普通高等教育"十二五"规划教材

材料力学解题指导

马红艳　主编
李　锋　主审

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

材料力学解题指导

马红艳　主　编
李　锋　主　审

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是材料力学课程的学习辅导和备考用书。全书共15章，内容包括材料力学基本概念、轴向拉伸和压缩、剪切、扭转、弯曲内力、弯曲应力、弯曲变形、应力状态与强度理论、组合变形、压杆稳定、能量法、静不定结构、动载荷、疲劳，以及截面图形的几何性质等，适用于多学时材料力学课程的学习。

书中每章包括三部分内容：重点内容概要、典型例题和习题选解。书末附有期末考试模拟试题、考研模拟试题及试题解答。题目根据材料力学课程要求精选而成，形式多样，包括判断、选择、计算、推导证明等类型。

本书可供学习材料力学课程的学生和教师使用，也可作为硕士研究生入学考试、力学竞赛的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学解题指导/马红艳主编．—北京：科学出版社，2014.3
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-040054-3

Ⅰ.①材… Ⅱ.①马… Ⅲ.①材料力学-高等学校-题解 Ⅳ.①TB301-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第044853号

责任编辑：朱晓颖　张丽花／责任校对：鲁　素
责任印制：闫　磊／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
铭浩彩色印装有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2014年3月第　一　版　开本：787×1092 1/16
2014年3月第一次印刷　印张：18
字数：472 000

定价：39.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

本书根据国家教育部工科力学课程教学指导委员会制定的“材料力学课程教学基本要求”编写，作为辅助参考书与材料力学教材配套使用。全书共15章，内容包括材料力学基本概念、轴向拉伸和压缩、剪切、扭转、弯曲内力、弯曲应力、弯曲变形、应力状态与强度理论、组合变形、压杆稳定、能量法、静不定结构、动载荷、疲劳，以及截面图形的几何性质等，适用于多学时材料力学课程的学习。

书中每章包括三部分内容：重点内容概要、典型例题和习题选解。此外，书后附有期末考试模拟试题、考研模拟试题及解答。书中的题目根据材料力学课程要求精选而成，形式多样，既有难度不同的计算题，也有判断题、选择题、推导证明题和论证题等，基本涵盖了材料力学课程的各项内容，其中题号注有(*)者为综合性内容，注有(**)者为扩充性内容。书中除了给出解题的全过程外，还对解题思路和结果进行讨论，希望能起到触类旁通、举一反三的作用，以满足学生考研、力学竞赛等要求及掌握材料力学原理和方法的进一步需求。

全书由马红艳主编，参加本书编写工作的有马红艳、李锋、季顺迎、毕祥军、张昭、王博和马国军。此外，王守新、关东媛等同志也参加了本书的编写讨论，提出了许多建设性意见，在此深表感谢。

本书得到大连理工大学教务处教材出版基金的资助，也得到大连理工大学运载工程与力学学部、工程力学系的大力支持。李锋老师对本书给予了悉心的指导，并审阅了全部书稿，在此表示诚挚的感谢。

受作者水平所限，疏漏和错误在所难免，恳请读者指正。

编　者

2013年12月

目　　录

第 1 章 材料力学基本概念

1.1 重点内容提要

1. 材料力学的任务

材料力学的任务是研究构件的强度、刚度和稳定性条件，为经济合理地设计杆件提供基本理论和方法。

2. 材料力学的基本假设

材料力学的研究对象主要是等直杆件，其材料一般是处于线弹性状态下的可变形固体，为简化分析和计算，且得到满足精度要求的结果，假设材料是连续的、均匀的和各向同性的，且变形和杆件原始尺寸相比是微小的。

3. 外力模型

有集中力、分布力、集中力偶、分布力偶等。使物体产生明显加速度的载荷称为动载荷。

4. 内力

因外力作用引起的构件内部各部分之间固有内力的改变量称为内力。不同截面上的内力数值与方向各不相同，内力是连续分布的，通常计算杆件横截面上的内力坐标分量，简称内力，即轴力 F_N，剪力 F_{Sy}、F_{Sz}，扭矩 T，弯矩 M_y、M_z。它们均为代数量。

5. 截面法

将杆件假想截成两部分，利用其中一部分的平衡方程计算出截面上的内力，这种方法称为截面法。它是材料力学中分析内力的基本方法。用截面法求内力，可以将一个截面上的内力理解为截面两侧一部分对另一部分的作用力。

6. 应力

截面一点处的内力集度称为应力，应力为矢量。从量纲上看应力可理解成单位面积上的内力。

实际计算中常用正应力 σ 和切应力（又称剪应力）τ。正应力 σ 是截面的法向应力，切应力 τ 是截面的切向应力，均为代数量。规定正应力以离开截面为正（拉伸），指向截面为负。平面问题中，对研究对象内任一点呈顺时针力矩的切应力规定为正，逆时针的为负。

应力的常用单位为 MPa，$1\text{MPa}=10^6\text{N/m}^2$。

应力是强度计算的基本参数，计算中应注意是哪个截面上、哪个点的应力，不应只记计算公式。

7. 位移

线位移——构件内一点空间坐标位置的改变量，矢量。

角位移——构件内一条线段或一个平面的空间方位的改变量，矢量。

材料力学问题中，位移通常用其坐标分量表述，此时为代数量。

8. 变形、应变

构件的尺寸改变和形状改变称为变形。变形是引起位移的原因，某些情况下位移量又可反映变形的程度。因此位移和变形计算是材料力学的基本内容之一。

一点处的变形用应变描述，分为线应变和切应变。

线应变 ε——构件内一点处在某个方向上单位长度的尺寸变化量，为代数量，规定伸长为正，缩短为负，无量纲。线应变又称正应变。

切应变 γ——构件一点处在指定平面内两垂直线段的直角改变量，为代数量，无量纲，计算时一般用弧度(rad)表示。切应变又称剪应变。

1.2 典型例题

例 1-1 判断是非。图 1-1 中 AB 杆受到外力 F 作用后产生变形，因此在求 A 端的约束反力时只能按其变形后的尺寸计算，而不能用变形前尺寸计算。

答 错。材料力学研究小变形问题，变形量一般不超过杆件尺寸的千分之一，按杆件原始尺寸计算 A 端的约束力可使计算简化，且具有足够的精度，所以不必考虑其变形量带来的影响。在材料力学问题中，研究构件的平衡时一般都可按构件的原始尺寸计算。

例 1-2 判断是非。为了使分析图 1-2(a)的受力与变形过程简化，可用其合力 F_R 代替均布载荷 q 的作用，如图 1-2(b)所示。

答 错。静力等效是对刚体而言的，用于变形体时只有在求约束力时成立，求其他问题如求内力和变形时不再成立，因此解材料力学问题时，不能随意改变力的作用方式和作用点位置，刚体静力学中的一些原理如力线平移定理、力偶在其作用面内可任意移动转动等原理要慎用。

例 1-3 判断是非。用截面法计算图 1-3(a)所示杆 B 截面的内力时，取右半 BC 段作研究对象时可得 $F_N=F$，见图 1-3(b)，而取左半 AB 段研究时则因其上没有载荷作用，见图 1-3(c)，所以无内力。

答 错。外力包括载荷和约束力，研究平衡问题时它们都参与平衡方程，题中研究左半 AB 段的平衡不考虑 A 端约束力是不正确的。正确结果是不论取左半段还是取右半段计算，B 截面的内力都是 $F_N=F$。

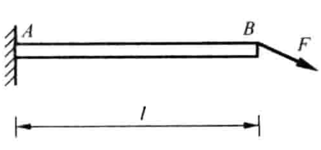

图 1-1

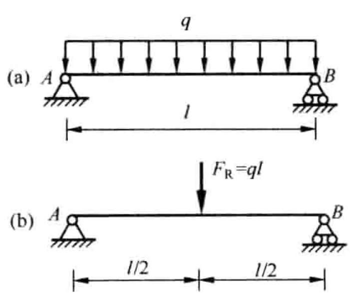

图 1-2

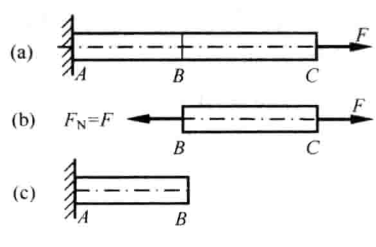

图 1-3

例 1-4　选择题。图 1-4 中虚线表示微元体变形后的形状，则 A 点的切应变为________。

A. $2°$；　　B. $88°$；

C. 0.0349rad；　　D. $\left(\frac{\pi}{2}-0.0349\right)$ rad。

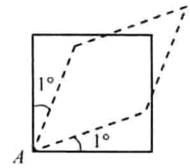

图 1-4

答　C。切应变为直角改变量，且用弧度表示，A 点的直角减少了 $2°$，即 0.0349rad，因此 C 是正确的。

1.3　习题选解

1-1　判断是非。

(1) 在杆件的某一截面上，正应力方向一定互相平行；

(2) 在杆件的某一截面上，切应力方向一定互相平行。

答　(1)正确。正应力的方向必与该截面的法线方向平行。(2)错误。切应力作用在该截面内，虽然位于同一平面内，但方向却不一定平行。

1-2　选择题。当力偶 M_0 在梁 AB 上任意移动时(图 1-5)，梁的________。

A. 约束力不变，B 端位移变化；

B. 约束力和 B 端位移都不变；

C. 约束力变化，B 端位移不变；

D. 约束力和 B 端位移都变化。

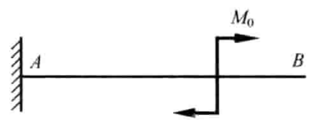

图 1-5

答　A。A 端约束力只存在约束力偶，约束力偶矩数值等于 M_0，与外力偶 M_0 的位置无关。B 端位移包括线位移和角位移，它们都与外力偶 M_0 作用位置有关，所以 M_0 移动时 B 端位移变化。

1-3　平面刚架如图 1-6(a)所示，求其 AB 段任一截面上的内力大小。

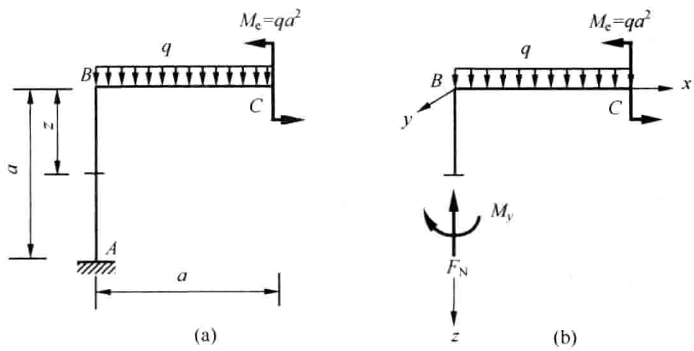

图 1-6

解　建立坐标系如图 1-6(b)所示，AB 段任一横截面的位置可用 z 表示，考虑该截面上方部分的平衡，z 截面的内力分量只有轴力 F_N 和弯矩 M_y 不为零：

$$\sum F_z=0,\quad -F_N+qa=0,\quad F_N=qa(\text{压})$$

$$\sum M_y=0,\quad -M_y-\frac{1}{2}qa^2+M_e=0,\quad M_y=\frac{1}{2}qa^2$$

F_N 和 M_y 的结果均为正值，表示它们的实际方向或转向都与图中所设相同。

1-4　减振机构如图 1-7(a)所示，若已知刚臂向下位移了 0.01mm，试求橡皮的平均切应变。

解 图 1-7(b)所示，橡皮的平均切应变

$$\gamma \approx \tan\gamma = \frac{0.01}{5} = 0.002$$

此题应用了小变形假设。

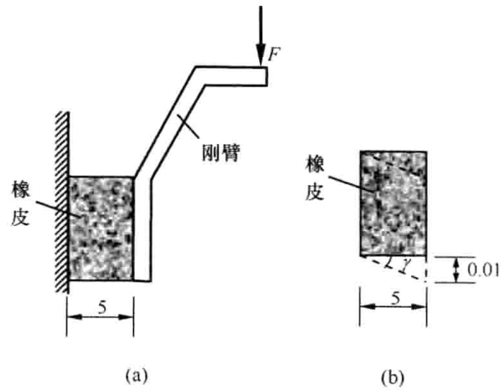

图 1-7

1-5 混凝土圆柱受压破坏，破坏前轴向平均线应变为 -1200×10^{-6}，若该圆柱原高为 400mm，求破坏前它缩短了多少？

解 此题 $l=400\text{mm}$，$\varepsilon=-1200\times10^{-6}$。

由 $\varepsilon=\dfrac{\Delta l}{l}$，得

$$\Delta l = \varepsilon l = -1200\times10^{-6}\times400 = -0.48(\text{mm})$$

即破坏前圆柱缩短了 0.48mm。

1-6 薄圆环的平均直径为 D，变形后的平均直径增加了 ΔD，如图 1-8 所示，试证明该圆环沿圆周方向的平均线应变 $\varepsilon=\dfrac{\Delta D}{D}$。

证明 圆环沿圆周方向的平均线应变可用其周长的平均线应变表示。

$$\varepsilon=\frac{\pi(D+\Delta D)-\pi D}{\pi D}=\frac{\Delta D}{D}$$

证毕。

1-7 图 1-9 所示的均质矩形薄板 A 点在 AB、AC 面上的平均切应变为 $\gamma=1000\times10^{-6}$，虚线表示变形后的形状，试求 B 点的水平线位移是多少？

解 $BB'=AB\cdot\tan\gamma\approx AB\cdot\gamma=10\times1000\times10^{-6}=0.01(\text{mm})$

1-8 图 1-10 所示的三角形薄板 ABC 受力变形后，B 点垂直向上位移 0.03mm，AB、AC 仍保持为直线(虚线)。试求沿 OB 的平均线应变及 B 点沿 AB、BC 的切应变。

解 OB 的平均线应变 ε 为

$$\varepsilon=\frac{BB'}{OB}=\frac{0.03}{120}=2.5\times10^{-4}$$

$\angle BAC$ 的改变量 θ 为

$$\theta=\frac{BB'\cos45^\circ}{AB}=\frac{BB'\cos45^\circ}{AC\cos45^\circ}=\frac{BB'}{AC}=\frac{0.03}{240}=1.25\times10^{-4}(\text{rad})$$

B 点所求的切应变 γ 为

$$\gamma=2\theta=2\times1.25\times10^{-4}=2.5\times10^{-4}(\text{rad})$$

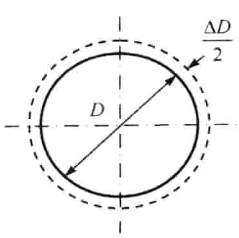

图 1-8

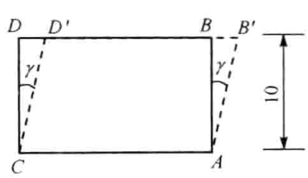

图 1-9

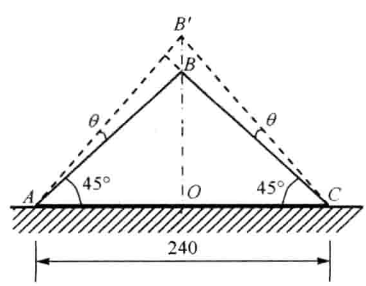

图 1-10

第 2 章　轴向拉伸和压缩

2.1　重点内容概要

本章研究拉(压)杆件的受力情况,同时引出了内力、应力、变形以及强度条件、材料的力学性能等一系列主要概念,这些概念不仅与本章所研究的问题有关,也是以后各章研究构件发生其他变形的基础。

1. 轴向拉(压)杆的内力

轴向拉(压)杆的轴向内力称为轴力。当轴力的方向与截面外法线方向一致时为正,反之为负。求轴力采用截面法。

2. 应力的概念

(1) 截面上一点的应力。截面上任一点单位面积上分布的内力(内力集度)称为该点的应力,即

$$p=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta A}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A}$$

一点处的应力可分解为两个应力分量:垂直于截面的分量为正应力 σ;与截面相切的分量为切应力 τ。

(2) 横截面上的正应力。根据平面假设,轴向拉(压)杆任意两横截面间的纵向纤维变形均相同,受力也相同,故各点的正应力均相等。

$$\sigma=\frac{F_{\mathrm{N}}}{A}$$

(3) 斜截面上的应力。与横截面夹角为 α 的斜截面上的应力为

$$\begin{cases}\sigma_\alpha=\sigma\cos^2\alpha\\ \tau_\alpha=\dfrac{\sigma}{2}\sin2\alpha\end{cases}$$

3. 轴向拉压杆的强度计算

等截面直杆轴向拉(压)时的强度条件为

$$\sigma_{\max}=\frac{F_{\mathrm{Nmax}}}{A}\leqslant[\sigma]$$

其中
$$[\sigma]=\frac{\sigma_{\mathrm{u}}}{n}$$

强度计算一般有三类问题:

(1) 强度校核。已知外力 F,杆件横截面面积 A,材料许用应力$[\sigma]$,校核该杆件是否安全。

(2) 设计截面。已知外力 F,材料许用应力$[\sigma]$,设计杆件截面:$A\geqslant\dfrac{F_{\mathrm{Nmax}}}{[\sigma]}$。

(3) 确定许用载荷。已知杆件横截面面积 A，材料许用应用$[\sigma]$，求所能承受的最大外力。一般先求出许用轴力 $F_{Nmax} \leqslant A[\sigma]$，再确定许用载荷。

4. 轴向拉(压)杆的变形计算

轴向拉(压)杆的轴向线应变：$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l}$；

轴向拉(压)杆的横向线应变：$\varepsilon'=\frac{\Delta d}{d}$；

泊松比：$\nu=\left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|$；

胡克定律：在弹性范围内应力和应变成正比，比例常数为弹性模量 E，即 $E=\frac{\sigma}{\varepsilon}$；

轴向拉(压)杆的变形利用胡克定律求得：$\Delta l=\frac{F_N l}{EA}$。

5. 材料在拉伸、压缩时的力学性能

重点掌握低碳钢在常温、静载拉伸试验中以 $\sigma=\frac{F}{A}$ 为纵坐标，以 $\varepsilon=\frac{\Delta l}{l}$ 为横坐标得到的 σ-ε 曲线。

(1) 变形的四个阶段：弹性阶段、屈服阶段、强化阶段、颈缩阶段。

(2) 三个强度指标：比例极限 σ_p、屈服极限 σ_s 或 $\sigma_{0.2}$(塑性材料)、抗拉强度极限 σ_b(抗压强度极限 σ_{bc})(脆性材料)。

(3) 一个弹性指标：材料的弹性模量 $E=\frac{\sigma}{\varepsilon}$。

(4) 两个塑性指标。

断后伸长率：$\delta=\frac{l_1-l}{l}\times 100\%$；

截面收缩率：$\psi=\frac{A-A_1}{A}\times 100\%$；

两类工程材料：塑性材料 $\delta \geqslant 5\%$，脆性材料 $\delta < 5\%$。

(5) 卸载定律、冷作硬化、冷拉时效。

6. 轴向拉压超静定问题

未知力的数目大于静力平衡方程的数目，即根据平衡条件不能求出全部未知力，这类问题称为超静定问题。超静定结构的特点是结构内部或外部存在多余约束。多余约束的数目称为超静定次数。按静力、几何、物理三方面的关系求解超静定问题。

2.2 典型例题

例 2-1 判断下面说法是否正确：拉压杆内不存在切应力。

答 错。拉压杆横截面上只存在正应力，不存在切应力，但斜截面上通常都存在切应力。

例 2-2 判断下面计算是否正确：一钢质杆的弹性模量为 $E=200\text{GPa}$，比例极限为 $\sigma_P=$

200MPa，当轴向线应变为 $\varepsilon=0.002$ 时，其横截面上的正应力为 $\sigma=E\varepsilon=200\times10^9\times0.002=400\text{MPa}$。

答 错。单从计算结果 $\sigma=400\text{MPa}$ 看，应力就已经超过了材料的比例极限 $\sigma_P=200\text{MPa}$，此时胡克定律已不适用。若从轴向线应变的角度考虑，可用胡克定律计算的应变值上限为 $\varepsilon\leqslant\frac{\sigma_P}{E}=\frac{200\times10^6}{200\times10^9}\approx0.001$。此题给出的线应变 0.002 已超过了这个范围，因此不能用胡克定律计算。

例 2-3 判断下面说法是否正确：由胡克定律 $\Delta l=\frac{F_N l}{EA}$ 可得 $E=\frac{F_N l}{A\cdot\Delta l}$，所以材料的弹性模量 E 与拉压杆的轴力大小成正比，与横截面面积成反比。

答 错。弹性模量 E 是材料的一个弹性常数，反映材料的弹性性质，而与题目中所述各参数无关。

例 2-4 判断下面说法是否正确：滑移线是切应力造成的。

答 错。滑移线是由最大切应力造成的。

例 2-5 判断下面说法是否正确：图 2-1(a)所示结构中，很容易判断出杆 2 是零杆，因此无变形，节点 A 只产生竖向线位移而不产生水平线位移。

答 错。结构受力变形除应满足力的平衡条件外，还应满足变形协调条件，二者缺一不可。如果节点 A 只有竖向线位移，例如设位移到 A'' 点，不难看出，1、2 两杆都要发生伸长变形，这与杆 2 无变形是矛盾的，因此 A 点不可能只产生竖向线位移而不产生水平线位移。A 点位移后的位置可由以下方法确定，如图 2-1(b)所示，过 A 点作杆 2 垂线，过 A'' 点作杆 1 垂线，此二垂线交点 A' 即为 A 点位移后的大致位置。显然 A 点不仅有竖向线位移，而且有水平线位移。

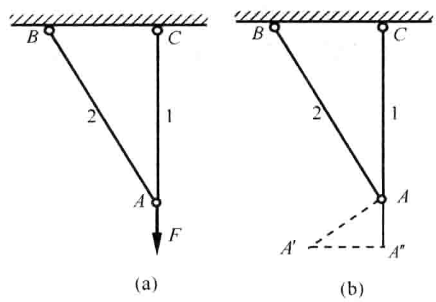

图 2-1

例 2-6 选择题。圆截面低碳钢试件接近拉断时，标距由 100mm 变为 130mm，伸长 30mm，颈缩处直径由 10mm 变为 7mm，减少 3mm，其泊松比________。

A. $\nu=\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}=\frac{-3/10}{30/100}=-1$；　　B. $\nu=\left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|=\frac{3/10}{30/100}=1$，

C. $\nu=\left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|=\frac{3/7}{30/130}=1.86$；　　D. 不能用上述数据得出。

答 D。泊松比是材料的一个弹性常数，钢试件接近拉断时已远远超过了弹性阶段，因此所给数据不能用来计算泊松比。

例 2-7 选择题。圆管在线弹性范围内轴向拉伸变形，其________。

A. 外直径减少，壁厚不变；　　B. 外直径不变，壁厚减少；

C. 外直径减少，壁厚也减少；　　D. 外直径减少，壁厚增大。

答 C。直杆拉伸变形时，横向尺寸减小，外直径和壁厚都是横向尺寸，自然都减小。

例 2-8 选择题。加载前，用两组正交平行线在试件表面画上斜网格如图 2-2 所示，在均布载荷作用下试件产生弹性变形，下述变形规律不正确的是________。

A. 原平行线仍然平行；　　　　　B. 斜直线的 α 角不变；

C. 斜直线的 α 角减小；　　　　　D. 平行线的间距改变。

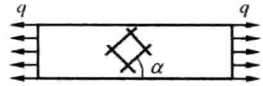

图 2-2

答　B。拉杆在发生伸长变形时，斜截面上不仅存在正应力而且存在切应力，切应力引起斜截面发生错动，所以斜直线的 α 角变小。

例 2-9　图 2-3(a)所示简易起重机架结构中，AB 杆和 AC 杆的横截面积分别为 $A_1=200\text{mm}^2$，$A_2=173.2\text{mm}^2$，材料的许用应力分别为$[\sigma]_1=160\text{MPa}$，$[\sigma]_2=100\text{MPa}$。求此结构的许可载荷值。

解　(1) 各杆内力计算。

AB、AC 两杆均为二力杆，内力只有轴力，可先假设为拉力，如图 2-3(b)所示。

$$\sum F_y=0$$

$$-F_{N2}\sin 30^\circ-F\cos 30^\circ=0$$

$$F_{N2}=-\sqrt{3}F$$

$$\sum F_x=0$$

$$-F_{N1}-F_{N2}\cos 30^\circ+F\sin 30^\circ=0$$

$$F_{N1}=2F$$

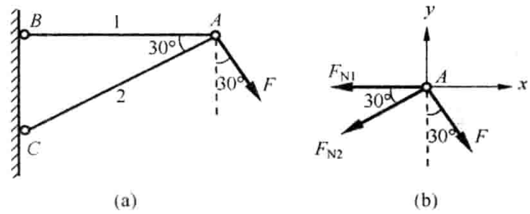

图 2-3

(2) 确定结构的许可载荷。

许可载荷由两杆的强度条件确定。

$$\frac{F_{N1}}{A_1}=\frac{2F}{A_1}\leqslant[\sigma]_1$$

$$F\leqslant\frac{1}{2}A_1\,[\sigma]_1=\frac{1}{2}\times200\times160=16(\text{kN})$$

$$\frac{F_{N2}}{A_2}=\frac{\sqrt{3}F}{A_2}\leqslant[\sigma]_2$$

$$F\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}A_2\,[\sigma]_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\times173.2\times100=10(\text{kN})$$

所以，此结构许可载荷为$[F]=10\text{kN}$。

例 2-10　均质等直杆重量为 W，横截面面积为 A，材料的弹性模量为 E，水平长度为 l，求竖放时(图 2-4)它的高度为多少？

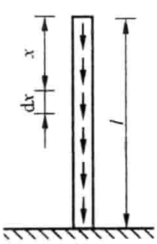

图 2-4

解　竖放时杆在自重作用下将缩短。

x 截面的轴力　$F_N=\frac{x}{l}W$(压力)

微段 $\mathrm{d}x$ 在轴力 F_N作用下的缩短量为

$$\mathrm{d}(\Delta l)=\frac{F_N\mathrm{d}x}{EA}=\frac{Wx}{lEA}\mathrm{d}x$$

总缩短量为

$$\Delta l=\int_0^l\frac{F_N\mathrm{d}x}{EA}=\frac{Wl}{2EA}$$

此杆竖放时的高度为　$l'=l-\Delta l=l\left(1-\frac{W}{2EA}\right)$

例 2-11　图 2-5(a)所示薄壁圆筒内径 $d=150\text{mm}$，壁厚为 $\delta=3\text{mm}$，受压力 $p=3\text{MPa}$ 作用，材料的弹性模量 $E=200\text{GPa}$。试求其周向拉应力和平均直径的变化。

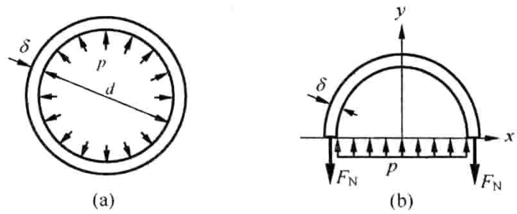

图 2-5

解 （1）内力计算。

截面法：取上半部分为研究对象，如图 2-5(b) 所示，由对称性，自然满足 $\sum F_x = 0$，研究对象沿轴向取单位长度 1。

$$\sum F_y = 0, \quad pd \times 1 - 2F_N = 0, \quad F_N = \frac{pd}{2}$$

（2）应力计算 $\sigma = \dfrac{F_N}{A} = \dfrac{pd}{2\delta \times 1} = \dfrac{3\times 10^6 \times 150 \times 10^{-3}}{2\times 3\times 10^{-3}} = 75(\text{MPa})$

（3）变形计算

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{\sigma}{E} \cdot \pi d$$

$$\Delta l = \pi d_1 - \pi d = \pi \cdot \Delta d$$

$$\Delta d = \frac{\sigma}{E} \cdot d = \frac{75}{200\times 10^3} \times 150 = 5.63\times 10^{-2}(\text{mm})$$

例 2-12 图 2-6(a)所示结构中 AB、AC 两杆材料相同，弹性模量为 E，横截面面积为 A，AB 杆长为 l，AC 杆长为 $2l$，求在载荷 F 作用下节点 A 的线位移。

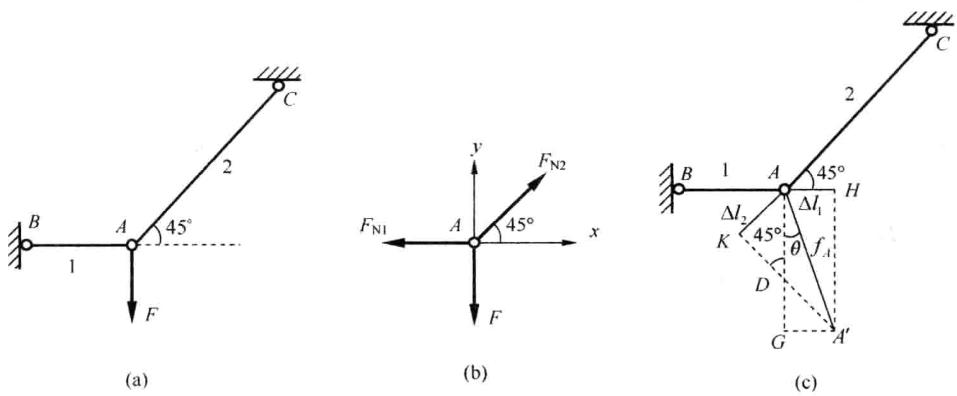

图 2-6

解 （1）各杆内力计算。

AB、AC 两杆均为二力杆，内力只有轴力，可先假设为拉力，如图 2-6(b)所示。

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N2}\sin 45^\circ - F = 0, \quad F_{N2} = \sqrt{2}F$$

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{N1} + F_{N2}\cos 45^\circ = 0, \quad F_{N1} = F$$

（2）A 点位移计算。

由于两杆轴力均为拉力，所以变形均为伸长。设 AB 杆伸长为 Δl_1，AC 杆伸长为 Δl_2，见

图 2-6(c)。变形后两杆节点 A' 的位置可以这样确定：在小变形条件下，过 H 点作 AB 杆垂线，过 K 点作 AC 杆垂线，两垂线交点即为 A'，向量 AA' 即为节点 A 的线位移。

由图 2-6(c)，A 点的水平线位移 u_A 为

$$u_A=\overline{AH}=\Delta l_1=\frac{F_{N1}l_1}{E_1A_1}=\frac{Fl}{EA}\ (\rightarrow)$$

A 点的竖直线位移 w_A 为

$$w_A=\overline{AD}+\overline{DG}=\frac{\Delta l_2}{\sin 45^\circ}+\Delta l_1\cdot\cot 45^\circ=\frac{F_{N2}l_2}{E_2A_2\sin 45^\circ}+\frac{F_{N1}l_1}{E_1A_1}\cot 45^\circ=\frac{5Fl}{EA}\ (\downarrow)$$

A 点位移 f_A 为 $\quad f_A=\sqrt{u_A^2+w_A^2}=\sqrt{\left(\frac{Fl}{EA}\right)^2+\left(\frac{5Fl}{EA}\right)^2}=\sqrt{26}\frac{Fl}{EA}=5.10\frac{Fl}{EA}$

位移方向 θ 为 $\quad \theta=\arctan\frac{u_A}{w_A}=\arctan\frac{1}{5}=11.3^\circ$

例 2-13 图 2-7(a)所示平面桁架中，AB、AC、AD 三杆长度均为 l。AC 杆与 AD 杆的拉压刚度相同，且两杆保持相互垂直。试证明，无论 AB 杆的拉伸刚度如何，也不论 AB 杆位置如何，只要载荷 F 作用线与 AB 杆垂直，AB 杆内就无内力。

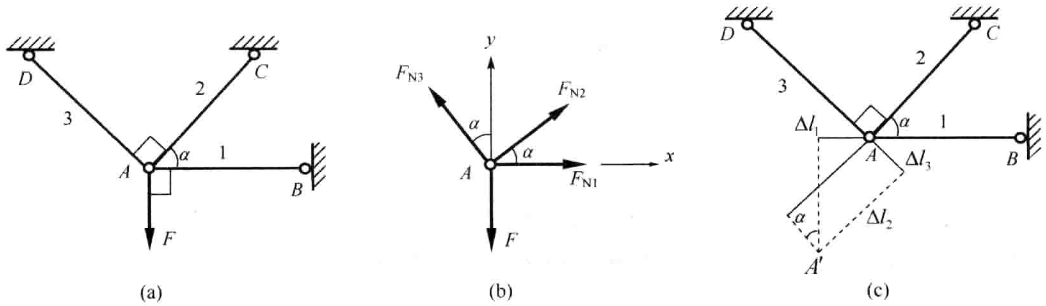

图 2-7

证明 (1) 受力分析。

如图 2-7(b)所示，此结构未知内力有三个，而独立平衡方程只有两个，因此是一次静不定结构。

(2) 静力学平衡方程。

设三杆轴力均为正，则

$$\sum F_x=0,\quad F_{N1}+F_{N2}\cos\alpha-F_{N3}\sin\alpha=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{N2}\sin\alpha+F_{N3}\cos\alpha-F=0$$

(3) 几何方程。

因三杆轴力均已设为正，所以三杆变形均设为伸长，变形几何关系图应如图 2-7(c)所示。

$$\frac{\Delta l_1}{\cos\alpha}+\Delta l_3\cdot\tan\alpha=\Delta l_2$$

(4) 物理关系。

由胡克定律得各杆变形为

$$\Delta l_1=\frac{F_{N1}l_1}{E_1A_1},\quad \Delta l_2=\frac{F_{N2}l_2}{E_2A_2},\quad \Delta l_3=\frac{F_{N3}l_3}{E_3A_3}$$

由题知　$l_1=l_2=l_3=l, E_2A_2=E_3A_3=\xi E_1A_1$。其中，$\xi=\dfrac{E_2A_2}{E_1A_1}=\dfrac{E_3A_3}{E_1A_1}$，为杆 2、3 拉伸刚度与杆 1 拉伸刚度之比。

将物理关系代入几何方程，化简后可得补充方程

$$\xi F_{N1}+F_{N3}\sin\alpha=F_{N2}\cos\alpha$$

(5) 联立求解。静力学平衡方程与补充方程联立可得 $F_{N1}=0, F_{N2}=F\sin\alpha, F_{N3}=F\cos\alpha$，即证。

讨论：

(1) 内力假设图 2-7(b)与变形假设图 2-7(c)应协调一致；

(2) 证明过程中得到的几何方程分母中有 $\cos\alpha$ 项，对于 $\cos\alpha\to 0$ 的情形并不影响计算结果，读者可自行验证。

例 2-14　某低碳钢弹性模量为 $E=200\text{GPa}$，比例极限 $\sigma_P=240\text{MPa}$，拉伸试验横截面正应力达 $\sigma=300\text{MPa}$ 时，测得轴向线应变为 $\varepsilon=0.0035$，此时立刻卸载至 $\sigma=0$，求试件轴向残余应变 ε_P 为多少？

解　如图 2-8 所示，当应力超过比例极限后，在强化阶段应变 ε 包括两部分，其中可以恢复的弹性应变为

$$\varepsilon_e=\frac{\sigma}{E}=\frac{300\times10^6}{200\times10^9}=0.0015$$

不可恢复的塑性应变即残余应变为

$$\varepsilon_P=\varepsilon-\varepsilon_e=0.0035-0.0015=0.002$$

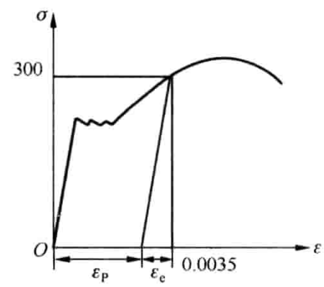

图 2-8

例 2-15　图 2-9(a)所示结构中 AB、AC 均为等直杆，AB 杆长 l，水平放置。铰支座 C 的位置可上下移动。要使两杆横截面应力数值相同，求当 α 角为何值时结构重量最轻？

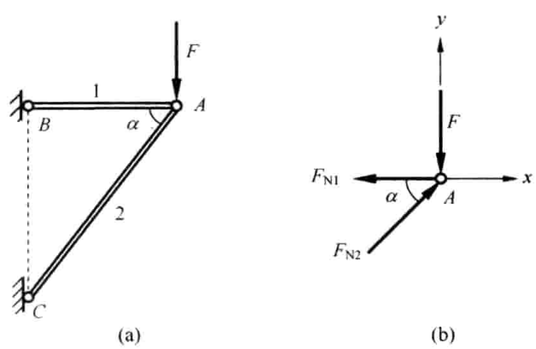

图 2-9

解　取节点 A 为研究对象，受力如图 2-9(b)所示。

$$\sum F_y=0,\quad F_{N2}\sin\alpha-F=0,\qquad F_{N2}=\frac{F}{\sin\alpha}(\text{压})$$

$$\sum F_x=0,\quad -F_{N1}+F_{N2}\cos\alpha=0,\qquad F_{N1}=F\cot\alpha(\text{拉})$$

设两杆横截面应力数值相同，即　$\sigma=\dfrac{F_{N1}}{A_1}=\dfrac{F_{N2}}{A_2}$

则　$$A_1=\frac{F_{N1}}{\sigma}=\frac{F}{\sigma}\cot\alpha,\quad A_2=\frac{F_{N2}}{\sigma}=\frac{F}{\sigma\sin\alpha}$$