中学数学教学法

（微积分分册）

东北师范大学函授部

东北师范大学数学函授教材

中学数学教学法

（微积分分册）

陈广义　沈呈民　编

东北师范大学函授部

1984.6.长春

目　录

绪　论

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的一门科学，它和其它自然科学一样，是我们认识自然和改造自然的强有力的工具．在数学中，通常把初等数学看成常数数学；而把高等数学看成变数数学，其中最基础的部分就是微积分．

微积分是在实践中产生和发展起来的，它以运动变化的观点去考察问题和认识事物，因而，也是辩证法在数学上的运用．在我们从事微积分教学过程中，先了解它的产生和发展、它所研究的对象以及它所运用的方法等将是十分必要的．

一　微积分的产生和发展

微积分和其它自然科学一样，都是在实践中产生和发展起来的．人类在生产实践中，由于需要比较事物的多少或计算劳动的成果，随之产生了数的概念和简单的计数方法；由于丈量土地的需要，就产生了几何学；由于力学的需要，在十七世纪就产生了微积分．

客观世界的一切事物都处在不停的运动和变化中，而运动和变化的情况又是多种多样的．人类认识和研究事物运动和变化的不同状态，随之而来的又促进数学方法的改进和提高．就拿运动来说，其中比较简单的就是匀速运动，处理匀速运动的方法是比较简单的，只要使用初等数学中的乘、除运算就够了．例如，已知某人在8小时之内共行走了32公里，那么他的速度就是$\frac{32}{8}$公里/小时，即每小时走4公里．反之，若已知他的速度为4公里/小时，那么经过8小时后他共行走了$4\times 8=32$公里．然而，对于变速运动来说，初等数学中的乘、除运算就远远不够了．因为在变速运动情况下，不论时间段取得多么小，将路程被时间除，所得之商表明在这段时间内的平均速度．平均速度只能大致地表示运动的状况．

从研究匀速运动到研究变速运动，表现在数学上，从运用乘、除运算发展到微分和积分运算．所说的微分过程是：把时间段分得越来越小，以至于时间段趋近于零，对应它的变速运动的路程也趋近于零，在这个过程中两者商的极限就是我们通常定义的瞬时速度，即数学上的微商．与微分过程相反，就是积分过程，它是把事物运动过程无限细分，同时又无限积累起来，反映事物经历变化全过程的最后结果．在变速运动中，就是已知瞬时速度求路程的问题．

上述“无限细分”和“无限求和”的微积分思想不仅包含在速度和路程的问题中，同时还包含在曲线的切线、曲线的长度和曲线形的面积等大量的几何问题中．反映着客

观事物运动变化规律的各种微分和积分问题，就是微积分的主体.

上述问题比较集中的反映在十七世纪初，欧洲主要资本主义国家的工业、商业和军火工业发展而引起急需解决的问题上．由于大量的商品输出而引起航海业的大力发展，为了解决船只的定位问题、航海人员的观测问题和计时的准确问题等，这就需研究天文学、望远镜的透镜曲面和时钟单摆的运动状态等问题．当时比较集中研究变速运动的动力学问题的是**牛顿**，他从变速运动的许多物理模型中抽象出微积分概念．他把他的微分运算理论叫做“流数法”（所谓流数就是速度）．在变速运动中，速度是位置（路程）对时间的微商，而加速度是速度对时间的微商．反之他们又有可逆关系，位置是速度的积分，速度又是加速度的积分．**牛顿**应用微积分又讨论了许多实际问题，如行星的运动规律、抛射体（如子弹）的运行轨道、流体的抵抗力以及利用微积分推算出地球是一个扁球等等．当时为了提高望远镜的质量，就需要研究透镜的几何形状，分析透镜的聚光性能．**笛卡儿**和**莱布尼兹**做了大量工作．**笛卡儿**对透镜的光学研究，首先讨论了曲线的切线问题和法线问题，且知道二者是互相垂直的，如果已知其一，则可求其二．同时在他的《几何学》中给出了寻求曲线切线和法线的方法．后来，**莱布尼兹**研究和总结了笛卡儿等人的成果，终于在曲线的切线问题中得出了微积分概念 .

随着资本主义生产的进一步发展，出现了纺织机和蒸汽机，这种资本主义的产业革命又推动了科学不断地向前发展．生产实践中提出的大量问题需要微积分计算，这样原先建立的微积分理论就显得不够用．特别是研究船舶在水流中的阻力和速度的流体力学问题、研究物体中的温度分布问题、研究弹性体受力变形和振动问题等，往往需要讨论多个变数的函数，它不再停留在一个变数 y 对另一个变数 x 的依存关系上，而是一个变数 y 对多个变数 x，t 等的依存关系上．由此所得出的微分方程也更加复杂．在这种形势下，当时绝大多数的数学家，把他们的注意力被这种新兴的、有无限发展前途的学科所吸引．在这方面有特殊贡献的是瑞士的数学家**伯努利**家族，**欧拉**，**拉格朗日**等人，他们在微积分、级数理论、函数论、微分方程、积分方程和变分法等学科上作出了较重大的贡献.

标明微积分理论发展的另一个重大问题，就是分析基础的奠定.

十七世纪中叶微积分建立以后，分析学飞快地向前发展，十八世纪达到了空前灿烂的程度．由于分析内容的丰富、应用的广泛、推进的迅速，使人们来不及检查和巩固这门学科的理论基础，因而遭受到一些人的种种非难．十九世纪初，许多数学家又转向分析基础理论的研究．在这方面的先躯者算是**柯西**，在他的著作中分别给出了极限、连续、导数、微分、积分和无穷级数和等概念的严格定义，这些严格定义至今仍被广泛的应用．其中的极限定义第一次地给出了 ε 和 δ 的表述方法，后来**维尔斯特拉斯**将 ε 和 δ 联系起来，完成了至今常用的“$\varepsilon-\delta$”方法.

在**柯西**之后，在逻辑基础发展史上，分析学的重大事件是实数理论的建立．这方面的工作主要应归功于**代德金**、**康托**和**维尔斯特拉斯**等人．实数的三大派理论：**代德金**通过“分划”来定义无理数；**康托**、**海涅**通过“基本列”来定义无理数；**维尔斯特拉斯**通过“单调有界序列”来定义无理数几乎是同一年（1872）在德国出现，这是一种巧合．由于有了实数理论，加上集合论和**柯西**、**维尔斯特拉斯**的极限论，使得分析学建立

在巩固的逻辑基础之上，结束了三百多年的混乱局面，并极大地推动了函数论的发展．

二 微积分的内容和对象

从广义上讲，分析数学包括：微积分、级数理论、函数论、微分方程、积分方程、变分法、泛函分析等学科．而现在通称的数学分析，它的内容包括一元微积分学、多元微积分学、无穷级数理论、极限论和作为分析理论基础的实数理论．由于构成数学分析的主体内容是一元和多元微积分学，因此，有时把数学分析这门课程称为微积分．

在我们所要研究的这门课程里，主要是一元微积分．它包括：函数、极限理论、函数的连续性、导数、微分、不定积分和定积分．由于它所含内容基本、理论浅显，因此也常称之为初等微积分．

从历史上看，在微积分发展的初期，它所研究的典型问题大体上有以下四类．

1 已知物体运动的路程与时间的函数关系，求其速度和加速度；反过来，已知物体运动的速度和加速度与时间的函数关系，求路程。

2 求曲线$y=f(x)$在某一点x_0的切线。

3 求函数的极大、极小值问题．

4 求曲线的弧长、求曲线所围成的面积，求曲面所围成的体积等问题．

现代的微积分所研究的问题比历史上的四类典型问题广泛得多．但是微积分所研究的对象没有变，概括起来说：微积分是研究变量的科学，主要是研究变量与变量之间的依赖关系（即函数关系）；是着重研究变量与变量之间的依赖关系所表现的各种性态（即函数的各种性态）．通过函数的各种性态去考察各种有关问题．

三 微积分的方法和特点

初等数学与高等数学的基本区别不仅表现在内容和对象上（前者主要是研究常量与各种固定的几何图形,而后者主要是研究变量与各种图形的变化),而且也表现在方法上．初等数学的方法一般说来是从静止的和孤立的观点去考察问题；而高等数学的方法则是从运动的和联系的观点去考察问题，因此，也是辩证的．正如**恩格斯**所说：“变数的数学——其中最重要的部分是微积分——本质上不外是辩证法在数学方面的运用”．

现将微积分在研究各种问题时所用的方法和特点归纳总结如下：

1 贯穿微积分始终的一个基本观点，就是运动变化的观点．用运动变化的观点去考虑、分析和认识事物，进而揭示事物的本质东西．比如在讨论变速运动时，怎样才能从本质上认识变速运动呢？在微积分中是研究该运动在某一点（即某一时刻）的瞬时速度，用瞬时速度来刻划这一点的运动状态．而瞬时速度的定义过程就是认识变速运动的过程，即时间段不论取得多么小，相应地得到变速运动的路程，将这段路程被时间段除，其商总是平均速度，只有当时间段趋近于零时，相应的路程也趋近零，在这个过程中两者商的极限就是我们所考虑的该变速运动在这一点的速度(即瞬时速度)．又如，曲线在某一点的切线定义是这样的：把切线看成割线运动与变化的极限位置．

2　从变化的观点出发，把一切变化着的量抽象为变量，把一切变量之间的关系抽象为函数．从而可以暂时地抛弃事物具体内容和个别属性来研究事物的内在联系和共同属性．比如函数关系式 $y=ax^2$，它可以描述圆的面积 y 与半径 x 的关系（当 $a=\pi$ 时）；也可以描述自由落体下落的距离 y 与时间 x 的关系（当 $a=\frac{1}{2}g$ 时）等等．这种不同属性的问题具有同一种数学形式表明，量的关系不只是存在于某一种特定的物质形态或其特定的运动形式中，而是普遍地存在于各种物质形态和各种运动形式中．数学的基本特点——高度的抽象性和应用的广泛性就在于此．这正如**列宁**所说："物质的抽象，自然规律的抽象，价值的抽象以及其他等等，一句话，一切科学的抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然"．

3　贯穿于微积分的基本矛盾，在表现形式上是"直"与"曲"，"常"与"变"的矛盾．解决这些矛盾的方法，首先是在局部上"以直代曲"、"以常代变"（含以匀代变），以求得问题的近似解答．这时问题的矛盾又归结为"近似"与"精确"的矛盾，解决这个矛盾的方法就是我们常说的极限方法．

辩证唯物主义认为，运动、变化是绝对的，而静止、不变是相对的．但是人类认识运动，变化是在无数相对静止中逐步认识的．这正如人类从无数相对真理中去认识绝对真理那样，即通过直线认识曲线，通过常量认识变量，通过近似认识精确，通过具体认识抽象．这种认识过程，是个无限过程，即通过相对认识绝对是个逐步接近过程，它只能是接近，而永远也不能完成，因为解决这个矛盾的方法是极限方法．极限方法就是人类从相对中认识绝对、从近似中认识精确的一种数学方法．

另外，事物之间又不是孤立存在的．"直"与"曲"、"常"与"变"、"静止"与"运动"、"近似"与"精确"等，它们之间既对立统一又相辅相成．在一定的条件下它们之间又可以相互转化．就拿直线和曲线来说，在曲线的很短(局部)的一段上，可以"以直代曲"，即在一定的条件下"曲"可以转化为"直"．正如**恩格斯**所说："高等数学的主要基础之一是这样一个矛盾：在一定条件下直线和曲线应当是一回事．"

四　在中学开设微积分的必要性

我们知道任何真理的存在都是相对的．这里谈在中学开设微积分的必要性也是从我国目前的实际情况出发，既要考虑到在本世纪末实现四个现代化的需要，又要考虑到在目前条件的可能性．这是我们阐述必要性的大前提．

1　**有利于适应科学技术发展的需要**

我们知道，目前世界上先进国家科学技术的发展是突飞猛进的，与他们相比我国的科学技术水平是比较落后的．要想在不远的将来赶超世界先进水平，就要求我们必须在较短的时间内造就出一大批又红又专的科学技术人才．怎样才能保质保量完成这项光荣而又艰巨的任务呢？除了办好各级各类的大学以外，还要重视中、小学的基础教育．在中学开设微积分不仅是效仿外国的作法，更重要的是适应科学技术发展的需要，在中学教育阶段加强基础教育的一项重要改革．

另外，科学技术的发展必然导致它的门类繁多、科目的加深加细．相反，而人的精力是有限的．解决这个矛盾的基本作法是：在大、中、小学中不断地改革教学内容和教学方法．使得现有的课程能弃旧更新，让人们在较短的时间内接触比较现代的科学技术．在这种意义上讲，这叫做势待必行．

2　有利于促进中学生“两个能力”的提高

上面我们已经分析过了，微积分是研究变量的、是研究变量之间的依赖关系的，它所运用的方法是科学的辩证唯物主义方法．因此，学生在学习中，必然会受到这种运动的、变化的、联系的思想训练和陶冶，进而提高他们的分析问题和解决问题的能力．由于在微积分中讨论了函数的分析性质（连续性、可微性和可积性的总称），因此对初等数学中的函数性态就有较深刻的理解．例如，求函数的极值、函数作图、求圆的周长、求圆的面积、求球的体积等都比初等数学更有理论根据和方法的严格性．我们知道圆的面积公式、球的体积公式为

$$S=\pi r^2,\qquad V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

如果把半径r看作自变量，且分别把S和V对r求导数，则得

$$S'=2\pi r\ （圆的周长）$$
$$V'=4\pi r^2\ （球的表面积）.$$

这种微分运算所得的结果不是一种奇特的巧合，从微分和积分的角度看是一种有机的、必然的联系．公式$S'=2\pi r$表明：圆的周长是圆的面积的变化率，而圆的面积是圆的周长的积分；公式$V'=4\pi r^2$表明：球的表面积是球的体积的变化率，而球的体积是球的表面积的积分．然而在初等几何中却把它们看毫无联系的两回事．

除此之外，还能促进中学里相邻科目（如物理、化学、生物等）的教学面貌的改观．比如，学生学习导数概念之后，回过头看物理中的速度、加速度、放大倍数、电流强度等将更清楚．

3　有利于中学与大学在教学上的衔接

凡是教过大学数学分析课的人都有这样的印象，不论中学生的成绩怎样突出，上大学后在半年之内对大学的基础课（特别是数学分析）都一时适应不了，学的特别吃力，思想方法也不对头．为什么会出现这种现象呢？共中最主要的原因是中学与大学在教学内容上和教学方法不一样，使同学们适应不了．比如，在中、小学阶段同学们基本上在常数数学范围内活动的，常时间的形式逻辑思想方法对同学们影响的比较深．什么直线就是直线，曲线就是曲线，两者是截然不同的两种事物．然而，在微积分里，在一定的条件下它们之间可以转化，曲转化为直，直转化为曲，甚至两者是一回事．这种处理问题的方法使学生一时接受不了在一定程度上也是自然的．再比如，在中学的数学课本中，定义极限都是用描述性方法来定义的．而一进大学，却用“$\varepsilon-\delta$”方法来精确的定义，同学对“任意给定的正数ε”，一时理解不了它的真实含意，原因就是在中学阶段根本不接触“以静表动”的思想，等等．

根据上述原因，在中学阶段开设微积分，初步地给中学生一点辩证唯物主义思想是完全必要的．同时能促进大学的教学质量的提高．

4　有利于中学生直接为四化建设服务

我们国家是个大国，而且国家经济比较落后，在短时间内还不能满足适龄青少年升入高一级学校继续深造的要求，因此每年要有相当多的青少年直接就业，参加社会主义建设．如果在中学开设微积分，中学生就可以把微积分中的求极值、求面积、求体积、求侧面积、求弧长和求变力作功等方法应用到生产建设当中去，就可直接为四化建设服务．

第一章 极限和连续

我们知道微积分这门课程研究的主要对象是函数，它所运用的主要工具是极限．在微积分中，几乎所有的重要概念都离不开它，在许多理论问题和实际问题中所运用的工具也是它，这是微积分区别于初等数学的主要标志．于是，极限概念是微积分的最基本的概念，建立在极限概念之上的极限理论也是微积分的基础理论．因此，掌握好极限概念和极限理论对学好微积分是十分必要的．

由于微积分理论的建立和发展都是建立在连续函数基础之上的，因此在这里研究与函数极限概念密切相关的另一个基本概念——函数的连续性是非常必要的．函数的连续性是函数的重要性态之一，它刻划了许多自然现象的共同属性，借助于它又可以直接或间接地研究一些不连续的现象或规律．

在这一书里，我们将着重点放在搞清两个概念上，并给出具有一定规律的解题方法．

一 教 学 要 点

1　本章的重要概念是极限概念和连续函数概念．在教学中，教师要以极大的努力讲清两个概念是非常必要的．这不仅因为这两个概念是微积分的基础，而且极限概念也是微积分中较难理解的概念之一．

2　为了巩固和加深对数列极限概念的理解，在给出数列极限定义之后又给出了数列极限的证明方法．它的主要目的是用数列极限定义去检验极限等式的正确性，从而掌握用“$\varepsilon—N$”定义数列极限的基本思想．

3　为了扩大极限的讨论范围，并提高求极限的能力，这里分别给出了数列极限和函数极限的运算法则．因此，在教学中通过大量的习题培养学生的运算能力是完全必要的．

4　为了继续扩大极限的讨论范围，在两边夹定理的基础上，建立了重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，和直接给出了重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$．与此对应在数列极限中也有极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$，在教学中，教师应给予足够的重视．

5　在给出连续函数概念的基础上，本章又给出了在闭区间上连续函数的重要性

质，即最大值、最小值定理和介值定理，它表明连续函数在闭区间上的重要性态.

6　在讨论连续函数的四则运算和复合函数之后，又定义了初等函数，并明确了初等函数在其定义区间上是连续的.

二　极限和连续概念教学

（一）极限概念教学

1　极限思想的描述

我国古代杰出的数学家刘徽（三国时期的魏人）为了更精确的求圆周率，于公元263年创建了"割圆术"．设圆的半径为一尺，从圆的内接正六边形开始，每次把边数加倍，借助于勾股定理求出正12边形、24边形、……的周长．边数越多，其多边形的周长越接近于圆的周长．刘徽说："割之弥细，所失弥少．割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣．"

他的意思是：割得越细，正多边形的周长与圆的周长相差越少．最后与圆周重合，即没有什么误差了.

说得更严格一点，就是：当分割无限加细时，圆的内接正多边形的边数也随之无限地增加，并无限趋近于圆的周长，即以圆的周长为极限．这就是在一两千年以前，当人们对极限还没有比较完整认识时，而刘徽却第一个使用了极限思想.

刘徽的"割圆术"思想（即早期的极限思想）至今还应用在我们的几何教学上．像中学平面几何的圆周和圆的面积的定义，立体几何的圆锥侧面积、圆锥体和球体的定义等等都运用了这种极限思想.

我们再举物理上的一个例子.

在中学物理课关于测试晶体三极管的放大倍数的教学中，曾用如下方法：

如图1.1示，其中的e、b、c表示晶体三极管的三个极，$\triangle I_b$是输入电流I_b在I_{b0}的改变量（即预放大电流），$\triangle I_c$是输出电流相应的改变量（即放大后电流）.

测试工作按如下次序进行，即分别给出输入电流

$$\triangle I_{b1}>\triangle I_{b2}>\triangle I_{b3}>\cdots>\triangle I_{bn}>\cdots,$$

测得的输出电流

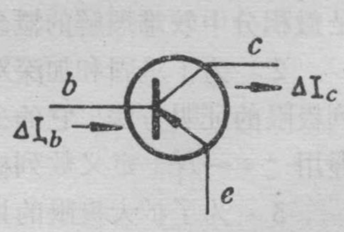

图　1.1

$$\triangle I_{c1}>\triangle I_{c2}>\triangle I_{c3}>\cdots>\triangle I_{cn}>\cdots.$$

两者的比值

$$\frac{\triangle I_{c1}}{\triangle I_{b1}}=\beta_1,\ \frac{\triangle I_{c2}}{\triangle I_{b2}}=\beta_2,\ \cdots,\ \frac{\triangle I_{cn}}{\triangle I_{bn}}=\beta_n,\ \cdots$$

就是在这n次测试中所得到的晶体三极管放大倍数的近似值．而且通过试验指出：当$\triangle I_{bn}$越小时，所测得的该晶体三极管的放大倍数就越精确；但是想通过测试的方法将

永远得不到该晶体三极管的真正放大倍数．这是因为晶体三极管的放大倍数是用数列$\{\beta_n\}$的极限来定义的．然而，这种实际的而又通常的测试方法却充分的体现了极限思想在物理中的应用．

2 数列极限概念

(1) 数列极限概念的引入

例 1 研究数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

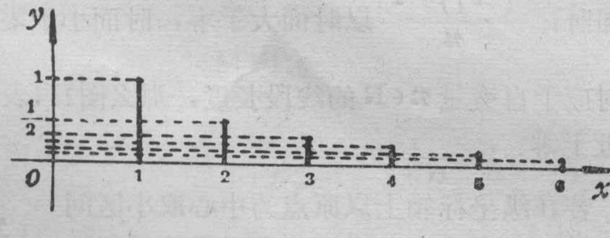

图 1.2

我们不难发现该数列中虽然没有一个数为零，但是，当n无限增大时，$\frac{1}{n}$却趋近于零．如果把对应自变量$n\in\mathbf{N}$的函数值$\frac{1}{n}$看作线段的长度，那么对应数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的是一串长度，如图1.2示，显然，当$n$无限增大的，对应的长度趋近于零．

若在纵坐标轴上以原点为中心给出其半径为$\frac{1}{10}$的小区间，那么，不难发现当$n>10$时，所有的长度都比$\frac{1}{10}$小，如图1.3示；若小区间的半径取为$\frac{1}{100}$，那么，当$n>100$时，所有的长度都比$\frac{1}{100}$小等等．对此我们可列表如下：

小区间半径为	存 在	当…时	有
$\frac{1}{10}$	10	$n>10$	$\frac{1}{n}<\frac{1}{10}$
$\frac{1}{100}$	100	$n>100$	$\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$
⋮	⋮	⋮	⋮

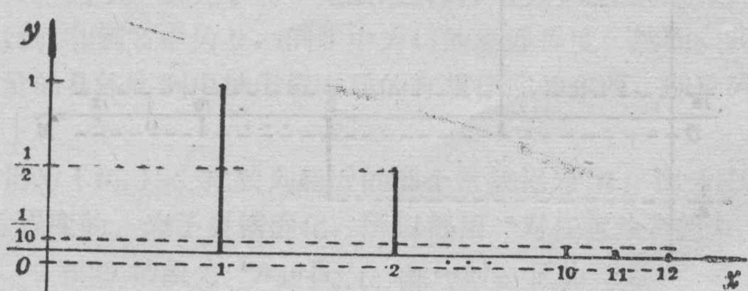

图 1.3

例 2　研究数列$\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$.

我们不难发现，当n无限增加时，$\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$也趋近于零，所不同的是：当n无限增加时，$\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$以时而大于零，时而小于零的方式趋近于零．如果把$\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right|$看作对应于自变量$n\in\mathbf{N}$的线段长度，那么图1.4表明，当$n$无限增加时，对应的线段长度趋近于零．

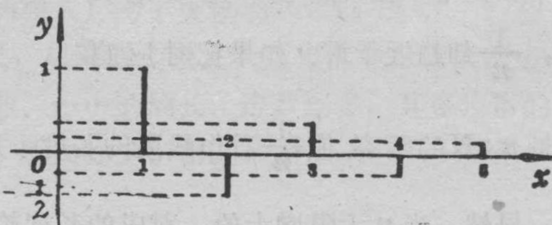

图　1.4

若在纵坐标轴上以原点为中心取小区间的半径为$\dfrac{1}{10}$，那么，当$n>10$时，所有的长度都比$\dfrac{1}{10}$小，如图 1.5 示；若取小区间的半径为$\dfrac{1}{100}$，那么当$n>100$时，所有的长度都比$\dfrac{1}{100}$小等等．对比我们列表如下：

小区间半径为	存　在	当…时	有
$\dfrac{1}{10}$	10	$n>10$	$\left\|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\|<\dfrac{1}{10}$
$\dfrac{1}{100}$	100	$n>100$	$\left\|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\|<\dfrac{1}{100}$
⋮	⋮	⋮	⋮

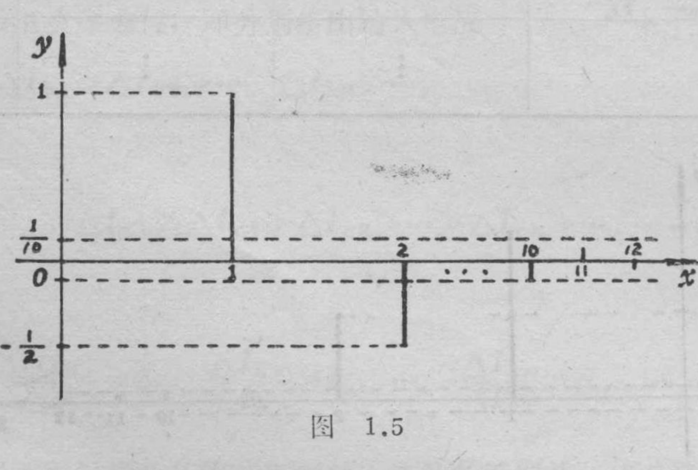

图　1.5

例 3　研究数列$\left\{\dfrac{n}{1+n}\right\}$.

很显然，当n无限增大时，$\frac{n}{1+n}$由小变大并趋近于1．用线段长度所表示该数列的几何图形如图1.6示.

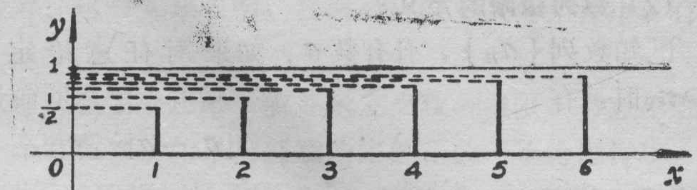

图 1.6

若在纵坐标轴上以点1为中心，给出其半径为$\frac{1}{10}$的小区间，那么，当$n>9$时，有$\frac{n}{1+n}=1-\frac{1}{1+n}>1-\frac{1}{10}$，即$1-\frac{n}{1+n}<\frac{1}{10}$，亦即$\left|\frac{n}{1+n}-1\right|<\frac{1}{10}$，如图1.7示；若小区间的半径取$\frac{1}{100}$时，那么，当$n>99$时，有$\left|1-\frac{n}{1+n}\right|<\frac{1}{100}$等等。对此我们可列表如下：

小区间半径为	存　在	当…时	有
$\frac{1}{10}$	9	$n>9$	$\left\|\frac{n}{1+n}-1\right\|<\frac{1}{10}$
$\frac{1}{100}$	99	$n>99$	$\left\|\frac{n}{1+n}-1\right\|<\frac{1}{100}$
⋮	⋮	⋮	⋮

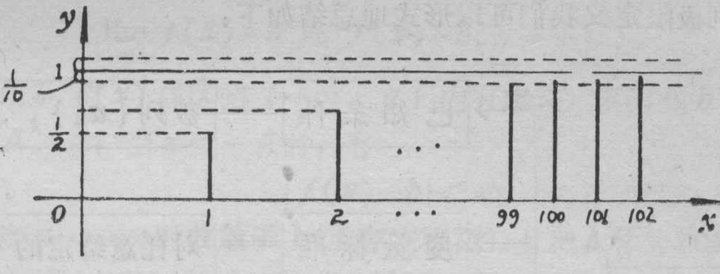

图 1.7

以上针对三个具体例子，研究了当n无限增大时，它们变化的趋势，以及描述了它们趋近于某个常数(例1和例2中为0，例3中为1)的靠近程度．然而，我们的工作不仅仅如此，还要从大量的具体实例中抽出最本质的有规律性的东西，即数列极限的定义．

其抽象过程如下：

我们把数列统记为$\{a_n\}$，把数列趋近的那个常数记为a；因为小区间半径是度量a_n与常数a靠近程度的．为了更精确化，所以都用“对任意给定的$\varepsilon>0$”来代替；将存在的10，100，9和99抽象为“$n_0\in\mathbf{N}$”；当…时，记为“当$n>n_0$时”，在实际上它只起到条件的作用；用来度量a_n与a靠近程度的距离用“$|a_n-a|$”来表示．

通过上述分析和抽象过程，给出如下的数列极限定义将是自然的．

(2) 数列极限的定义①

已知数列$\{a_n\}$，且有数a．如果对任意给定的$\varepsilon>0$，存在自然数n_0，当$n>n_0$时，有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列$\{a_n\}$**收敛于**a（或**存在极限**）；且把a称为该数列的**极限**；并记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \text{ 或 } a_n\to a\ (n\to\infty).$$

如果数列$\{a_n\}$不存在极限，则称为数列$\{a_n\}$**发散**．

(3) 数列极限概念的实质

从数列极限定义可以看出：我们所要定义的**不是"极限"一词，而是给出数列$\{a_n\}$（当$n\to\infty$时）趋近于一个极限的概念**。因为极限是一个数，而数列$\{a_n\}$收敛于a则是定义的过程．它是通过如下事实来表现的：

① 度量数列$\{a_n\}$（当$n\to\infty$时）与极限a靠近程度的是ε．ε的任意性是绝对的，通过ε的任意性才能保证数列$\{a_n\}$（当$n\to\infty$）与a无限靠近．ε的固定性是相对的，通过ε的固定性才能具体地给出数列$\{a_n\}$（当$n\to\infty$时）靠近极限a的定量刻划．如果没有这种定量的刻划就很难理解数列$\{a_n\}$（当$n\to\infty$时）与a无限靠近的程度．

② 数列$\{a_n\}$（当$n\to\infty$时）与极限a无限靠近是有条件的．即定义中"存在自然数n_0，当$n>n_0$时"是保证$|a_n-a|<\varepsilon$成立的条件．在条件中，自然数n_0存在与否与数列$\{a_n\}$是否存在极限有直接关系，即对任意给定的$\varepsilon>0$，使之$|a_n-a|<\varepsilon$成立的n_0如果存在，我们就说数列$\{a_n\}$存在极限；对任意给定的$\varepsilon>0$，使之$|a_n-a|<\varepsilon$成立的n_0如果不存在，我们就说数列$\{a_n\}$不存在极限．

因此，对数列极限定义我们可以形式地总结如下：

数列极限定义 →	→ 已知条件	══	数列$\{a_n\}$，及数a
	→ 度量标准	══	对任意给定的$\varepsilon>0$
	→ 条　件	══	存在自然数n_0，$n>n_0$
	→ 度量结果	══	有$|a_n-a|<\varepsilon$

③ 自然数n_0的不唯一性．我们在定义中只强调了自然数n_0的存在性，即存在自然数n_0，当$n>n_0$时有$|a_n-a|<\varepsilon$．自然，当$n>n_0+1$时也有$|a_n-a|<\varepsilon$．当

① 亦称"$\varepsilon-n_0$"语言的定义。

$n>n_0+2$ 时更有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 等等．这一实事表明，在数列极限定义的条件中，存在的自然数 n_0 是不唯一的．

这里应当指出的是：有的教师在教学中用如下叙述来定义数列极限，有点不确切。

"已知数列 $\{a_n\}$，存在一个常数 a，如果对任意给定的正数 ε 不论怎样小，总可以找到自然数 $\mathbf{N}$，使得 a_N 后面的所有项都满足不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$（即当 $n>N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$ 恒成立），则把常数 a 叫做数列 $\{a_n\}$ 的极限"．

这种定义数列极限的方法，其主要问题是没有突出数列极限概念的实质，即他仅仅定义了"极限"一词，而丢掉了数列 $\{a_n\}$（当 $n\to\infty$ 时）"收敛于 a"的这个概念，即数列 $\{a_n\}$（当 $n\to\infty$ 时）趋近于一个极限的概念．

这个定义的另一个不足是，在定义的叙述中有"对任意给定的正数 ε 不论怎样小"一句话，其中出现了在意义上重复的现象，句首有"任意"的字样，句尾有"不论怎样小"的字样，两者重复，因前者包含后者，即"不论怎样小"是"任意"的一种状态．

3 函数极限概念

以上我们已经讨论了数列极限的定义，而数列本来就可以看作定义在 $\mathbf{N}$ 上的一种特殊的函数，这就为定义函数极限奠定一定的基础．

对函数极限，由于中学课本只给出了描述性的定义，故这里就不深入讨论了，将对 $x\to\infty$，$x\to x_0$ 和左右极限直接给出定义．

定义 已知函数 $f(x)$ 在区间（a，$+\infty$）内有定义，且有数 b．如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $A>0$，当 $x>A$ 时，有

$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时**收敛于** b（或**存在极限**）；且把 b 称为该函数的**极限**；并记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b \text{ 或 } f(x)\to b(x\to+\infty).$$

定义 已知函数 $f(x)$ 在区间（$-\infty$，a）内有定义，具有数 b．如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $A>0$，当 $x<-A$ 时，有

$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时**收敛于** b(或**存在极限**)；且把 b 称为该函数的**极限**；并记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=b \text{ 或 } f(x)\to b(x\to-\infty).$$

定义 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且有数 b．如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $A>0$，当 $|x|>A$ 时，有

$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时**收敛于** b（或**存在极限**）；且把 b 称为该函数的**极限**；并记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=b \text{ 或 } f(x)\to b\ (x\to\infty)$$

定义① 已知函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内（但点 x_0 除外，因为函数 $f(x)$ 在点 x_0 很可能无意义）有定义，且有数 b．如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|$

① 亦称"$\varepsilon-\delta$"语言的定义。