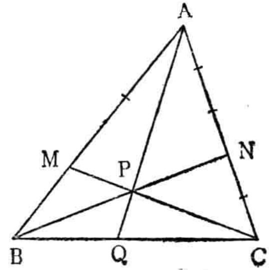
4 与工学部 4 同。

2 （向量在几何中的应用）《常见题》

研究< $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 是互不平行的非零向量，若 $\overrightarrow{OP} = l\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}$，则点$P$在直线$AB$上的充要条件是$l+m=1$>可用此性质解之。



设 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$，

由 $\overrightarrow{AP} = x\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{AC}$

得 $\frac{3}{2}x + y = 1$，

由 $\overrightarrow{AP} = x\cdot\overrightarrow{AB} + y\cdot\frac{5}{3}\overrightarrow{AN}$

得 $x + \frac{5}{3}y = 1$。

将此解之，$x = \frac{4}{9}$，　$y = \frac{1}{3}$。

解答 ∵ BP是ΔABP与ΔBCP的公共边，

∴ $\Delta ABP : \Delta BCP = AN : NC = 3:2$，

同理，$\Delta BCP : \Delta CAP = BM : MA = 1:2$，

∴ $\Delta ABP : \Delta BCP : \Delta CAP = 3:2:4$。……①

因此，$BQ : QC = 3:4$，

∴ $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$，

将 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ 代入上式得，$\overrightarrow{AQ} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$。

福井大学

〔考期〕 3 月23日 〔时间〕 150分 〔评分〕 400/150

1 在下列括号里添上适当的数或文字。

（1）$\dfrac{2+3i}{1+2i}+\dfrac{2i}{3-i}=(a)[\qquad]+(b)[\qquad]i$,

$(i=\sqrt{-1})$。

（2）$a>1$时，满足$\log_a(\log_a x)>0$的x范围是$x>(c)$

$[\qquad]$。

（3）$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$时，$\theta=(d)$

$[\qquad]$。

（4）三边长是2,3和x的三角形成为锐角三角形的充要条件是$(e)[\qquad]<x<(f)[\qquad]$。

2 已知方程 $x^3-11x^2+mx-m=0$ 的三个根皆为正整数，求此三根及m的值。

$$V=\pi\int_1^{e^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\log x\right)^2 dx=\pi\int_1^{e^2}\frac{(\log x)^2}{x}dx$$

$$(\text{设}\log x=t)=\pi\int_0^2 t^2dt=\frac{8}{3}\pi\text{。}\qquad\cdots(\text{答})$$

3 (直线的方程)《常见题》

解答 (1) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$,($a>0$,$b>0$),

两边$\times ab$,$bx+ay-ab=0$, ··①

由于直线①与圆 $x^2+y^2=1$ 相切的条件是原点到直线①的距离等于1,所以

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=1,\ \therefore\ a^2b^2=a^2+b^2,\cdots(\text{答})$$

(这里$a>0$,$b>0$)。

(2) $a^2+b^2\geqslant 2ab$,($a=b$时取等号)。

由此与(1)中的$a^2+b^2=a^2b^2$可得

$a^2b^2\geqslant 2ab$。

$\because$ $a>0$,$b>0$,两边以ab除之,得$ab\geqslant 2$。

因为$a=b$时等号成立,故$a=b=\sqrt{2}$时ab最小,最小值为2。 ···(答)

4 (1)(线性变换)《常见题》

研究

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\text{。}$$

由此可见,上式所表示的线性变换是一个对称变换(关

由此　　$a_2 = 1$，　$b_2 = -\frac{1}{2}$，

$\therefore$　$p_2(x) = x - \frac{1}{2}$。　　　　　　…（答）

（2）将属于P的任意整式设为$p(x) = ax + b$，

$\alpha(p)p_1(x) + \beta(p)p_2(x)$

$= \left(\frac{a}{2} + b\right)\left(-x + \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}a + b\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) =$

$ax + b$，

$\therefore$　$p(x) = \alpha(p)p_1(x) + \beta(p)p_2(x)$。

5　（曲线的切线）

解答　轴平行于y轴，与$y = x^2$　　　　…①

在相异二点直交的抛物线设为

$y = ax^2 + bx + c$，（$a \neq 0$）。　　　　…②

设两个交点的横坐标为α、β，则α、β是

$(a-1)x^2 + bx + c = 0$

的实数解，故$a \neq 1$，且

$b^2 - 4c(a-1) > 0$。　　　　…③

同时，　$\alpha + \beta = \frac{-b}{a-1}$，　$\alpha\beta = \frac{c}{a-1}$。　　　　…④

①、②的过点$x = \alpha$，$x = \beta$的切线斜率分别是　2α，$2a\alpha + b$；　2β，$2a\beta + b$。

因此，根据切线直交得

$2\alpha(2a\alpha + b) = -1$，　　　　…⑤

$2\beta(2a\beta + b) = -1$。　　　　…⑥