逻 辑 代 数

刘靖宇 编

内江地区教师进修学院
内江地区教育局教研室《教参》编辑室

说　　明

本书是为师专数学科函授学员编写的教材。它除包含了全日制十年制学校高中数学课本第三册有关章节的全部内容外，还补证了逻辑函数的完全性和范式定理；讲了公式化简法、从范式出发化简法、卡诺图化简法，从理论上彻底解决了如何把一个逻辑函数化成它的最简“与——或”表达式的问题；介绍了逻辑方程（组）的解法及其应用；以电子计算机中的半加器、全加器为典型例子讲了从分立元件到半导体集成电路的逻辑设计……。

在编写过程中，承内江地区教师进修学院、学院数学科的大力支持，特别是邓德安、欧述芳二同志均对本书提出过不少宝贵意见；乐至县进修校罗大富同志作了习题解答；参阅了兄弟院校的逻辑代数教材，在此一并表示感谢！但限于编者水平，书中也难免存在不少缺点和错误，望读者给予批评指正！

编　　者

1981年2月于内江

目　录

第一章　数的进位制

第一节　有位值记数法*

在日常生活和科学技术的各个领域中，除了使用大家熟悉的十进位制中的十进位数外，还广泛地使用其它各种不同的进位制中的数。如在：公尺、公里之间使用一千进位数；年、世纪之间使用一百进位数；秒、分、小时之间使用六十进位数；小时、天之间使用二十四进位数；年、月之间使用十二进位数；吃饭时八人坐一桌，使用八进位数；左、右两支鞋子为一双，使用二进位数……。

各种不同进位制的数中，以十进位数、八进位数，二进位数在现代科学技术中应用最为广泛。要研究它们的运算方法，首先得了解这些进位制中的数是如何表示的。现从大家熟悉的十进位制记数法来引出一般的r(r是大于1的整数)进位制记数法，再导出八进位制、二进位制记数法。

大家知道，十进位制记数法，就是把0，1，2，3，4，5，6，7，8，9这十个数码排在固定的数位…10^3位 10^2位 10^1位 10^0位 10^{-1}位 10^{-2}位 10^{-3}位…上，用来表示数（同一

---

*除了有位值记数法外，还有无位值记数法。如罗马数字的记数法就是无位值记数法。

数码排在不同的数位上表示不同的数）的方法。如：$3982.5714=3\times1000+9\times100+8\times10+2\times1+5\times\frac{1}{10}+7\times\frac{1}{100}+1\times\frac{1}{1000}+4\times\frac{1}{10000}=3\times10^3+9\times10^2+8\times10^1+2\times10^0+5\times10^{-1}+7\times10^{-2}+1\times10^{-3}+4\times10^{-4}$就是用十进位制记数法来表示数。用十进位制记数法表示的数叫十进位数。

一般地，一个正的十进位数N，有

$$
\begin{aligned}
N&=a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}\\
&=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+a_{n-2}\times10^{n-2}+\cdots\\
&\quad+a_2\times10^2+a_1\times10^1+a_0\times10^0+a_{-1}\times10^{-1}\\
&\quad+a_{-2}\times10^{-2}+\cdots+a_{-m}\times10^{-m}
\end{aligned}
$$

其中a_i为整数，且$0\leqslant a_i\leqslant9$（$i=-m,\cdots-2,-1,0,1,2,\cdots n$）。

上式我们是把一个正的十进位数N写成10的各次幂（各次幂的系数是小于10而大于或等于0的整数）的和的形式，它叫做十进位数的幂和展开式。10称为十进位制记数法的基数。十进位制记数法中，进、退位法则是“逢十进一，退一当十”。

从上式看出，十进位数N的每个数码都有一个和它位置相应的以10为底的幂与之对应，这些幂在各个位置上都是固定的，叫做各个数位上的位率。在十进位制记数法中，两个相邻数位上的位率，前一个刚好是后一个的十倍。

仿十进位数的写法，我们可以得出一般地以r（r是大于1的整数）为基数的r进位数的幂和展开式：

$$
\begin{aligned}
&a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}\\
&=a_n\times r^n+a_{n-1}\times r^{n-1}+a_{n-2}\times r^{n-2}+\cdots+a_2\times r^2+a_1\times r^1
\end{aligned}
$$

$+a_0\times r^0+a_{-1}\times r^{-1}+a_{-2}\times r^{-2}+\cdots+a_{-m}\times r^{-m}$

其中a_i为整数，且$0\leqslant a_i\leqslant r-1(i=-m\cdots-2,-1,0,1,2\cdots n)$，这就是把$0,1,2,\cdots(r-1)$这r个数码排在固定数位$\cdots r^4$位 r^3位 r^2位 r^1位 r^0位 r^{-1}位 r^{-2}位 r^{-3}位 r^{-4}位$\cdots$上来表示数的方法，称为r进位制记数法。用r进位制记数法表示的数，叫r进位数。它的进、退位法则是“逢r进一，退一当r”。在r进位制记数法中，当$r=2$时，就是二进位制记数法。用二进位制记数法表示的数，叫二进位数，进、退位法则是“逢二进一，退一当二”；当$r=8$时，就是八进位制记数法。用八进位制记数法表示的数，叫八进位数，进、退位法则是“逢八进一，退一当八”。

数$a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m\,r}$右下角的r是表示数$a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}$是r进位数。十进位数的基数可以略去不写。其它进位制中的数的基数在不引起误会的情况下，也可以不写。

例 1　分别把数110011001_2、613_8写成它的幂和展开式

解：110011001_2

$$=1\times2^8+1\times2^7+0\times2^6+0\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0;$$

$$613_8=6\times8^2+1\times8^1+3\times8^0。$$

例 2　设$144_p=100$　求基数p

解：$144_p=1\times P^2+4\times P^1+4\times P^0$

$$=P^2+4P+4=100$$

解$P^2+4P-96=0$这个一元二次方程得：

$P=-12$或$P=8$，但基数为正数，故$P=8$。

第二节　二进位数的运算

大家在学习算术时就知道，对于十进位数的四则运算，只要掌握了加法和乘法表（即九九表）及一些运算规则（如定位规则，添、去括号的规则，运算顺序等）、运算定律（如加法、乘法的交换律、结合律，乘法对于加法的分配律等），就能得心应手地迅速而准确的进行计算。

同样，二进位数的四则运算也满足这些运算规则和运算定律，也要依靠加法表和乘法表来进行计算。二进位数的加法表、乘法表如下：

加法表：　　表 1

+	0	1
0	0	1
1	1	10_2

乘法：　　表 2

×	0	1
0	0	0
1	0	1

有了上面的加法、乘法表、运算规律、运算定律，我们就可以对二进位数进行四则运算。

例 1　计算：11101_2+1010_2

解：∵

$$\begin{array}{r} 11101 \\ +)\ 1010 \\ \hline 100111 \end{array}$$

∴ $11101_2+1010_2=100111_2$

注意：某数位上遇到 1 加 1，应向高位进 1，本位得 0。

例 2　计算：$101011.10111_2-111.0011_2$

解：∵

$$
\begin{array}{r}
101011.10111 \\
-)\quad 111.00110 \\
\hline
100100.10001
\end{array}
$$

∴ $101011.10111_2 - 111.0011_2 = 100100.10001_2$

注意：在二进位数的减法中，要“退一当二”。

例 3　计算$1.1_2 \times 101.1_2$

解：∵

$$
\begin{array}{r}
1.1 \\
\times)1\ 0\ 1.1 \\
\hline
1\ 1 \\
1\ 1 \\
0\ 0 \\
11 \\
\hline
100\ 0.0\ 1
\end{array}
$$

∴ $1.1_2 \times 101.1_2 = 1000.01_2$。

例 4　计算：$110010_2 \div 101_2$

解：∵

$$
\begin{array}{r}
1010 \\
101\overline{)110010} \\
101 \\
\hline
101 \\
101 \\
\hline
0
\end{array}
$$

∴ $110010_2 \div 101_2$

$= 1010_2$.

二进位数的混合运算，也与十进位数完全类似。

例 5　计算：$10101_2 - 1001_2 \div 11_2 \times 10_2 + 11_2^2$

解　原式$= 10101 - 11 \times 10 + 1001$

$= 10101 - 110 + 1001$

$= 1111 + 1001$

$= 11000_2$.

一般r(r是大于 1 的整数)进位数的四则运算，也可以仿十进位数的四则运算那样进行，计算的法则是相似的。但须记住：在r进位数的计算中，进、退位的法则是：“逢 r 进一，退一当r”。

第三节 数制的转换

我们常用的数是十进位数，电子计算机采用的数是二进位数，但二进位数位数多，书写不方便，所以在编制电子计算机解题程序时，人们又常用八进位数（把八进位数作为二进位数的缩写来使用），这就需要我们掌握它们之间的互相转换方法。

1. 二、八进位数转换为十进位数

由二进位数的幂和展开式：

$$a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m\,2}$$
$$= a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + \cdots + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0$$
$$+ a_{-1} \times 2^{-1} + \cdots + a_{-m} \times 2^{-m}{}_{10}$$

可以看出：只需对等式右边照十进位数的计算方法进行计算，其结果就是十进位数。

例 1　把下列各数转化成十进位数

1) 1101_2；　　2) 101001_2　　3) 10.11_2

解：1) $1101_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
$= 8 + 4 + 0 + 1$
$= 13$；

2) $101001_2 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
$= 32 + 8 + 1$
$= 41$；

3) $10.11_2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$
$= 2 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
$= 2.75$

同样，八进位数的幂和展开式是：

$$a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m8}$$

$$= a_n \times 8^n + a_{n-1} \times 8^{n-1} + \cdots + a_1 \times 8^1 + a_0 \times 8^0$$

$$+ a_{-1} \times 8^{-1} + a_{-2} \times 8^{-2} + \cdots + a_{-m} \times 8^{-m}_{10}$$

把等式右边按十进位数的计算方法进行计算，其结果就是十进位数。

例 2　把下列各数转换成十进位数

1）751_8；　　　　2）123.5_8

解：1）$751_8 = 7 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 1 \times 8^0$

$$= 448 + 40 + 1$$

$$= 489;$$

2）$123.5_8 = 1 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 3 \times 8^0 + 5 \times 8^{-1}$

$$= 64 + 16 + 3 + 0.625$$

$$= 83.625$$

例 3　证明　$0.\dot{1}_8 = 0.\dot{1}4285\dot{7}$

证：$\because$　$0.\dot{1}_8 = 1 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{8^2} + 1 \times \frac{1}{8^3} + \cdots$

$$= \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}$$

$$0.\dot{1}4285\dot{7} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$$

$\therefore$　$0.\dot{1}_8 = 0.\dot{1}4285\dot{7}$.

2．十进位正整数转换成二、八进位正整数

先从分析下面具体例子着手，然后得出转换的方法。

设十进位数725转换成了二进位数 $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$，那么

有：$725_{10}=a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0\ _2$ (1)

我们用下面的方法逐步地确定$a_i(i=0,1,2\cdots,n)$。

将(1)式右边的二进位数写成幂和展开式

$$725=a_na_{n-1}\cdots a_3a_2a_1a_0$$
$$=a_n\times2^n+a_{n-1}\times2^{n-1}+\cdots+a_3\times2^3+a_2\times2^2+a_1\times2^1+a_0\times2^0$$
$$=2(a_n\times2^{n-1}+a_{n-1}\times2^{n-2}+\cdots+a_3\times2^2+a_2\times2^1+a_1)+a_0 \quad (2)$$

将(2)式两边同除以2得到：

$$\frac{725}{2}=362+\frac{1}{2}=(a_n\times2^{n-1}+a_{n-1}\times2^{n-2}+\cdots+a_3\times2^2+a_2\times2^1+a_1)+\frac{a_0}{2}.$$

由于上式两边整数部分与小数部分必须分别相等，故得$a_0=1$，它恰好是725÷2的余数；

$$362=a_n\times2^{n-1}+a_{n-1}\times2^{n-2}+\cdots+a_3\times2^2+a_2\times2^1+a_1 \quad (3)$$

再将(3)式改写成：

$$362=2(a_n\times2^{n-2}+a_{n-1}\times2^{n-3}+\cdots+a_3\times2^1+a_2)+a_1 \quad (4)$$

把等式(4)两边同除以2，得：

$$\frac{362}{2}=181+\frac{0}{2}$$
$$=(a_n\times2^{n-2}+a_{n-1}\times2^{n-3}+\cdots+a_2)+\frac{a_1}{2}$$

同理可得：$a_1=0$ 它恰好是362÷2的余数。

$$181=a_n\times2^{n-2}+a_{n-1}\times2^{n-3}+\cdots+a_2$$

……………………………………………

如此继续下去，就可以将$a_3,\cdots,a_{n-1},a_n$一个个都确定下

来，那么整个过程与结果就可以表述如下：

$$\because\quad \begin{array}{r|l l l}
2 & 725 & & \\ \hline
2 & 362 & \cdots & 余数=1=a_0 \\ \hline
2 & 181 & \cdots & 余数=0=a_1 \\ \hline
2 & 90 & \cdots & 余数=1=a_2 \\ \hline
2 & 45 & \cdots & 余数=0=a_3 \\ \hline
2 & 22 & \cdots & 余数=1=a_4 \\ \hline
2 & 11 & \cdots & 余数=0=a_5 \\ \hline
2 & 5 & \cdots & 余数=1=a_6 \\ \hline
2 & 2 & \cdots & 余数=1=a_7 \\ \hline
2 & 1 & \cdots & 余数=0=a_8 \\ \hline
 & 0 & \cdots & 余数=1=a_9
\end{array}$$

$$\therefore\quad 725 = 1011010101_2$$

一般地，把十进位正整数N转换为二进位正整数，其过程为：

$$\begin{array}{r|l l l}
2 & N & & \\ \hline
2 & Q_0 & \cdots & 余数=a_0 \\ \hline
2 & Q_1 & \cdots & 余数=a_1 \\ \hline
 & \vdots & & \\
2 & Q_{n-2} & \cdots & 余数=a_{n-2} \\ \hline
2 & Q_{n-1} & \cdots & 余数=a_{n-1} \\ \hline
 & 0 & \cdots & 余数=a_n
\end{array}$$

$$\therefore\quad N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0 \ {}_2$$

从上面计算过程可以看出，要把一个十进位正整数N转

换成一个二进位正整数，只需把N除以2，再用商除以2……，如此继续下去，直到商0为止，然后由下到上取全部余数，按从左到右依次横排，就得我们所要求的二进位数。以上方法叫做二除取余法，同理，用r除取余法，就可把任意十进位数化为r进位数。

例4　把十进位数489，669转换成八进位数。

解：

$$\because\quad \begin{array}{r|l}
8 & 489 \\ \hline
8 & 61 \quad \cdots \text{余数}=1 \uparrow \\ \hline
8 & 7 \quad \cdots \text{余数}=5 \\ \hline
 & 0 \quad \cdots \text{余数}=7
\end{array}$$

$\therefore\quad 489 = 751_8$；

$$\because\quad \begin{array}{r|l}
8 & 669 \\ \hline
8 & 83 \quad \cdots \text{余数}=5 \uparrow \\ \hline
8 & 10 \quad \cdots \text{余数}=3 \\ \hline
8 & 1 \quad \cdots \text{余数}=2 \\ \hline
 & 0 \quad \cdots \text{余数}=1
\end{array}$$

$\therefore\quad 669 = 1235_8$

3．十进位正纯小数转换成二、八进位正纯小数。

我们仍以具体例子来说明其方法：

设　$0.6875_{10} = 0.a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-n\,2}$

$$= a_{-1}\times 2^{-1} + a_{-2}\times 2^{-2} + \cdots + a_{-n}\times 2^{-n}{}_{10}$$

同样，问题在于如何确定a_{-1}，a_{-2}，$\cdots a_{-n}$。

为此，将上式两边同乘以2得：

$$1.3750 = a_{-1} + a_{-2}\times 2^{-1} + \cdots + a_{-n}\times 2^{-(n-1)} \qquad (5)$$

由于等式两边整数部分与小数部分必须分别相等，

$\therefore \quad a_{-1}=1$

$$0.3750=a_{-2}\times 2^{-1}+\cdots+a_{-n}2^{-(n-1)} \qquad (6)$$

等式(6)两边同乘以2，得：

$$0.75=a_{-2}+a_{-3}\times 2^{-1}\cdots+a_{-n}\times 2^{-(n-2)}$$

同理可得：$a_{-2}=0$，

……

用同样的方法作下去，可以将a_{-3}，a_{-4}，$\cdots a_{-n}$一个个确定下来，它的整个过程与结果可表述如下：

$$\begin{array}{r}0.6875\\ \times)\quad\quad 2\\ \hline 1.3750\end{array}\cdots\cdots\text{整数部分}=1=a_{-1}$$

$$\begin{array}{r}0.3750\\ \times)\quad\quad 2\\ \hline 0.7500\end{array}\cdots\cdots\text{整数部分}=0=a_{-2}$$

$$\begin{array}{r}0.7500\\ \times)\quad\quad 2\\ \hline 1.5000\end{array}\cdots\cdots\text{整数部分}=1=a_{-3}$$

$$\begin{array}{r}0.5000\\ \times)\quad\quad 2\\ \hline 1.0000\end{array}\cdots\text{整数部分}=1=a_{-4}$$

$\therefore \quad 0.6875=0.1011_2$

可见，要把十进位正纯小数转换成二进位正纯小数，只需把十进位正纯小数连续乘以2，每次取整数，并从上到下把全部整数，按从左到右依次横排，即得所求的二进位正纯小数，此种方法叫做2乘取整法。

例5　把十进位纯小数0.357转换成二进位纯小数。

解：
$$
\begin{array}{r l}
0.357 & \\
\times)\quad 2 & \\
\hline
0.714 & \cdots\cdots 整数部分=0=a_{-1} \\
0.714 & \\
\times)\quad 2 & \\
\hline
1.428 & \cdots\cdots 整数部分=1=a_{-2} \\
0.428 & \\
\times)\quad 2 & \\
\hline
0.856 & \cdots\cdots 整数部分=0=a_{-3} \\
0.856 & \\
\times)\quad 2 & \\
\hline
1.712 & \cdots\cdots 整数部分=1=a_{-4} \\
0.712 & \\
\times)\quad 2 & \\
\hline
1.424 & \cdots\cdots 整数部分=1=a_{-5}
\end{array}
$$

……

从例 5 看出，把十进位正纯小数转换成二进位正纯小数时，计算可能会无限制地进行下去，此时可按“零舍一入”法，将二进位数精确到某位，取近似数。如将上面例 5 得到的二进位数取到小数点后面第四位时，就有$0.357\approx0.0110_2$。

如果要把一个十进位带小数转换成二进位数，则可将其整数部分与小数部分分别进行转换，然后合拢，就可得到结果。

例 6　把十进位数83.625转换成八进位数。

解：∵
$$
\begin{array}{r|l l}
8 & 83 & \\
\hline
8 & 10 & \cdots\cdots 余数=3=a_0 \\
\hline
8 & 1 & \cdots\cdots 余数=2=a_1 \\
\hline
 & 0 & \cdots\cdots 余数=1=a_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
0.625 \\
\times)\quad 8 \\
\hline
5.000\cdots\cdots \\
整数部分 \\
=5=a_{-1}
\end{array}
$$

$\therefore\quad 83.625 = 123.5_8$

一般地，要把一个十进位带小数转换成 r 进位数，只需先将十进位数的整数部分施行 r 除取余法，纯小数部分施行 r 乘取整法，再把这两个结果分别作为所求的 r 进位数的整数部分、纯小数部分即可。

4．二、八进位数间的相互转换

把r_1进位数转换成r_2进位数一般可先把r_1进位数转换成十进位数，再转换成r_2进位数。但由于二、八进位数的基数之间有关系：$2^3 = 8$，所以，一位八进位数相当于三位二进位数，它们之间的对应关系，可列出对照表如下：

表 3

八进位数	0	1	2	3	4	5	6	7
二进位数	000	001	010	011	100	101	110	111

这样，八进位数与二进位数之间的转换就显得很方便。从八进位数转换为二进位数时，只要把每一位八进位数用相应的三位二进位数来替换即可；二进位数转换成八进位数时，只需把每三位二进位数用相应的一位八进位数来代替就行。

如把八进位数543.2转换成二进位数，

$$\because\quad \begin{array}{ccccccc} 5 & & 4 & & 3 & . & 2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 101 & & 100 & & 011 & . & 010 \end{array}$$

$\therefore\quad 543.2_8 = 101100011.010_2$.

例 7　把八进位数240、3.24转换成二进位数。

解：$240_8 = 10100000_2$；

$3.24_8 = 11.0101_2$.

把二进位数转换成八进位数时，仅须注意的是：数节的划分要以小数点为界，整数部分从2^0位起向左每三位作一节，最后一节不足三位的添 0 补足；纯小数部分以2^{-1}位起向右每三位作为一节，不足三位的也以 0 补足，然后再根据二、八进位数对照表，将二进位数中每一节换成相应的一个八进位数的数字。

例 8　把111010101110_2、1001.01011_2转换成八进位数。

解：
$$\because \begin{array}{cccc} \underline{111} & \underline{010} & \underline{101} & \underline{110} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 2 & 5 & 6 \end{array} \quad \therefore \; 111010101110_2 = 7256_8;$$

$$\because \begin{array}{ccccc} \underline{001} & \underline{001} & . & \underline{010} & \underline{110} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & . & 2 & 6 \end{array} \quad \therefore \; 1001.01011_2 = 11.26_8 .$$

习　题　一

1.填表：

记法数	r进制记数法	十进制记数法	八进制记数法	二进制记数法
数　码	$0, 1, 2, \cdots r-1$			
基　数	r			
位　率	$\cdots r^2$位 r^1位 r^0位 r^{-1}位 r^{-2}位$\cdots$			
幂和展开式	$\cdots a_2r^2 + a_1r^1 + a_0r^0 + a_{-1}r^{-1} + a_{-2}r^{-2}\cdots$			