上海大学出版社

2005年上海大学博士学位论文 71

非一致加权Sobolev空间中的二阶Jacobi逼近和Jacobi插值逼近及其应用

● 作 者：万正苏

● 专 业：计 算 数 学

● 导 师：郭 本 瑜

上海大学出版社
2005年上海大学博士学位论文 71

非一致加权Sobolev空间中的二阶Jacobi逼近和Jacobi插值逼近及其应用

● 作者：万正苏
● 专业：计算数学
● 导师：郭本瑜

Shanghai University Doctoral Dissertation (2005)

Second Order Jacobi Approximations and Jacobi Interpolation Approximations in Non-uniformly Weighted Sobolev Spaces with Their Applications

Candidate: Wan Zhengsu
Major: Computational Mathematics
Supervisor: Guo Benyu

Shanghai University Press
· Shanghai ·

图书在版编目(CIP)数据

2005年上海大学博士学位论文. 第2辑/博士论文编辑部编. —上海：上海大学出版社，2009.6
ISBN 978-7-81118-367-2

Ⅰ.2… Ⅱ.博… Ⅲ.博士—学位论文—汇编—上海市—2005 Ⅳ.G643.8

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第180878号

2005年上海大学博士学位论文

——第2辑

上海大学出版社出版发行

(上海市上大路99号 邮政编码200444)

(http://www.shangdapress.com 发行热线66135110)

出版人：姚铁军

*

南京展望文化发展有限公司排版

上海华业装潢印刷厂印刷 各地新华书店经销

开本890×1240 1/32 印张274.25 字数7641千

2009年6月第1版 2009年6月第1次印刷

印数：1～400

ISBN 978-7-81118-367-2/G·490 定价：980.00元(49册)

论文主评阅人

马和平	教授,上海大学数学系	200072
王元明	教授,华东师范大学数学系	200241
向新民	教授,上海师范大学数学系	200062

毕业论文答辩委员会主任和委员

主任	**杨忠华**	教授,上海师范大学数学系	200062
委员	**马和平**	教授,上海大学数学系	200072
	王翼飞	教授,上海大学数学系	200072
	田红炯	教授,上海师范大学数学系	200062
	徐承龙	教授,同济大学数学系	200092

答辩委员会对论文的评语

在许多实际问题中,微分方程的系数会以不同的方式退化,这给问题的计算和分析都带来新的困难.特别对高阶方程,相应的方法较少.该论文系统地研究了这些问题相关的逼近理论和误差估计,取得了许多新的结果.

本论文研究了高阶 Jacobi 逼近和 Jacobi 插值逼近的性质及其应用.本文的主要创新点为:1)以非一致加权 Sobolev 空间为分析框架,研究了高阶 Jacobi 谱逼近和插值逼近,得到不少新的成果,它们可以应用于高阶微分方程问题和数值方法的误差估计;2)考虑了系数奇异退化问题和对称区域问题,特别是高阶微分方程,给出了一些新的算法,计算结果显示了它的优越性,因此,万正苏的博士论文是很有意义的工作.

答辩委员会表决结果

答辩委员会认为这是一篇优秀的博士论文,一致通过博士论文答辩,并建议授予理学博士学位.

答辩委员会主任签名:杨忠华

2004年12月25日

摘　要

谱方法是微分方程数值求解的重要方法之一. Fourier 谱方法的思想源于 19 世纪,但各类谱方法真正成为一门理论体系完整的计算数学分支则是近三十多年的事.谱方法的优点在于它的高精度,即微分方程的真解越光滑,其数值解也就越精确.正因为如此,谱方法已经成功地应用到科学、技术、经济中许多问题的数值计算.例如热传导,流体动力学,量子力学,金融数学等领域有关问题的数值模拟.

本文研究非一致 Jacobi 加权 Sobolev 空间中的二阶 Jacobi 逼近和 Jacobi-Gauss 型插值逼近及其对四阶微分方程定解问题的应用.

在第二章,我们研究非一致 Jacobi 加权 Sobolev 空间中的二阶 Jacobi 逼近.我们引入了一些必需的非一致 Jacobi 加权 Sobolev 空间,定义了从这些空间到多项式空间的各种正交投影,并建立了相应的逼近理论.这些理论是四阶微分方程 Jacobi 谱方法的数学基础.我们以几个模型问题为例,设计了其谱格式,并证明了它们的收敛性.数值结果证实了理论分析的结论和这些算法的有效性.

在第三章,我们研究四阶问题的 Jacobi 拟谱方法.我们建立了非一致 Jacobi 加权 Sobolev 空间中的 Jacobi-Gauss 型插值的逼近理论.这些理论对于数值积分公式和微分、积分方程的数值方法都是非常重要的工具.然后我们以四阶奇异问题、二

维问题和非线性问题为例,构造了各种拟谱格式,并证明了它们的收敛性.数值结果证实了理论分析的结论和这些算法的有效性.

文中所涉及的方法和证明技巧也同样适用于其他四阶微分方程的数值解.

关键词 非一致 Jacobi 加权 Sobolev 空间,二阶 Jacobi 逼近,Jacobi-Gauss 型插值,四阶问题,奇异问题,谱方法,拟谱方法,谱精度,收敛性,数值结果

Abstract

Spectral method is one of important numerical method for solving differential equations. The basic idea of Fourier spectral methods stems from 19th. But only in the past three decades, vareous spectral methods formed a branch of computational mathematics with strict theortical ananlysis. The fascinating merit of spectral method is its high accuracy. Because of this, spectral method has been applied successfully to computation of many problems arising in science, technology and economy, such as numerical simulations of many problems in heat conduction, fluid dynamics, quantum mechanics and financial mathematics and so on.

In this paper, we investigate second-order Jacobi approximations and Jacobi-Gauss-type interpolation approximations in non-uniformaly Jacobi-weighted Sobolev spaces with their applications to fourth-order differential equations.

In Chapter Two, second-order Jacobi approximation in non-uniformly Jacobi-weighted Sobolev spaces is investigated. Some non-uniformly Jacobi-weighted Sobolev spaces are introduced. Some approximation results on various orthogonal projections in these spaces are established, which serve as the mathematical foundation of Jacobi spectral methods for differential equations of fourth-order. Jacobi spectral schemes are provided for several model problems. The convergence is proved. Numerical results agree well with theoretical analysis and show the efficiency of this new approach.

In Chapter Three, we investigate Jacobi pseudospectral method for fourth order problems. We establish some basic results on the Jacobi-Gauss-type interpolations in non-uniformly Jacobi-weighted Sobolev spaces, which serve as important tools in analysis of numerical quadratures, and numerical methods of differential and integral equations. Then we propose Jacobi pseudospectral schemes for several singular problems and multiple-dimensional problems of fourth order. Numerical results demonstrate the spectral accuracy of these schemes, and coincide well with theoretical analysis.

The main ideas and techniques used in this dissertation are also useful for other fourth-order differential equations.

Key words second-order Jacobi approximations, Jacobi-Gauss-type interpolation, non-uniformaly Jacobi-weighted Sobolev spaces, fourth-order differential equations, singular problems, Jacobi pseudospectral method, Jacobi spectral method, spectral accuracy, convergence, numerical results

目　　录

第一章 引 言

近三十年,谱方法蓬勃地发展起来,已成为数值求解微分方程的又一个强有力的工具. 谱方法的思想源于 Fourier 分析及其在计算热传导问题中的应用. 然而,太大的计算量使得它很长一段时间里没有得到很好的推广和发展,直到 1965 年快速 Fourier 变换的出现才真正推动了它的迅速发展. 1971 年,人们开始提出了以三角多项式求解不可压缩流体的谱方法和拟谱方法,应用 FFT 来实现具体算法(见[44]). 随后,谱方法被广泛地应用于求解各种实际问题,例如,大气环流问题[33],海流问题[16],数值湍流模拟[45, 46],非线性波及孤立子的计算. 有关工作还可见[5, 8, 9, 35, 36, 38]等.

和其他两大微分方程数值方法(有限差分法和有限元法)相比,谱方法最大的魅力是其"无穷阶"收敛率,即若原微分方程的解无限次可微,则由适当的谱方法所得到的近似解对原问题解的收敛速度比 N^{-1} 的任何幂次都更快,这里 N 是所取基函数的个数. 正因为如此,它的实际应用越来越广. 同时,关于它的数值分析理论也不断地丰富和完善,可见[7, 11 - 14, 20, 21]等.

Jacobi 谱方法和拟谱方法是指用 Jacobi 多项式来逼近微分方程真解的谱方法和拟谱方法. 特别地, 基于 Legendre 和 Chebyshev 逼近的 Legendre 和 Chebyshev 谱方法和拟谱方法已被成功地用来解决不少问题,见[7, 14, 20, 21]等. 但它们仅适用于矩形有界域上的非奇异问题,这就限制了其应用. 为了推广它的应用,一些数值分析工作者发展了 Jacobi 逼近的理论,并用它有效地解决了非奇异问题和无界域上的某些问题,见[22, 23, 28, 31]等. 另一方面,关于 Jacobi 逼近的一些结果已用于分析 p -有限元法、边界元法、轴对称区域问题的谱方法和有理谱方法,见[1, 2, 6, 26, 27, 39, 40, 42, 48]. 此

外,在包含函数区间端点的导数值的积分公式的研究中,我们也必须用一些关于Jacobi插值的结果,见[19].但到目前为止,还没有关于二阶Jacobi逼近和数学物理中四阶微分方程的Jacobi谱方法的工作.

在本文中,我们首先研究二阶Jacobi逼近及其对四阶微分方程的应用.众所周知,在许多实际问题中,微分方程中未知函数的导数的系数会以不同的方式退化(见[37]).因此我们需要考虑非一致加权Sobolev空间中的二阶Jacobi逼近,而不是通常的H^2-正交逼近.为此,我们引入几个非一致加权Sobolev空间中的二阶正交投影算子,并建立相应的逼近理论.这些理论是四阶问题Jacobi谱方法的数学基础.然后,作为应用的例子,我们构造了几个四阶问题的Jacobi谱格式,并证明其收敛性.数值结果表明这些方法的有效性.

在实际计算中,拟谱方法更可取,因为我们只需计算未知函数在插值点上的值.该方法节省了大量的工作,并易于处理非线性问题.已有的一些工作都是关于二阶问题的.然而,四阶问题也十分重要.例如,基于流函数形式的Navier-Stokes方程的数值模拟,既自动地满足不可压缩性条件,又保持自然边界条件.因为这是一个四阶非线性问题,我们在实际计算中就需要应用高阶Jacobi拟谱方法.

四阶问题拟谱方法的数学基础是高阶Jacobi-Gauss型插值,但早期的一些工作(如[14, 21]等)仅仅在标准的Sobolev空间中考虑插值逼近.然而在许多实际问题中,微分方程中未知函数导数的系数会出现不同情形的退化.在标准的Sobolev空间中,这些问题的真解是不存在的,也就是说,只有在某些非一致加权Sobolev空间中这些问题才是适定的.因此,我们需要在相应的非一致加权Sobolev空间中考虑Jacobi-Gauss型插值逼近.在这一方面已有了一些结果(见[28, 29]),它们对二阶问题的拟谱方法是很有用的.但到目前为止,还没有与适用于四阶问题拟谱方法的有关插值逼近相关的结果.

在本文的最后一章中,我们研究四阶问题的Jacobi拟谱方法.我们首先在某些非一致加权Sobolev空间中建立Jacobi-Gauss型插值

的逼近理论. 这些理论对于四阶问题的 Jacobi 拟谱方法的数值方法的分析是非常重要的. 然后,我们以四阶奇异问题、二维问题和非线性问题为例,构造了各种拟谱格式,并证明了它们的收敛性. 数值结果证实了这些算法的有效性.

文中所涉及的方法和证明技巧也同样适用于其他四阶微分方程的数值解.

第二章　非一致加权 Sobolev 空间中的二阶 Jacobi 逼近及其应用

在本章中，我们研究非一致 Jacobi 加权 Sobolev 空间中的二阶 Jacobi 正交逼近及其对四阶微分方程定解问题数值解法的应用. 在第一节中，我们建立了非一致加权空间中二阶 Jacobi 逼近的相关理论. 在第二节中，我们研究一个特殊的正交投影，该投影可用于分析某些轴对称问题的 Jacobi 谱方法. 在第三节中，我们提出求解几个四阶问题的 Jacobi 谱格式，并证明其收敛性. 在第四节中，我们给出一些数值结果. 在最后一节中，我们对本章结果作一些小结. 虽然我们只考虑几个模型问题，但本章所涉及的方法和证明技巧对其他的四阶问题也是适用的.

§2.1　二阶 Jacobi 正交逼近

我们给出一些二阶 Jacobi 正交逼近的主要结果，这些结果是四阶问题 Jacobi 谱方法的数学基础.

§2.1.1　Jacobi 多项式

记 $\Lambda=\{x\mid |x|<1\}$，$\chi(x)$ 为加权函数. $\mathbb{N}$ 为所有非负整数的集合. 对任一 $r\in\mathbb{N}$，我们在通常意义下定义加权 Sobolev 空间 $H_\chi^r(\Lambda)$ 及其内积 $(u,v)_{r,\chi}$、半模 $|v|_{r,\mu}$ 和模 $\|v\|_{r,\chi}$. 特别地，我们分别记空间 $L_\chi^2(\Lambda)$ 的内积和模为 $(u,v)_\chi$ 和 $\|v\|_\chi$. 对所有 $r>0$，我们如 [4] 中所述方法，利用空间插值定义 $H_\chi^r(\Lambda)$ 及其模. 记在 Λ 中有紧支集的所有无穷次可微函数的集合为 $D(\Lambda)$. $H_{0,\chi}^r(\Lambda)$ 表示 $D(\Lambda)$ 在 $H_\chi^r(\Lambda)$

中的闭包. 当 $\chi(x)\equiv 1$ 时，我们通常省略记号 χ.

记Jacobi 多项式为 $J_l^{(\alpha,\beta)}(x)$，$l=1, 2, \cdots$. 令 $\chi^{(\alpha,\beta)}(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$，$\alpha$，$\beta>-1$. 我们首先回顾 Jacobi 多项式的一些性质.

Jacobi 多项式 $J_l^{(\alpha,\beta)}(x)$，$l=0, 1, 2, \cdots$，是 Sturm-Liouville 问题

$$\partial_x(\chi^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)\partial_x v(x))+\lambda\chi^{(\alpha,\beta)}(x)v(x)=0,\ x\in\Lambda \tag{2.1.1}$$

的特征函数,相应的特征值为

$$\lambda_l^{(\alpha,\beta)}=l(l+\alpha+\beta+1),\ l=0, 1, 2, \cdots \tag{2.1.2}$$

Jacobi 多项式 $J_l^{(\alpha,\beta)}(x)$ 的首项系数为

$$K_l^{(\alpha,\beta)}=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2l+1)}{2^l l!\Gamma(\alpha+\beta+l+1)} \tag{2.1.3}$$

且有

$$J_l^{(\alpha,\beta)}(-x)=(-1)^l J_l^{(\beta,\alpha)}(x),\ J_l^{(\alpha,\beta)}(1)=\frac{\Gamma(l+\alpha+1)}{l!\Gamma(\alpha+1)} \tag{2.1.4}$$

Jacobi 多项式满足如下的迭代关系（见[53]）

$$\partial_x J_l^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{2}(l+\alpha+\beta+1)J_{l-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x),\qquad l\geqslant 1 \tag{2.1.5}$$

记 Gamma 函数为 $\Gamma(x)$. 我们由[53]可知

$$J_l^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{\Gamma(l+\beta+1)}{\Gamma(l+\alpha+\beta+1)}\sum_{k=0}^{l}\frac{(2k+\alpha+\beta)\Gamma(k+\alpha+\beta)}{\Gamma(k+\beta+1)}J_k^{(\alpha-1,\beta)}(x) \tag{2.1.6}$$

$$J_l^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{\Gamma(l+\alpha+1)}{\Gamma(l+\alpha+\beta+1)}\sum_{k=0}^{l}(-1)^{l-k}\frac{(2k+\alpha+\beta)\Gamma(k+\alpha+\beta)}{\Gamma(k+\alpha+1)}J_k^{(\alpha,\beta-1)}(x) \tag{2.1.7}$$