>3.6 二维差分方程的稳定性 60</p> <p> A. 矩阵分析法 60</p> <p> B. 分离变量法 61</p> <p> C. 幂级数分析法 63</p> <p> D. 用稳定分析法构造差分格式 64</p> <p>第四章 一维、二维渗流差分方程的求解方法 66</p> <p>4.1 直接法 66</p> <p> A. 有关基本概念 66</p> <p> B. 一维渗流问题的三对角阵解法 67</p> <p> C. 一维渗流问题的分数扫描法 72</p> <p> D. 矩阵分数扫描法 74</p> <p>4.2 稀疏矩阵技术 75</p>
---	---

A. 具有性质 A 的矩阵	75	B. 后差隐式差分方程	128
B. 稀疏矩阵新技术实例	76	C. Crank-Nicolson 差分方程	128
4.3 点显式迭代法	83	D. 三维加权差分方程	129
4.3.1 定常迭代法	84	5.2 分数步长法	129
A. 雅可比简单迭代法	84	A. 线性算子的半群理论与	
B. Gauss-Seidel 迭代法	85	分数步长法	129
C. 逐次超松弛迭代法(SOR)	85	B. 其他形式的分数步长法	134
D. 优选松弛因子的近似方法	87	a. 交替方向法(ADI)	134
E. 对称逐次超松弛法(SSOR)	88	b. 稳定修正法(SC)	135
4.3.2 迭代法的收敛性	89	c. 近似修正法(AC)	136
4.3.3 非定常迭代法	95	d. J. Douglas 法	137
A. 单层变步迭代参数法	95	e. 加权分裂法(WS)	138
a. 切比雪夫多项式的性质	95	f. 加权分数步长法(WF)	138
b. 切氏加速法	96	g. 加权稳定修正法(WSC)	139
c. 切氏超松弛法	99	h. 通用算法(UA)	140
d. 切氏对称超松弛法	100	i. 附加参数法(AP)	140
e. 切氏加速法的稳定化措施	101	j. 预测校正法(PC)	141
B. 双层变步迭代参数法	102	k. 奇异算子法(SO)	142
a. 双层递推的切氏加速法	102	l. 近似分数算子法(AF)	143
b. 双层递推的切氏超松弛法	104	m. 高精度加权分数	
C. 变时空迭代参数法	105	步长法(WHA)	144
D. 全变参数法	105	5.3 稀疏矩阵技术	146
4.4 块隐式迭代法	105	A. 标准排列	146
4.4.1 块隐式定常迭代法	106	B. D4 排列	146
A. 线雅可比法	106	5.4 三维显式迭代法	150
B. 线 Gauss-Seidel 法	106	5.4.1 显式定常迭代法	150
C. 线松弛法(LSOR)	106	A. 雅可比简单迭代法	150
D. 一维修正法(1DC)	107	B. Gauss-Seidel 迭代法	151
E. 二维修正法(2DC)	108	C. 点松弛法(SOR)	151
F. 块松弛法	108	D. 对称点松弛法(SSOR)	151
4.4.2 块隐式非定常迭代法	110	E. 向前向后加速	
A. 交替方向迭代法	110	松弛法(FBAOR)	152
(a) 稳定渗流问题的交替方向法	110	5.4.2 显式非定常迭代法	154
(b) 不稳定渗流的交替方向法	114	A. 单层迭代法	154
B. 最佳变线松弛法	117	a. 切氏加速法	154
C. 变参数的块松弛法	119	b. 切氏超松弛法	154
D. 二维强隐式(SIP)	120	c. 切氏对称松弛法	155
4.5 各种迭代法比较	123	B. 双层迭代法	156
第五章 单相三维渗流的		a. 递推切氏加速法	156
差分方程及其解法	127	b. 递推切氏超松弛法	156
5.1 三维渗流的差分方程	127	C. 变时空迭代参数法	156
A. 前差显式差分方程	128	a. 变时空迭代的最佳松弛法	157

b. 变时空迭代的最佳		G. 实例	193
对称松弛法	162	6.2 两相渗流的差分方程与解法 . . .	196
c. 变时空迭代的最佳		A. 隐压显饱法(IMPES)	196
OVFBAOR 法	163	B. 顺序求解法(SEQ).	198
D. 全变迭代参数法	164	C. 联立求解法(SS)	201
a. 全变超松弛法	164	a. 相分离分数步长法	202
b. 切氏全变对称超松弛法	165	b. 相分离 C-N 分数步长法	202
c. 切氏全变向前向后		c. 相分离加权分数步长法	203
加速松弛法	166	d. 联立加权分数步长	
d. 不完全乔利斯基-		分数扫描法	203
共轭斜量法(ICCG)	166	c. 联立变松弛法	204
c. 块不完全 LU 分解的		6.3 黑油模型	204
共轭斜量法(BILUCG)	167	6.3.1 黑油模型的隐压显饱法	205
5.5 块隐式迭代法	168	6.3.2 黑油模型的顺序求解法	206
5.5.1 块隐式定常迭代法	168	6.3.3 黑油模型的联立求解法	207
A. 线雅可比迭代法	168	A. 黑油模型相分离分数步长法	207
B. 线 Gauss-Scidel 迭代法	168	B. 黑油模型分数步长分数扫描法	208
C. 线松弛法(LSOR)	169	C. 黑油模型的变松弛法	209
D. 三维块松弛法	169	D. 黑油模型变线松弛	
5.5.2 块非定常迭代法	170	分数扫描法	210
A. 三维交替方向迭代法	170	6.4 双重介质黑油模型	210
B. 最佳线松弛法	172	6.5 闪蒸黑油模型	212
C. 变时空迭代的块松弛法	174	6.6 有限组分模型	215
D. 三维强隐式	175	A. 相分离分数步长法	216
5.6 非线性方程的处理	178	B. 分数扫描分数步长法	217
A. 全隐式	178	6.7 凝析油藏数值模拟	218
B. 共轭斜量法	181	第七章 参数的收集与处理	220
5.7 双重介质三维油藏最佳		7.1 基本参数的收集与处理	220
变松弛法	182	7.2 二维渗流参数的处理	233
第六章 多相渗流的有限差分法	187	7.3 三维渗流参数的处理	236
6.1. Buckley-Leverett 方程	187	7.4 参数的调整与历史拟合	238
A. 分流方程	187	第八章 网格新技术	240
B. 三维 Buckley-Leverett 方程		第九章 分布参数识别和边界	
和饱和度方程	188	识别的充要条件	243
C. 一维 Buckley-Leverett 方程	189	第十章 稠油热采数值模拟	250
D. 一维 Buckley-Leverett		练习题	257
方程的差分格式	190	主要参考文献	259
E. 一维 Buckley-Leverett 差分		基本符号表	261
方程的稳定性	190	附录:程序	263
F. 数值弥散	192		

第一章 绪论

制定油田开发方案实际上是一种油田开发决策。所谓决策，就是制定各种可供选择的方案并决定采用某种方案的过程，它体现出主观或理论对客观世界的认识能力和对未来实践的驾驭能力。油田开发决策就是制定多种可供选择的油田开发方案并决定采用最佳方案的过程。油藏工程师在这个决策过程中，对储层的储集性和储集流体的流动性的认识会进一步升华，增强了油藏工程师在油田开发中的主动性和自觉性。

任何决策，都必须做到科学化和民主化。油田开发决策科学化的前提条件是要有一个正确的目标，要有若干个可供选择的方案，要追求最可能的优化效应，要做出科学预测，并在油田开发实施过程中不断进行决策反馈，决策追踪。现代油田开发决策往往是多目标，涉及领域广，包括的不定因素多，结构形态多，动态变化复杂。因此油田开发决策就需要多学科结合。发挥各种专家的集体智慧、发挥各学科的“综合效应”。这就是油田开发决策的民主化。

油田开发决策过程中，对储层的描述要求具有真实性、及时性、适量性、全面性、针对性和后效性。

所谓真实性，就是对储层的描述不失真；所谓及时性，就是对开采条件下储层的流动规律能迅速地作出应变决策；所谓适量性，就是要抓住影响储层中流体流动最关键的因素；所谓全面性，就是要从正反两方面搞清楚储层的储集性和储集流体的流动规律；所谓针对性，就是要找出油田开发决策中存在的问题，制定解决这一特定问题的特定对策；所谓后效性，就是对油田开发决策的成功与失误迅速通过后效信息的反馈进行检验、调整和修改。

利用石油地质、油层物理、测井分析等学科的方法，对储层的储集性描述是相当成功的。

由于储层的非均质性、储层孔隙几何结构的复杂性、储集流体的非均质性、流体相态变化的复杂性、作用在流体上的力的复杂性、边界条件的复杂性，这些复杂性给研究储集流体渗流规律带来了很大的困难。

认识储层流体流动基本规律的方法有两种：一种是直接观察法，一种是储层模拟法。

直接观察法是开辟生产试验区投产试验，直接观察生产试验结果。这种方法在滚动开发初期是必不可少的。但这种方法只能进行一次，不便对比；一旦失败，造成的不良影响是难以弥补的。井下测试也是一种直接观察法，但不能同时在所有的井进行，不能全面地、系统地分析整个油田开发过程中的影响因素。

储层的模拟方法可以分为两类：一类是物理模拟，一类是数学模拟。

物理模拟是根据相似原理把油气藏原型按比例缩小，制成相似的物理模型，再使原型的物理过程按一定的相似关系在物理模型中再现；通过短期的小的原型试验，迅速地、直接地观察到油气藏中的渗流过程，测定所需要的参数，指导油田开发生产实践。

物理模拟要求建立的物理模型与油气藏原型必须满足几何相似和力学相似，并由相似原理，提出相似准数。

物理模拟的关键是具体分析研究油藏的问题，抓住主要矛盾，确定并在模拟中实现那些起主导和决定作用的相似准数，忽略次要的相似准数，在一定程度上比较真实地反映流体在储层内的渗流规律。

物理模拟的优点是保持原型本身的物理过程，这是任何其他模拟所不能代替的。

物理模拟的缺点是很难满足几何相似和力学相似，并且代价高，模拟时间长，模拟过程难以测量。

物理模型可以分为比例模型和元体模型两类。

比例模型是把油藏大小、流体和岩石性质都按比例换算成实验室模型，保持各作用力的比值相同。比例模型的优点是研究结果可直接用于油田开发，缺点是这种比例模型很难建造。

元体模型是用真实的油藏岩石和流体进行实验。其优点是有益于研究油藏渗流的机理，缺点是不能用于油田开发。

数学模拟分为两种，一种是水电相似模拟，一种是油藏数值模拟。

水电相似模拟是利用相似原理，认为多孔介质中流体渗流过程与导电介质中电流流动过程相似，渗流过程中流量与压差成正比和导电电流强度与电压差成正比相似，渗流过程中流量与渗流阻力成反比和导体中的电流强度与电阻成反比相似，两者都服从同一数学规律，在数学上都可以写成同一方程。

水电相似模拟是四十年代模拟油藏的一种方法，计算机问世以后，已被油藏数值模拟所替代。

油藏数值模拟是从地下流体渗流过程中的本质特征出发，建立描述渗流过程基本物理现象，并能描述油藏边界条件和原始状况的数学模型，用计算机求解渗流数学模型，研究地下流体渗流过程变化规律的方法。

油藏数值模拟能够全面地、系统地综合分析影响因素，还可反复多次进行。油藏数值模拟是描述储集流体流动性的最好工具，是油田开发最优决策的最好工具，它的最大优点是可以对油田开发多种方案进行反复模拟，从中选择最佳方案。

油藏数值模拟的基本步骤是，首先充分地认识油藏，建立合理的地质模型，抓住渗流过程的本质特征建立数学模型，再离散化成数值模型，编制程序框图，编制计算机程序，建立计算机模型。

油藏数值模拟的主要目标是通过模拟进一步了解储层参数，流体性质随时间、空间的分布与变化，找出最优开采的手段和方法，实现最终采收率最高、经济效益最佳的目标。

为了达到这个目标，油藏数值模拟必须解决下述问题：

确定最佳布井方案，最佳完井方案，最佳射孔方案，最佳的开发试验区，最佳的配产方案，最佳的开采方案与实施方法、时间，最佳开采速度，找出影响实施这些方案的关键因素，找出油藏模拟预测的特性与实际油藏特性差异的原因。

虽然油藏数值模拟可以模拟复杂油藏的开采过程，但仍然存在很多困难。大型油藏数值模型形成庞大的稀疏矩阵，占用计算机内存大，计算时间长，计算经费昂贵，迭代参数的选择是最令人头痛的、特别花时间、特别花经费的问题之一。

本书就是为了解决这些困难，使油藏数值模拟微机化、普及化。本书的中心是微机迭代算法。基本思路是大型稀疏矩阵的零元素不存不算，三维问题一维化，多相问题单相化，

迭代参数自动选取，迭代参数随迭代步、随空间、时间变化，在任意迭代步，任意时间、空间点都保持收敛速度最快，使占用计算机内存最小，计算时间最短、计算经费最少，在微机上实现大型油藏数值模拟。本书首次引入三维油藏数值模拟的新方法有：加权分裂法、加权分数步长法、加权稳定修正法、通用算法、附加参数法、奇异算子法、近似分数算子法、高精度加权分数步方法、分数扫描法、矩阵扫描法、切氏加速法等，并推出了这些方法的矩阵的特征根。本书中作者提出了三维及多相三维模拟的新方法有：切氏超松弛法、切氏对称超松弛法、递推的切氏超松弛法、变时空迭代的最佳超松弛法、变时空迭代的最佳对称超松弛法、全变超松弛法、全变对称超松弛法、全变向前向后加速松弛法、最佳线松弛法、变时空迭代的块松弛法；黑油模型相分离分数步长法、黑油模型分数步长分数扫描法、黑油模型变松弛法；有限组分模型的相分离分数步长法、分数扫描分数步长法；凝析油藏分数扫描分数步长法；稠油热采三相四组分分数扫描分数步长法等。

油藏数值模拟微机速算法，将会在物理化学渗流、随机渗流、油田开采系统工程和最优控制中起重要作用。

油藏工程研究的核心问题是最优控制问题。最优控制问题首先进行最佳系统辩识。系统辩识的目的在于预测，预测的目的在于最优决策，在于最优控制。

储层参数、流体参数完全不知道的油藏工程问题是黑箱问题，比如尚未投入开发的油田。一部分储层参数、流体参数已经知道，另一部分储层参数、流体参数并不知道的油藏工程问题是灰箱问题，比如经过详探，试采并投入开发的油田。实际上，油田开发过程的许多问题始终都是奥秘。因此，油藏工程研究的是黑箱或者灰箱问题。

系统辩识就是参数辩识，参数分为分布参数和集中参数。如果参数是空间的函数，这种参数称为分布参数，比如孔隙度、渗透率、饱和度、储层厚度、原始地层压力、边界位置都是分布参数。如果参数只是时间的函数，不是空间的函数，这种参数称为集中参数，比如观察的产量、压力、含水率等是集中参数。使用过程识别辩识集中参数，以描述物理过程本质现象的偏微分方程为状态方程与对偶的伴随方程作为控制的最优分布参数识别法识别分布参数。

作者在本书中提出了分布参数和边界识别的充要条件。

最优控制是油田开发的根本目的。以油田开发原理为基础，以油藏数值模拟为工具，使用系统工程与最优控制的理论，结合经济模型与风险决策，就一定能作出最优决策。

第二章 单相一维渗流的有限差分方程

2.1 单相一维渗流问题的差分格式

有限差分法 以有限差商代替微分方程的偏导数,求解偏微分方程数值解的方法称为有限差分法。

基本思路是把研究的渗流物理问题的偏微分方程,通过各种离散化方法,变成可解的代数方程,即把连续问题变成离散问题。

一维渗流问题可分为:

$$\text{稳定线性流动: } \frac{d^2 P}{dx^2} = \frac{\mu}{K} q(x) C_2 \quad (2.1.1)$$

$$\text{不稳定线性流动: } \frac{d^2 P}{dx^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\mu}{K} q(x,t) C_3 \quad (2.1.2)$$

变系数不稳定线性流动:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{K(x,p)}{\mu(x,p)} \frac{\partial P}{\partial x} \right] = C_1 \phi(x,p) C_t(x,p) \frac{\partial P}{\partial t} + C_2 q(x,t) \quad (2.1.3)$$

变系数不稳定径向流动:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{K(r,p)}{\mu(r,p)} \frac{\partial P}{\partial r} \right] = C_1 \phi(r,p) C_t(r,p) \frac{\partial P}{\partial t} + C_2 q(r,t) \quad (2.1.4)$$

$$\text{其中 } \eta = \frac{K}{C_1 \phi \mu C_t}, C_1 = 1.1574 \times 10^{-2}, C_2 = C_1, C_3 = 1 \quad (2.1.5)$$

离散处理时,关键要解决好三个问题。首先要考虑怎样离散,其次是离散后的精度问题,即有限差分解与真解的差值,第三要选择最好的求解方法。

有限差分方程 用离散点集(一维情况点集 $\{X_i\}$)来代替连续的定义域,用差商代替微分方程微分后得到的代数方程组称为有限差分方程。有人称为差分格式。

网格节点 把微分方程连续的定义域化成差分方程离散点集组成的离散定义域,其中的离散点称为网格节点。

离散化 用差分代替微分方程微分,把微分方程变为相应差分方程的过程称为离散化。

离散化的方法主要有三种:泰勒级数法,积分法,变分法。

泰勒级数法是常用方法。积分法、变分法离散后的精度更高。

A. 空间离散

对于压力的泰勒公式为:

$$P(x + \Delta x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{\partial^k P}{\partial x^k}(x) \Delta x^k + O(\Delta x^n) \quad (2.1.6)$$

再看一阶差商:

$$\text{前向差分 (F-D): } \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x + \Delta x, t) - P(x, t)}{\Delta x} \quad (2.1.7)$$

$$\text{后向差分 (B-D): } \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x, t) - P(x - \Delta x, t)}{\Delta x} \quad (2.1.8)$$

$$\text{中心差分 (C-D): } \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x + \Delta x, t) - P(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} \quad (2.1.9)$$

由泰勒公式:

$$P(x + \Delta x, t) = P(x, t) + \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \Delta x - R^f \Delta x \quad (2.1.10)$$

$$P(x - \Delta x, t) = P(x, t) - \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \Delta x - R^b \Delta x \quad (2.1.11)$$

由这两式可以得出:

$$\text{前向差分 F-D: } \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} = \frac{P(x + \Delta x, t) - P(x, t)}{\Delta x} + R^f \quad (2.1.12)$$

$$\text{后向差分 B-D: } \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} = \frac{P(x, t) - P(x - \Delta x, t)}{\Delta x} + R^b \quad (2.1.13)$$

$$\text{中心差分 C-D: } \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} = \frac{P(x + \Delta x, t) - P(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} + R^c \quad (2.1.14)$$

其中 $R^c = R^f - R^b$

二阶差商实际上是在一阶差商的基础上再进行差分。由泰勒公式: $\frac{1}{2} \Delta x^2 - R$

$$P(x + \Delta x, t) = P(x, t) + \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \Delta x + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} - R_2^f \Delta x^2 \quad (2.1.15)$$

$$P(x - \Delta x, t) = P(x, t) - \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \Delta x + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} - R_2^b \Delta x^2 \quad (2.1.16)$$

两式相加得:

$$\frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} = \frac{P(x + \Delta x, t) - 2P(x, t) + P(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} + R_2^f + R_2^b \quad (2.1.17)$$

我们把 x 点记为 i , $x + \Delta x$ 点记为 $i+1$, 则 $x - \Delta x$ 记为 $i-1$, 则:

$$\text{则 } \left. \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right|_i = \frac{P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}}{\Delta x^2} + R_i^2 \quad (2.1.18)$$

(2.1.18)式是均匀网格的二阶差分。这给了我们启示, 对于非均匀网格的二阶差分可以写成:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x_i} \left[\frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta x_{i+1/2}} - \frac{P_i - P_{i-1}}{\Delta x_{i-1/2}} \right] + R_i^2$$

$$\Delta x_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i, \Delta x_{i-1/2} = x_i - x_{i-1}, \Delta x_i = 0.5(\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2}) \quad (2.1.19)$$

对于非均质非均匀网格的二阶差分为:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right] = \frac{1}{\Delta x_i} \left[\left(\frac{K}{\mu} \right)_{i+1/2} \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta x_{i+1/2}} - \left(\frac{K}{\mu} \right)_{i-1/2} \frac{P_i - P_{i-1}}{\Delta x_{i-1/2}} \right] \quad (2.1.20)$$

Carnahan (1969), Kelley (1968)还提出了用多项式插值法进行差商,很方便地推导更高阶的差分近似式。若 $P(l)$ 的差分式是一个多项式的 l 阶导数,这个差分式必须遵循两个原则:

- 1. $P(l)$ 的差分算子至少包含了 $l+1$ 个分离的 P_i 值。
- 2. 若 P 是一个 m 阶 ($m \leq l$) 多项式,则 $P(l)$ 的近似式是精确的。

第二种离散方法是积分法。积分法与问题的物理意义更接近。积分法与泰勒级数法有三点不同。第一需要补充一个“格状”,如图 2.1。第二,单位是用质量流量而不是体积流量。第三,连续性方程多用质量守恒。

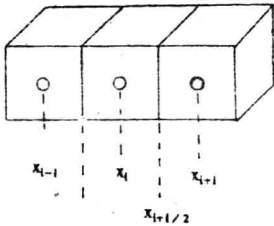


图 2.1

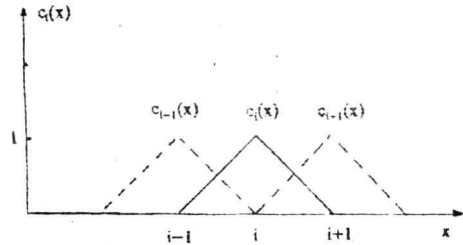


图 2.2

若横截面积为 A , 对方程 (2.1.1) 有:

$$\begin{aligned} A \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{K}{\mu} \rho \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} dx - C_2 A \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho q(x) dx \\ \approx \rho A \frac{K}{\mu} \frac{P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}}{\Delta x} - \rho A q_i \Delta x C_2 \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

第三种离散方法是变分法(Ritz, Calerkin)。有限元法就是利用变分法进行离散。利用格林公式,得出结论:

$$\text{令 } I = \int_0^L \left[\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + C_2 q(x) P(x) \right] dx$$

$$\text{与问题 } A: \begin{cases} \frac{K}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - C_2 q(x) = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \end{cases}$$

则使 I 达到极小值的 $P(l)$ 必是问题 A 的解,反之,问题 A 的解必使 I 达到极小值。

Varga 1962 年提出了直接近似法。直接近似法是利用 Chapcau 基本函数进行近似。Chapcau 基本函数如图 2.2 定义为:

$$c_i(x) \begin{cases} = 0 & x \leq x_{i-1} \\ = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x_{i-1} < x < x_i \\ = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x_i < x < x_{i+1} \\ = 0 & x \geq x_{i+1} \end{cases}$$

$$\frac{\partial c_i(x)}{\partial x} \begin{cases} = 0 & x \leq x_{i-1} \\ = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & x_{i-1} < x < x_i \\ = \frac{-1}{x_{i+1} - x_i} & x_i < x < x_{i+1} \\ = 0 & x \geq x_{i+1} \end{cases} \quad (2.1.22)$$

$$\text{令 } P(x) = \sum_{i=1}^N a_i c_i(x) \quad (2.1.23)$$

$$\text{则: } I = \int_0^L \left[\frac{K}{\mu} \left(\sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial c_i(x)}{\partial x} \right)^2 + C_2 q(x) \sum_{i=1}^N a_i c_i(x) \right] dx \quad (2.1.24)$$

要使 I 达到极小值, 则 $\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$

$$\text{因此: } 2 \frac{K}{\mu} \frac{\partial c_i(x)}{\partial x} \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial c_j(x)}{\partial x} + C_2 q(x) c_i(x) = 0 \quad (2.1.25)$$

方程(2.1.25)是二次型方程, 可以解出 $a_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 。选择的基本函数不同, 得到的代数方程必然不同。

$$\text{例如 设 } P(x) = a_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} (a_{i+1} - a_i)$$

$$\text{则有: } -\frac{K a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1}}{\mu \Delta x} + C_2 q_i = 0 \quad (2.1.26)$$

B. 时间离散

半离散 考虑时间上是连续的, 只对空间进行离散, 把关于时间、空间上连续的偏微分方程变为只关于时间上连续的常微分方程, 这种离散过程称为半离散。

对方程 (2.1.2) 的半离散如下:

$$\frac{P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}}{\Delta x^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial P_i}{\partial t} + \frac{\mu}{K} q_i C_3$$

时间离散也分为前向差分和后向差分。时间前向差分是在 t_n 时刻对 $\frac{\partial P}{\partial t}$ 进行处理:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial t} \right|_{x_i, t_n} = \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} + R_i^f \quad (2.1.27)$$

而后向差分则是在 t_{n+1} 时刻对 $\frac{\partial P}{\partial t}$ 进行处理:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial t} \right|_{x_i, t_{n+1}} = \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} + R_i^b \quad (2.1.28)$$

特别应该注意的是, (2.1.27)式与(2.1.28)式比较, 虽然这两个式子右边的形式完全相同, 但所代表的物理意义不同。注意后面的差分格式就可以发现这一点。

对时间和空间采取不同的差分方式, 就会得到完全不同的差分格式。

C. 差分格式

我们可以构造很多差分格式, 但有的差分格式有时不收敛, 不稳定, 有的精度太差, 有的难于求解。我们构造的差分格式必须满足:

1. 无条件收敛, 无条件稳定;
2. 有合理的精度;
3. 易于求解。

我们在后面将一一说明, 首先看一看常见的差分格式。

a. 前差显式方程 F-D (如图 2.3):

构造的思路是:
$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right|_{x_i, t_n} = \frac{1}{\eta} \left. \frac{\partial P}{\partial t} \right|_{x_i, t_n} \quad (2.1.29)$$

由此得到:
$$P_i^{n+1} = \alpha(P_{i+1}^n + P_{i-1}^n) + (1 - 2\alpha)P_i^n$$

其中:
$$\alpha = \frac{\eta \Delta t}{\Delta x^2} \quad (2.1.30)$$

前差方程 F-D 是一种古典显式, 其特点是条件稳定, 条件收敛, 只有当 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ 时, 才收敛、稳定, 其精度为 $\varepsilon_{F-D} = O(\Delta x^2) + O(\Delta t)$

其向量式为:
$$\underline{\bar{P}}^{n+1} = A_{FD} \underline{\bar{P}}^n$$

其中:
$$A_{FD} = I - A \quad A = \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \quad (2.1.31)$$

b. 后差方程 B-D(如图 2.4):

构造思路是: $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_{x_i, t_{n+1}} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial t} \Big|_{x_i, t_{n+1}}$

由此得到: $-\alpha P_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\alpha)P_i^{n+1} - \alpha P_{i+1}^{n+1} = P_i^n$ (2.1.32)

后差方程 B-D 是一种古典隐式, 其特点是无条件稳定, 无条件收敛。其精度为:

$$\varepsilon_{B-D} = O(\Delta x^2) + O(\Delta t)$$

可见, 后差隐式的精度与前差显式的精度一样, 但后差隐式的收敛性和稳定性却大为改善。通过比较, 我们可以发现, 所谓显式就是一个未知数, 一个方程直接求解; 所谓隐式就是一个方程有几个未知数, 必须对整个方程组联立求解。

后差隐式的向量式为: $A_{BD} \vec{P}^{n+1} = \vec{P}^n$

其中: $A_{BD} = I + A$ (2.1.33)

我们需要的是不但稳定性好、收敛性好, 而且精度更高的差分格式。

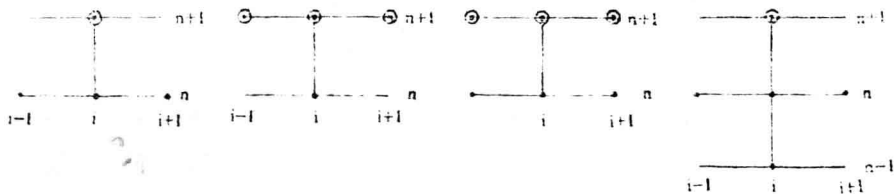


图 2.3

图 2.4

图 2.5

图 2.6

c. Crank-Nicolson 差分方程 C-N(如图 2.5):

构造的思路是: $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_{x_i, t_{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial t} \Big|_{x_i, t_{n+\frac{1}{2}}}$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_{x_i, t_{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_{x_i, t_{n+1}} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_{x_i, t_n} \right]$$

由此得到: $-\frac{1}{2}\alpha P_{i-1}^{n+1} + (1 + \alpha)P_i^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha P_{i+1}^{n+1} = d_i$

$$d_i = (1 - \alpha)P_i^n + \frac{1}{2}\alpha(P_{i+1}^n + P_{i-1}^n)$$
 (2.1.34)

Crank-Nicolson 差分方程的特点是: 第一无条件稳定, 无条件收敛; 第二提高了 Δt 的误差精度, 其精度为 $\varepsilon_{C-N} = O(\Delta x^3) + O(\Delta t^2)$ 。由此可见, Crank-Nicolson 差分方程比前两种差分格式都好, 但要注意, Crank-Nicolson 差分方程对于具有导数类型的边界条件时, 会出现新的问题。

Crank-Nicolson 差分方程的向量式为:

$$A_{CD} \vec{P}^{n+1} = \left(I - \frac{1}{2} A \right) \vec{P}^n$$