

CT图像重建算法

闫 镔 李 磊 编著



科学出版社

CT 图像重建算法

闫 镔 李 磊 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是一本专门介绍 CT 图像重建算法的专著。作者结合从事 CT 图像重建算法理论研究与工业 CT 系统研究的成果和思考,对 CT 图像重建算法的理论和实践问题进行了全面系统介绍。既包括对重建算法基本理论的细致详尽讲解,也包含对目前最新型的理论和实际成像中工程问题的热点和难点问题解决情况的介绍与总结。本书内容涵盖了 CT 图像重建的两个分支——解析类重建算法和迭代类重建算法的经典算法和最新研究成果,其中解析类重建算法中详细讲解了平行束、扇形束和锥形束图像重建算法的发展历程。在本书的后半部分,结合作者的研究成果,以专题章节形式论述了当前 CT 图像重建实际应用中的热点与难点问题——不完全角度重建、局部重建和大视野重建,以及图像重建加速技术,基本涵盖了目前 CT 图像重建的主流研究课题,这是本书的一大特色和亮点。同时本书还给出了国内外最新公开发表的重要文献,以供读者参考。

本书的内容涉及重建算法理论的前沿问题,也包含具体应用问题的解决方案,有利于科研人员系统研究重建算法理论,也有助于将算法理论在无损检测等工业生产中应用;同时具备系统、全面的基础理论介绍,适合作为高等院校无损检测、生物医学工程、电子科学与技术、应用数学等专业高年级本科生和研究生的参考教材。

图书在版编目(CIP)数据

CT 图像重建算法/闫焱,李磊编著. —北京:科学出版社,2014.3

ISBN 978-7-03-040069-7

I. ①C… II. ①闫… ②李… III. ①计算机 X 线扫描体层摄影-图象重建-算法 IV. ①R814.42

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 043408 号

责任编辑:赵彦超/责任校对:刘亚琦
责任印制:赵德静/封面设计:迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 4 月第 一 版 开本:720 × 1000 1/16

2014 年 4 月第一次印刷 印张:11 3/4

字数:222 000

定价:58.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

计算机断层成像 (computed tomography, CT) 技术被公认为 20 世纪后期最伟大的科技成果之一, 它不但给医学诊断带来革命性的影响, 还成功地应用于工业无损检测、逆向工程和安全检查等领域。随着 CT 理论和技术的飞速发展, 面对日益旺盛的应用需求, 各领域正不断衍生出新的 CT 系统, 如超声 CT、荧光 CT、中子 CT、SPECT、PET、微波 CT 等。虽然它们在技术方法和工程实现上各有千秋, 但是有着共同的数学基础和计算基础, 即 CT 的核心理论——CT 图像重建。

20 世纪 80 年代, G. T. Herman 和国内的庄天戈教授相继出版了关于 CT 图像重建算法的专著, 被视为 CT 图像重建的经典著作。但因出版年代较早, 重点在于论述 CT 图像重建的基础理论, 未能包含近二十多年来图像重建领域取得的一系列研究成果。该领域后续出版的相关著作多是以 CT 成像系统构成、设计以及应用为重点进行介绍, 图像重建算法部分比较简略, 大多仅仅简要介绍图像重建的基本理论, 缺乏系统深入的分析阐述。因此, 我国各大学相关专业的高年级本科生或研究生以及从事 CT 应用开发的科研工作者, 都迫切需要一本全面系统论述 CT 图像重建算法理论的参考书。

本书旨在向读者全面、系统、深入地介绍经典和现代图像重建方法, 帮助读者在 CT 图像重建领域建立比较完整的知识体系, 对于图像重建的发展现状和趋势有一个比较清晰的认识。在此基础上对于各种具体应用问题的研究找到可借鉴的思路和途径。

本书内容涵盖了解析类重建算法和迭代类重建算法研究中的经典算法和最新研究成果, 其中解析类重建算法中详细讲解了平行束、扇形束和锥形束图像重建算法的发展历程。在本书的后半部分, 结合作者的研究成果, 以专题章节形式论述了当前 CT 图像重建实际应用中的热点、难点问题——不完全角度重建、局部重建、大视野重建和重建加速技术, 基本涵盖了 CT 图像重建的主流研究课题。同时本书还给出了国内外最新公开发表的重要文献, 以供读者参考。

在本书撰写过程中, 作者融合多年在科研和教学过程中的经验和体会, 所述内容注重基础, 在强调对基本概念和方法的理解方面花费了较多笔墨, 这是本书的一大特色。本书在对经典算法的阐述中, 将数学基础和物理意义相结合, 重要部分给出了详细的理论推导, 同时力求通俗易懂, 利于读者自学。本书注重内容的完备性, 对重要内容, 从多角度进行关联叙述, 便于读者的深入理解。

全书分为九章, 第 1~5 章为基础理论部分, 第 6~9 章为专题问题介绍部分。

第 1 章主要介绍 CT 成像技术的概况并阐述投影和反投影的概念；第 2 章主要介绍图像重建算法的基础，包括傅里叶重建、中心切片定理、反投影滤波算法等。第 3 章主要介绍扇形束的数据重排与重建算法。第 4 章主要介绍锥形束 CT 图像重建中具有里程碑意义的经典算法：FDK 算法、Grangeat 算法、Katsevich 算法及 BPF 算法。第 5 章主要介绍迭代重建算法中的两大基本类型：代数重建算法和统计重建算法。第 6 章主要介绍扫描角度不完全时提高重建精度的热点方法。第 7 章主要介绍对兴趣区重建时各种数据截断情况下的重建算法。第 8 章主要介绍对扫描视野进行纵向和横向扩展时的重建算法。第 9 章介绍重建算法的并行加速技术，着重介绍了基于多核 CPU 和 GPU 的加速方法。全书内容的布局、编写分工由闫镔教授负责，李磊负责所有内容的汇总和定稿。各章节作者如下：

- 第 1 章 引言 (闫镔, 李磊)
- 第 2 章 平行束图像重建 (闫镔, 李磊)
- 第 3 章 扇形束图像重建 (闫镔, 李磊)
- 第 4 章 锥形束图像重建算法 (闫镔, 李磊)
- 第 5 章 迭代重建算法 (闫镔, 李磊)
- 第 6 章 不完全角度重建算法 (王林元, 张瀚铭)
- 第 7 章 局部重建算法 (汪先超, 韩玉)
- 第 8 章 扩大视野重建算法 (韩玉, 李磊)
- 第 9 章 图像重建并行加速技术 (张峰, 李汉宁)

本书中的许多思想、原理和实例部分来源于前人的著作和学术论文，借此机会，作者向这些对本领域作出贡献的学者们表示感谢。感谢唐孝威院士、包尚联教授、韩中庚教授不辞辛劳审阅了本书，给出了富有见解的建议和意见。感谢李建新教授、胡国恩教授在作者从事图像重建研究过程中给予的支持和帮助。课题组的研究生李守鹏、王超、蔡爱龙等先后参与了 CT 图像重建相关课题的研究工作，为本书提供了不少素材，研究生张翔负责本书的校对工作，付出了大量时间和精力，在此一并感谢。此外，感谢国家 863 计划项目 (2012AA011603) 和国家自然科学基金项目 (61372172) 对本书出版的支持。

CT 图像重建伴随 CT 技术历经了几十年的发展，学术论文和成果成千上万。尽管作者希望精益求精，但限于作者的见识，不足之处在所难免，望读者不吝赐教，批评指正。

作 者

2013 年 3 月 4 日于郑州

目 录

第 1 章	引言	1
1.1	CT 成像技术概述	1
1.2	投影	5
1.3	反投影	14
1.4	本章小结	22
第 2 章	平行束图像重建	23
2.1	基础知识 —— 傅里叶变换	23
2.2	傅里叶中心切片定理	29
2.3	平行束重建算法	31
2.3.1	直接傅里叶重建算法	31
2.3.2	滤波反投影算法	32
2.3.3	滤波算子	35
2.4	反投影滤波重建算法	38
2.5	本章小结	40
第 3 章	扇形束图像重建	41
3.1	扇形束成像的几何描述	41
3.2	数据重排算法	42
3.3	扇形束重建算法	45
3.3.1	等角度扇形束重建算法	45
3.3.2	等间距扇形束重建算法	47
3.4	本章小结	50
第 4 章	锥形束图像重建算法	51
4.1	FDK 重建算法	51
4.1.1	FDK 算法的推导	51
4.1.2	滤波窗函数	52
4.1.3	FDK 算法的离散实现	54
4.2	Grangeat 重建算法	56
4.2.1	Grangeat 算法理论	56
4.2.2	Grangeat 算法的具体实现	59
4.3	Katsevich 重建算法	61

4.3.1	PI 线	61
4.3.2	Katsevich 算法理论	63
4.3.3	锥束螺旋 Katsevich 算法实现的几个关键问题	66
4.4	BPF 重建算法	70
4.4.1	BPF 算法理论	71
4.4.2	BPF 算法的显示表达式	75
4.4.3	投影数据的求导	78
4.5	本章小结	79
第 5 章	迭代重建算法	80
5.1	解线性方程组	80
5.2	代数重建算法	83
5.2.1	ART 算法	83
5.2.2	SART 算法	86
5.3	统计迭代重建算法	87
5.3.1	最大似然估计理论	87
5.3.2	ML-EM 算法	89
5.3.3	OSEM 算法	93
5.4	本章小结	95
第 6 章	不完全角度重建算法	97
6.1	不完全角度问题	97
6.2	正则化框架与稀疏优化理论	99
6.2.1	正则化框架	99
6.2.2	稀疏优化理论	100
6.3	ASD-POCS 算法	103
6.4	基于 CS 理论的新型重建算法	107
6.4.1	PICCS 算法	107
6.4.2	RRD 算法	108
6.4.3	ADTVM 算法	109
6.5	本章小结	112
第 7 章	局部重建算法	113
7.1	局部重建问题	113
7.1.1	PI 线的两个端点都在物体支撑外	114
7.1.2	PI 线的一个端点在物体支撑外	116
7.1.3	PI 线的两个端点都在物体支撑内	118
7.2	基于数据重排的局部重建算法	120

7.2.1	投影数据重排	120
7.2.2	T-BPF 算法的重建公式	122
7.3	基于 Radon 逆变换的局部重建算法	126
7.4	本章小结	129
第 8 章	扩大视野重建算法	131
8.1	大视野重建问题	131
8.2	轴向视野扩展	131
8.2.1	螺旋 FDK 算法	132
8.2.2	PI-Method 算法	134
8.3	横向视野扩展	136
8.3.1	RT 扫描方式	136
8.3.2	基于数据重排的滤波反投影型算法	138
8.3.3	BPF 型重建算法	142
8.4	双向视野扩展	143
8.5	本章小结	147
第 9 章	图像重建并行加速技术	149
9.1	并行加速技术概述	149
9.2	FDK 算法并行性分析	151
9.2.1	FDK 算法关键步骤	151
9.2.2	FDK 算法并行性分析	153
9.3	基于多核 CPU 的图像重建并行加速技术	153
9.3.1	OpenMP 介绍	153
9.3.2	基于 OpenMP 的 FDK 算法并行加速策略	155
9.3.3	基于 OpenMP 的 FDK 算法加速实验结果	156
9.4	基于 GPU 的图像重建并行加速技术	158
9.4.1	GPU 加速 FDK 算法的关键技术	158
9.4.2	GPU 加速 FDK 算法的实验结果	163
9.5	本章小结	165
	参考文献	166
	索引	175

第1章 引言

1.1 CT 成像技术概述

图像有多种含义,其中最常见定义是指各种图形和影像的总称。在日常生活中图像是必不可少的组成部分。俗话说“百闻不如一见”。据统计,至少有 80% 以上的外界信息经图像或视频(也可以看作连续播放的图像)获得。很多时候图像带给我们的信息量远比语言能够描述的要多得多。

这里主要讨论图像生成的过程,也就是成像过程。提到成像,我们日常生活中接触最多的就是可见光成像,利用可见光在物体上的反射获得物体表面的颜色、纹理、明暗等信息。眼睛就是我们在生活中使用最多的可见光成像系统。实际上,不单是可见光,大多数的物质波都可以用于成像,比如,红外成像、生物发光成像 (bioluminescence)、荧光成像 (fluorescence)、Thz 波成像、超声波成像、X 射线成像、计算机断层成像 (computed tomography, CT)、背散射成像、正电子发射断层成像 (positron emission tomography, PET)、单光子发射断层成像 (single photon emission computed tomography, SPECT)、核磁共振成像。所成的图像就是物质波和被成像物质相互作用结果的可视化。显然,不同的物质波与被成像物质的相互作用是不同的,因此,各种成像模态所成像的结果也是不同的,它反映了检测物体对该物质波所具有的某种特性的分布。

本书主要讨论 X 射线成像技术中的基本理论。1895 年,德国科学家伦琴在进行阴极射线管实验时发现了 X 射线,这种射线能够穿透物体,并能使胶片感光。三天后,伦琴的夫人偶然看到了手的 X 射线影像,从此开创了用 X 射线进行医学诊断的放射学——X 射线摄影术,也开创了工程技术与医学相结合的纪元。X 射线首先被应用于医学诊断,继而又在工业领域得到广泛应用,对人类历史和科技发展产生了深远影响。1901 年,伦琴因此获得首次颁发的诺贝尔物理学奖。

虽然 X 射线摄影术在诊断和检测方面起了划时代的作用,除了之后出现的超声检测方法以外,是应用最为广泛的一种检测技术,但是它的缺点也是十分明显的,对三维物体进行成像得到的物体内部的图像是二维的,在深度方向上的信息重叠在一起,一方面,无法判断具体的位置信息,另一方面,降低了对比度。

能不能利用叠加的信息恢复出物体内部的三维信息呢? 只有一幅投影信息显然是不行的,那么利用多个角度的投影信息是否可行呢? 断层成像,也就是通过对

物体进行不同角度的射线投影测量而获取物体横截面信息的成像技术应运而生。

所谓断层成像 (tomography), 来源于希腊单词 “tousos”, 表示对物体的横断面进行成像。断层成像的概念最早由挪威物理学家 Abel 在 1826 年针对轴对称物体的横截面信息恢复而提出。

奥地利数学家 Radon 在 1917 年发展了 Abel 的思想, 使成像对象扩展到任意

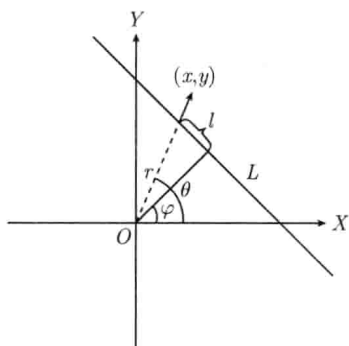


图 1.1.1 直线及其极坐标表示

形状的二维截面 (Radon, 1917)。Radon 提出了投影图像重建的基本数学理论, 为 CT 技术建立了数学理论基础。他指出任何物体均可用无限多个投影来表示; 反之, 如果知道无限多个投影, 便可重建出该物体对象。从数学上证明了某种物理参量 (如一个切面衰减系数的分布) 的二维分布函数, 由该函数在其定义域内的所有线积分完全确定。如图 1.1.1 所示, 二维平面内一条直线 L , 原点到 L 垂线的长度为 s , 与 X 轴的夹角是 ϕ , 对于直线上的一点 (x, y) 可以用极坐标表示为 (r, θ) 。Radon 证明了下述定理:

若已知函数 $f(x, y) = \hat{f}(r, \theta)$ 沿直线 L 的线积分为

$$p = \int_L f(x, y) dl = \int_L \hat{f}(r, \theta) dl = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f} \left(\sqrt{s^2 + l^2}, \phi + \arctan \frac{l}{r} \right) dl - \text{Radon 变换}$$

则

$$\hat{f}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r \cos(\theta - \phi) - l} \frac{\partial p}{\partial l} dl d\phi - \text{Radon 反变换}$$

Radon 变换就是实际的射线投影 p , Radon 反变换就是根据投影 p 重建图像 $\hat{f}(r, \theta)$ 。可惜, 此公式在发表后五十多年, 直至 20 世纪 70 年代初才被发现。

由于 70 年代以前尚未发现 Radon 的论文, 当代投影图像精确重建的数学方法是由美国物理学家 Cormack (1963) 确立的。1963 年, Cormack 首先提出用物体的多方向投影重建断层图像的代数计算方法, 基本解决了投影图像重建的数学问题。1972 年, 英国 EMI 公司工程师 Hounsfield 研制成功第一台临床用的 CT 扫描装置 (Hounsfield, 1973), 首次为一名妇女诊断出脑部的囊肿, 取得了世界上第一张 CT 照片。

CT 的问世在放射学界引起了爆炸性的轰动, 被认为是继伦琴发现 X 射线后, 工程界对放射学诊断的又一划时代的贡献。鉴于 Hounsfield 和 Cormack 对 CT 研制工作的开创性杰出贡献, 1979 年诺贝尔生理和医学奖破例授予两位没有专门医学经历的科学家。从此, 放射诊断进入 CT 时代。CT 技术被公认为 20 世纪后期

最伟大的科技成果之一。不但给医学诊断带来革命性的影响，还成功地应用于无损检测、逆向工程和材料组织分析等工业领域。

(1) 在医学诊断领域，CT 技术作为一种高性能的无损诊断技术，已在医学成像领域确立了不可动摇的地位。

(2) 在工业无损检测领域，“明察秋毫”，已成为汽车、飞机、导弹、电子器件等工业产品的缺陷检测和质量控制的有力手段。

(3) 农林业方面，已开展植物根系的生长、树木的年轮测定等应用。

(4) 地球物理方面，可用于地球资源勘探（岩心的煤、石油的含量分析）、地震预测预报、地质构造分析、考古等领域。

针对不同应用，也可以利用不同的能量波和粒子束比如超声、微波、 γ 射线、质子、中子、电子等与目标相互作用的信息来重建图像，因此超声 CT、荧光 CT、弹性波 CT、SPECT、PET、微波 CT 也相继问世。应该指出，各类 CT 的功能是相互补充而不是相互替代的。在本书中，除非特殊声明，所指 CT 均指 X 射线透射 CT。

虽然这些应用看起来各不相同，小到用电子显微镜得来的数据重建出噬菌体的分子结构，大到利用送往地球大气层外的火箭所采集的数据重建出超新残星的结构，但它们有着共同的数学基础和计算基础，本书就是讨论这些基础。

CT 技术指利用 X 射线穿透物体的衰减信息进行重建来获得物体的断层图像信息的技术。从理论上讲，是一个从投影重建图像的反问题，因此重建算法是 CT 的核心理论和基础算法。

图像重建算法主要可以分为两类：一类是以 Radon 变换为理论基础的解析类重建算法，另一类是以解方程为主要思想的迭代类重建算法。

解析类重建算法从 Radon 变换开始，经过几十年的发展，已形成一套严密和完整的理论体系。根据扫描重建形式的不同，又可以分为二维图像重建和三维图像重建。

在二维图像重建算法中，傅里叶中心切片定理是理论基础。基于该定理进行不同的数学变换，可以得到平行束投影下的两种图像重建方法：直接傅里叶重建算法和滤波反投影算法。滤波反投影是目前最受学术界推崇且在业界广泛应用的图像重建算法，从本质上说它是 Radon 逆变换公式在图像重建中的具体应用。扇形束投影重建算法在平行束投影的基础上，经过适当加权修正或采用数据重排的方式，进行滤波反投影重建。

在三维图像重建算法中，分为近似图像重建算法和精确图像重建算法。近似图像重建算法中以 FDK 算法 (Feldkamp et al., 1984) 为代表，FDK 算法是 Feldkamp 等在 1984 年提出的第一个实用且众所周知的圆轨迹滤波反投影三维图像重建算法。该算法对小锥角的锥束投影进行适当的近似和修正，采用二维扇束方法进行处

理, 计算形式简单, 便于硬件并行加速, 因此在目前锥束 CT 系统中得到广泛应用, 并扩展到螺旋轨迹和其他自由轨迹下的 FDK 重建算法。但是对于大锥角情况, 算法的近似误差较大。1998 年 Turbell 等提出的 PI 方法是一种近似性能较好且适用于长物体重建的螺旋锥束重建算法 (Turbell et al., 1998), 后来还派生出了一些改进的算法, 如 PI-slant 算法 (Turbell et al., 1999)、PI-2D 算法 (Turbell et al., 2000) 等。

三维图像精确重建算法方面, Kirillov 于 1961 年给出了锥束几何复值函数的逆变换公式 (Kirillov, 1961)。基于 Kirillov 的工作, Tuy, Smith, Grangeat 在 20 世纪 80 年代分别提出了三种锥束精确重建算法 (垂直双圆或圆加直线扫描模式等), 其中 Grangeat 类型的算法 (Grangeat, 1991; Clack et al., 1994; Tam, 1995; Schaller et al., 2000) 由于数学上比较简单, 计算机易于实现而成为研究的热点。该方法将锥束投影数据转换为三维 Radon 数据, 重排数据之后进行三维 Radon 逆变换, 得到精确重建结果。此外, Tuy 还给出了三维精确重建的充要条件, 即 Tuy 条件: 每个与重建物体相交的平面都和射线源扫描轨迹至少有一个交点。这是 CT 发展史上的一个重要成果, 它给人们寻找精确扫描方式提供了重要的先验条件。随后, Defrise, Clack 等统一了上述的三种算法, 提出了更加一般的算法 (Defris et al., 1994)。Kudo (1994) 改进了 Grangeat 类型的算法, 避免了数据重排, 且对扫描轨迹具有很好的适应性。

但是, 上述三维精确重建算法都隐含有一个条件, 即锥束必须覆盖整个物体, 不能解决投影截断 (如长物体螺旋锥束扫描) 的重建问题。在螺旋锥束 CT 重建算法发展过程中, 真正具有里程碑意义的成果是 2002~2004 年 Katsevich 提出的螺旋锥束精确重建算法及其广义算法, 基于 Katsevich 的研究成果, 一系列基于标准螺旋锥束扫描和非标准螺旋锥束扫描的算法被提出 (Katsevich, 2002, 2004, 2006)。其中最具有代表性的是 Zou 和 Pan (2004) 提出的螺旋 BPF (反投影滤波) 重建算法, 该算法成功解决了由沿探测器方向截断投影进行 CT 精确重建的问题。随后该方法也被成功应用到了扇束和平行束的情况。显然, 该方法可以用于局部 CT 重建。

解析重建算法的优点是重建速度快; 缺点是抗噪声性能较差, 对数据的完备性要求较高。

迭代重建算法基本思想是由测量的投影数据建立一组未知向量的代数方程式, 通过方程组求解未知图像向量。迭代重建算法分为代数迭代重建算法和统计迭代重建算法两大类, 代数迭代重建中典型的算法有代数重建算法 (algebraic reconstruction technique, ART) (Gordon et al., 1970)、联合代数重建算法 (simultaneous algebraic reconstruction technique, SART) (Andersen et al., 1984) 等。统计迭代重建以优化理论为基础, 从投影测量过程的随机性观点出发, 把图像重建看成是一个参数估计问题, 通过设计合理的目标函数寻求使目标函数达到最优值的参数向量。

典型的算法有期望最大法 EM(Dempster)、最小范数法 (Herman et al., 1976; Artzy et al., 1979)、最大后验概率算法 MAP(Wernecke et al., 1977) 等。迭代算法的优点是抗噪声性能强, 可加入先验知识, 对数据的完备性要求不高; 缺点是计算量大, 重建速度慢, 在实际系统中较少使用。

1.2 投 影

在重建算法的研究过程中模拟投影数据是必不可少的一部分, 一方面可以避免实测投影数据的误差, 为后继 CT 重建算法提供理想的投影数据; 另一方面也可以根据需要有选择地模拟失真如探测器偏移、旋转、响应不一致、射线源偏移等的投影数据, 然后再使用这些模拟出来的数据研究适宜的重建算法对断层图像进行重建。

前面我们已经讲了, CT 是通过具有一定能量和穿透能力的射线 (如 X 射线、 γ 射线等) 与物体的相互作用信息而成像的。当一定能量的 X 射线穿过物体时, 由于产生光电效应、康普顿效应及电子对效应等物理过程, 总的体现是: 一部分射线被物质吸收, 使得射线强度发生衰减。CT 成像主要考虑物体对射线的吸收衰减作用。

如图 1.2.1 所示, 当一束经过准直的足够窄的单能 X 射线 (强度为 I_0) 穿过被测物体后, 该射线束的强度 I 与通过材料的密度、厚度、成分以及射线束的原始能量有密切关系。当射线穿过均匀物质时, 其强度是按指数规律衰减, 遵循 Lambert-Beer 定律:

$$I = I_0 e^{-\mu l} \quad (1.2.1)$$

其中, l 为射线穿过物质的直线长度; μ 为被测物质的线性衰减系数。 μ 由被检物质的物理性质以及射线束的能量决定, 如果物质的等效原子序数用 Z 表示, 密度用 ρ 表示, 射线的能量用 E 表示, 则线性衰减系数 μ 的写法应该是 $\mu(E, Z, \rho)$ 。在

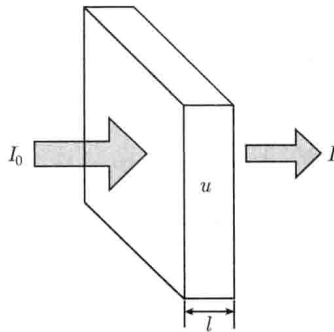


图 1.2.1 X 射线穿过相同衰减物质示意图

这里, 为了简化模型, 仅考虑单能 X 射线的情况。 μ 是有量纲的, 量纲一般记作 mm^{-1} 。图 1.2.2 为 NIST 提供的空气的 X 射线质量衰减系数。

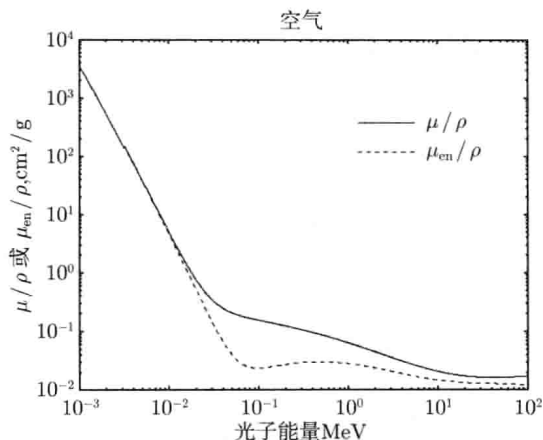


图 1.2.2 NIST 提供的空气的 X 射线质量衰减系数

同时, 射线的强度 I 可以通过探测器进行定量测量得到。空气的 μ 值几乎为零, 因此在穿过空气的路径上 ($e^0 = 1$), X 射线的强度几乎没有改变。物体的长度 l 也可以测量得到, 因此, 经过简单的数学运算就可以得到线性衰减系数 $\mu = \frac{\ln(I_0/I)}{l}$, 从而获得被测物体的物理属性。

若多个物体分段均匀, 各段物体的线性衰减系数分别为 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$, 如图 1.2.3 所示, 相应的线段长度分别为 l_1, l_2, \dots, l_N , 则

$$I = I_0 e^{-(\mu_1 l_1 + \mu_2 l_2 + \dots + \mu_N l_N)} \quad (1.2.2)$$

上式可化为

$$-\sum_{j=1}^N \mu_j l_j = \ln(I/I_0) \quad (1.2.3)$$

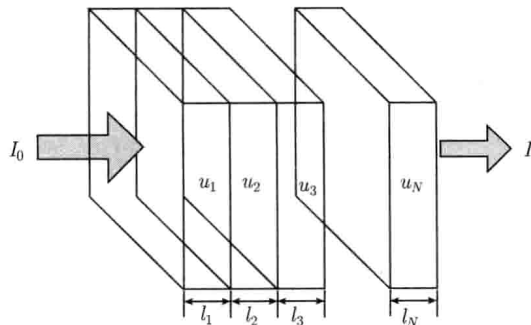


图 1.2.3 X 射线穿过不同衰减物质示意图

更一般地 (如图 1.2.4 所示), 如果物体在 $x-y$ 平面内都不均匀, 衰减系数分布为 $f(x, y)$ 。在某一方向沿某一路径 L 的射线强度变化为

$$I = I_0 e^{-\int_L f(x, y) dl} \quad (1.2.4)$$

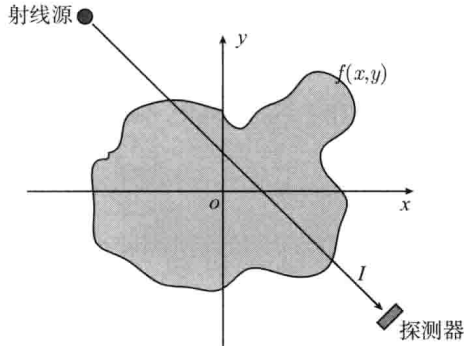


图 1.2.4 X 射线穿过衰减系数分布不均匀物体的示意图

经过取负对数后, 记为 p , 称为射线穿透物体后的投影, 它是一个可通过测量得到的物理量, 它的物理意义就是物质在该能量射线下的衰减系数沿直线 L 方向的线积分:

$$p = \int_L f(x, y) dl = \ln \left(\frac{I_0}{I} \right) \quad (1.2.5)$$

为了体会投影的概念, 给出几个例子。首先讨论二维平行射线束下的投影。

例 1.2.1 假设物体为二维 $x-y$ 平面中的一个均匀圆盘, 圆盘的圆心在坐标原点, 圆盘的衰减系数函数为常数 ρ 。

显然, 各角度下的投影是一样的, 可以选择一个最易计算的角度。如图 1.2.5, 可得物体的各角度投影为

$$p_\theta(s) = \begin{cases} 2\rho\sqrt{R^2 - s^2}, & |s| < R \\ 0, & |s| \geq R \end{cases} \quad (1.2.6)$$

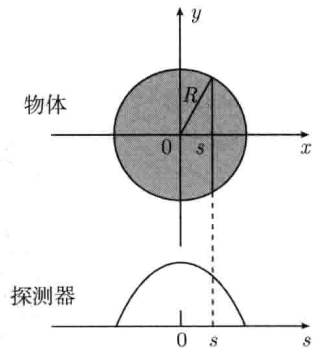


图 1.2.5 圆盘投影示意图

例 1.2.2 假设在二维 $x-y$ 平面中只有一个理想的点目标, 坐标为 (x_0, y_0) 点的衰减系数非零, 物体的衰减系数分布函数为 $f(x, y) = \delta(x - x_0, y - y_0)$, 此时我们来讨论如何求解物体的投影值 $p_\theta(s)$ 。

$\delta(x)$ 不是普通函数, 是广义函数, 它的定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \quad (1.2.7)$$

它的主要性质:

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0).$$

$$(2) \delta(ax-x_0) = \frac{1}{|a|}\delta\left(x-\frac{x_0}{a}\right), \delta(-x) = \delta(x).$$

$$(3) \delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'(\lambda_n)|}\delta(x-\lambda_n), \text{ 其中 } \lambda_n \text{ 为 } g(x) \text{ 的零点.}$$

相应的二维 $\delta(x, y)$ 的定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\delta(x, y)dxdy = f(0, 0)$$

$\delta(x, y)$ 的性质与 $\delta(x)$ 的类似。

图解法: 在任意角度 θ 下, $p_\theta(s)$ 只在 $s = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta$ 时有值为 1, 其他点上均为 0, 所以

$$p_\theta(s) = \begin{cases} 1, & s = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta \\ 0, & s \neq x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta \end{cases}$$

由上述结论可知:

(1) 因为在任意角度 θ 下, $p_\theta(s)$ 只在 $s = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta$ 时有值为 1, 将 $p_\theta(s)$ 按 θ 从 0° 到 180° 排列在一起, 即可得二维图像 $p(\theta, s)$, 而在 $p(\theta, s)$ 中只有 $s = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \sin(\theta + \psi)$ 处有值。位置 s 是角度 θ 的正弦函数, 二维图像 $p(\theta, s)$ 可以看到一个正弦曲线。所以也把 $p(\theta, s)$ 称为正弦图 (sinogram 或 sino 图), 如图 1.2.6。

当 $(x_0, y_0) = (0, 0)$ 时, sino 图如 1.2.7 所示。

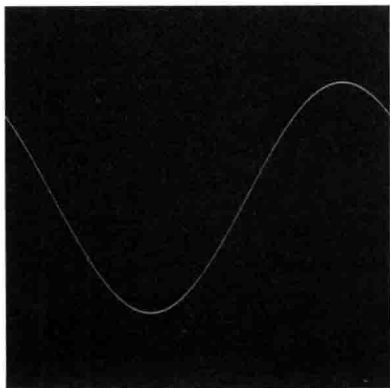


图 1.2.6 正弦图

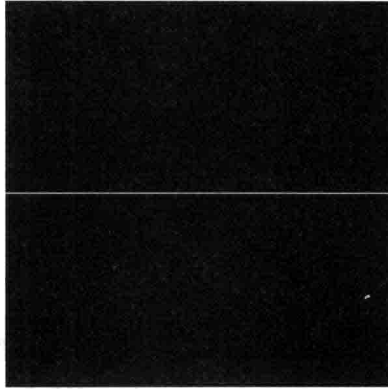


图 1.2.7 特殊情况的 sino 图

(2) 可以推广至一般情况, 求任意二维分布 $f(x, y)$ 的投影。

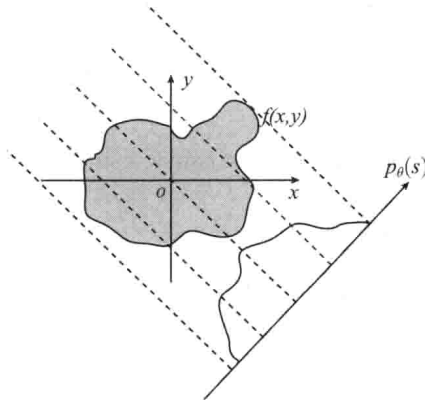
对于任意一点 (x, y) , 它的衰减系数为 $f(x, y)$, 这一点在角度 θ 下的投影值为 $f(x, y)\delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s)$, 那么整个 (x, y) 平面内所有点的投影值的累加就是最终的 $f(x, y)$ 的投影

$$p_{\theta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \quad (1.2.8)$$

例 1.2.3 图 1.2.8 中 $f(x, y)$ 的投影值 $p(s, \theta)$ 该如何求解?

首先, 我们考虑变换坐标系: 即从 x - y 坐标系变换为 s - t 坐标系, 则投影公式就可以变得很简单, 即

$$p_{\theta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{st}(s, t) dt$$

图 1.2.8 二维分布 $f(x, y)$ 的投影

下面介绍原坐标系和旋转坐标系之间的关系。