高等数学

同步学习指导

南京邮电大学
高等数学教学中心 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等数学同步学习指导

Gaodeng Shuxue Tongbu Xuexi Zhidao

南京邮电大学高等数学教学中心　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是与邱中华、赵洪牛编写的《高等数学》配套的辅导用书，与教材同步。内容包括极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、复变函数与解析函数、复变函数的积分、复变函数的级数与留数定理共13章。每章设有基本要求、知识要点、例题选讲、综合例题、自我测试及自我测试参考答案五部分。

本书可作为高等学校工科类各专业学生以及准备报考硕士研究生的人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步学习指导/南京邮电大学高等数学教学中心编.--北京:高等教育出版社,2013.8
ISBN 978-7-04-038396-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①南… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第196688号

策划编辑 李蕊　责任编辑 李蕊 田玲　封面设计 姜磊　版式设计 杜微言
插图绘制 宗小梅　责任校对 刁丽丽　责任印制 张泽业

出版发行 高等教育出版社
社　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　刷 北京市四季青双青印刷厂
开　本 787mm×960mm 1/16
印　张 26.25
字　数 470千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版　次 2013年8月第1版
印　次 2013年8月第1次印刷
定　价 35.00元

物 料 号 38396-00

前　言

高等数学是大学工科类专业的一门重要的基础课，同时也是全国硕士研究生入学统一考试的一门必考科目，它不仅是学习后续课程和将来从事理论研究或实际工作的必要基础，而且对学生多种能力的培养有着重要的作用．本书依据最新制定的工科类本科数学基础课程教学基本要求和全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲编写而成，旨在帮助学生深刻理解高等数学的基本概念和理论，准确抓住解题关键，清晰辨明解题思路，提高分析问题和解决问题的能力．

本书由南京邮电大学从事高等数学教学多年的教师编写．在章节编排上与邱中华、赵洪牛等编的《高等数学》教材同步，内容包括极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、复变函数与解析函数、复变函数的积分、复变函数的级数与留数定理共13章．每章设有基本要求、知识要点、例题选讲、综合例题、自我测试及自我测试参考答案五部分．基本要求与知识要点列出该章的主要概念和理论，并对其中重要内容作简要叙述，明确了学习要求和主要学习内容．例题选讲是本书的核心，内容覆盖面广、类型全面，并且选取了教材及同步练习册中学生遇到的一些疑难题，通过对例题的分析、解答及论证启发学生的思维，深化对概念和理论的理解，提高解题的能力，掌握思考问题和处理问题的方法与技巧．综合例题选择了该章综合性较强的题型，大部分属于历届全国硕士研究生入学统一考试试题，供一些学有余力及有志考研的学生阅读．此外还安排了自我测试及自我测试参考答案，便于学生自我检测．

要写好一本学习指导书实非易事，书中难免诸多不足，恳请读者批评指正．

编　者

2013 年 5 月

目　录

第1章　极限与连续

极限的思想和方法是高等数学中分析问题的基本工具和语言.数列极限和函数极限都是很重要的基础,数列极限侧重于极限的思维模式,函数极限则侧重于极限的运用方法.而函数的连续性则是建立在极限的基础上,是高等数学所研究的函数具有的基本性质.学习和掌握好极限的思想对于全部微积分内容的学习和理解至关重要.

【基本要求】

一、理解函数概念,熟记基本初等函数的定义域,准确理解函数的单调性、奇偶性、周期性及有界性的定义并会判断;理解复合函数概念,会求函数的复合函数,会将复杂函数分解为若干个简单函数的复合;理解反函数的概念,知道反函数存在条件,了解反函数图形特点,会求简单函数的反函数;理解初等函数、分段函数的概念.

二、理解数列极限的“$\varepsilon-N$”定义,会用此定义证明数列$\{x_n\}\to a(n\to+\infty)$;了解收敛数列的性质,能熟练使用四则运算法则计算数列极限.

三、理解函数极限的“$\varepsilon-\delta$”以及“$\varepsilon-X$”定义,会用定义证明函数$f(x)\to A(x\to x_0)$或$(x\to\infty)$;了解左、右极限的概念,掌握函数极限存在的充分必要条件;了解函数极限的性质,能熟练使用四则运算法则计算函数极限.

四、理解无穷小和无穷大的概念以及它们之间的关系;掌握无穷小的性质,了解无穷小与函数极限、无穷大与无界函数之间的关系.

五、掌握函数极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则,并能在计算中熟练运用.

六、掌握两个极限存在准则;能利用准则证明数列极限的存在和计算极限;能熟练使用两个重要极限.

七、掌握无穷小比较的定义和常用等价无穷小关系;能熟练使用等价替换法则计算函数极限.

八、理解函数在一点连续的概念以及区间上连续函数的概念;会判断间断点的类型;了解连续函数的运算性质和初等函数的连续性;能利用函数连续性求极限;知道闭区间上连续函数的性质,并会用这些性质解决相关问题.

【知识要点】

一、函数的概念

1. 定义：设 x 和 y 是两个变量，$D\subseteq\mathbf{R}$ 是一个给定的数集，如果对于每个 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$，数集 D 称为这个函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量. 当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的数值 y 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$. 当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集

$$W=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的值域.

2. 复合函数：设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_1，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义，如果 g 的值域 $W\subseteq D_1$，那么对于 D 中的每一个实数 x，通过中间变量 u，有确定的 y 值与之对应，从而得到一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的函数，记作 $y=f[g(x)]$，$x\in D$.

3. 反函数：设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，值域为 $W=\{f(x)\,|\,x\in D\}$. 若对每个 $y\in W$，有满足关系式 $y=f(x)$ 的唯一的 x 与之对应. 如果把 y 看作自变量，x 看作是因变量，按照函数概念，就得到一个新函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，称函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

4. 函数的初等性质：周期性、奇偶性、单调性、有界性.

5. 基本初等函数与初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数统称为基本初等函数. 所谓初等函数是指可由常数函数与基本初等函数经过有限次的四则运算与复合运算所产生，并可用一个数学式子表示的函数.

二、数列极限的概念

1. 定义：设数列 $\{x_n\}$，若存在常数 a，对任意给定的正数 ε，都存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，则称数列 $\{x_n\}$ 存在极限，并称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\quad 或\quad x_n\to a(n\to\infty)$$

此时，也称数列 $\{x_n\}$ 为收敛数列，不收敛的数列称为发散数列.

为了书写简洁，数列极限的“$\varepsilon-N$”语言可简记作：

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists 正整数 N,\forall n>N,有\ |x_n-a|<\varepsilon.$$

利用邻域的概念，还可将数列极限的"$\varepsilon - N$"定义简记作：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \text{正整数 } N, \forall n > N, \text{有 } x_n \in U(a,\varepsilon).$$

2. 几何解释：对于以任意的 $\varepsilon(>0)$ 为半径的邻域 $U(a,\varepsilon)$，一定存在一项 x_N，使得它后面的一切项 $x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}, \cdots$ 全部落入 $U(a,\varepsilon)$ 之中，在这个邻域之外至多只能有 $\{x_n\}$ 的有限项 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N$.

3. 收敛数列的性质：极限的唯一性、有界性（逆命题不一定成立）、保号性、子数列的收敛性.

三、函数极限的概念

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$，当 $|x| > X$，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

3. 几何解释："$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$"：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总能找到正数 X，使得当 $|x| > X$ 时，函数 $y = f(x)$ 的图形都夹在两条直线 $y = A - \varepsilon$ 与 $y = A + \varepsilon$ 之间.

"$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$"：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在点 x_0 的一个去心 δ 邻域 $U^\circ(x_0, \delta)$，使得当自变量 x 在 $U^\circ(x_0, \delta)$ 内取值时，函数 $y = f(x)$ 的图形都夹在两条直线 $y = A - \varepsilon$ 和 $y = A + \varepsilon$ 之间.

4. 左、右极限的概念：在极限定义中，如果我们考虑 $x \to x_0$ 表示 x 从 x_0 的右侧趋于 x_0（记作 $x \to x_0^+$）和从 x_0 的左侧趋于 x_0（记作 $x \to x_0^-$），称相应的极限分别为右极限和左极限.

5. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在并相等. 即

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

6. 函数的性质：极限的唯一性、局部有界性、局部保号性、保序性.

四、无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量的定义：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$，有 $|f(x)| < \varepsilon$.

2. 无穷小量的性质：有限个无穷小的和仍是无穷小，有界函数与无穷小的乘积是无穷小，有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

3. 无穷小与函数极限的关系：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$，其中 α 是 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小.

4．无穷大量的定义：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$，有 $|f(x)|>M$.

5．无穷大与无穷小的关系：在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

6．无穷大与无界函数的关系：若函数 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷大，则必存在 x_0 的某一去心邻域 $U^\circ(x_0,\delta)$，在此邻域内 $f(x)$ 一定是无界的（$x\to\infty$ 时，也有类似的结论成立）. 反之不一定成立.

五、极限运算法则

1．四则运算法则：设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$ 存在，则有

(1) $\lim[f(x)+g(x)]=A+B=\lim f(x)+\lim g(x)$；

(2) $\lim[f(x)g(x)]=AB=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$；

(3) $\lim \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$.

2．复合函数的极限运算法则：设复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合而成，$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，$\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$，且在 x_0 的某去心邻域中 $u=\varphi(x)\neq a$，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在，且成立 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$.

六、极限存在准则

1．夹逼准则：

(1)（数列的夹逼准则） 设数列 x_n, y_n, z_n 满足条件① $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n, n\geqslant 1$；② $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

(2)（函数的夹逼准则）设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 满足条件① 对 $x\in U^\circ(x_0,\delta_0)$（或 $|x|>M$）时，有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；② $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$，则当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$ 的极限存在，且有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$.

2．单调有界收敛准则：单调增加有上界的数列及单调减少有下界的数列必有极限.

3．两个重要极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

七、关于无穷小比较

1．无穷小比较的定义：设 α, β 是同一极限过程的无穷小，

(1) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,记作 $\beta=o(\alpha)$;

(2) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是比 α 低阶的无穷小;

(3) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$,则称 β 与 α 是同阶的无穷小,记作 $\beta=O(\alpha)$;

(4) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0,k>0$,则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小;

(5)若 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=1$,则称 β 与 α 是等价的无穷小,记作 $\beta\sim\alpha$.

2. 重要的等价无穷小关系:当 $x\to 0$ 时,有下列重要的等价无穷小关系:

(1) $\sin x\sim x\sim \arcsin x\sim \tan x\sim \arctan x$;

(2) $1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^2$;

(3) $e^x-1\sim x$;

(4) $\ln(1+x)\sim x$;

(5) $(1+x)^\alpha-1\sim \alpha x$,

3. 等价无穷小替换法则:设 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,若 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在,则 $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ 存在,且 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

4. 等价替换规则:设在同一变化过程中,α,β 是两个无穷小量,由等价无穷小的性质,可得下列简化极限计算的替换规则:

(1) 和差取大规则:若 $\beta=o(\alpha)$,则 $\alpha\pm\beta\sim\alpha$.

(2) 和差替代规则:若 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,且 α,β 不等价,则 $\alpha-\beta\sim\alpha'-\beta'$.

(3) 因子替换规则:若 $\alpha\sim\beta$,$\varphi(x)$极限存在或有界,则 $\lim \alpha\varphi(x)=\lim \beta\varphi(x)$.

八、函数的连续性

1. 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0,\delta)$ 内有定义,如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处连续.

2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$在点 x_0 处左连续;若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$在点 x_0 处右连续. 左、右连续统称为单侧连续. 函数 $f(x)$在 x_0 点处连续的充要条件是 $f(x)$在 x_0 点处既左连续又右连续.

3. 若函数 $f(x)$在开区间(a,b)内每一点处都连续,则称它在开区间(a,b)内连续;若函数 $f(x)$ 在有限区间(a,b)内连续,并且在左端点 a 右连续,右端点 b 左连续,则称它在闭区间$[a,b]$上连续.

4．函数的间断点：

$$
\begin{cases}
\text{第一类间断点（特征是左、右极限都存在）}\begin{cases}\text{可去间断点（左、右极限相等）}\\ \text{跳跃间断点（左、右极限不相等）}\end{cases}\\
\text{第二类间断点（特征是左、右极限至少有一个不存在）}\begin{cases}\text{无穷间断点}\\ \text{振荡间断点}\\ \cdots\cdots\end{cases}
\end{cases}
$$

九、闭区间上连续函数的性质

1．最大值和最小值定理：闭区间上的连续函数在该区间上一定可以取到最大值与最小值.

2．有界性定理：闭区间上的连续函数在该区间上必有界.

3．零点定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$，$f(b)$ 异号，那么在开区间 (a,b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点，即至少有一点 ξ $(a<\xi<b)$，使 $f(\xi)=0$.

4．介值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$，$f(b)=B$，$A\neq B$，那么对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

【例题选讲】

【例 1】 设函数 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 试求 $g[f(x)]$.

【分析】 这是分段函数的复合运算问题，求解时必须根据中间变量的取值，确定出自变量在不同范围取值时的函数表达式.

【解】 因为

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+2, & f(x)>0,\end{cases}$$

又因为

$$f(x)\leqslant 0\Rightarrow f(x)=-x\,(x\geqslant 0),\quad f(x)>0\Rightarrow f(x)=x^2\,(x<0),$$

所以

$$g[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0,\\ x^2+2, & x<0.\end{cases}$$

【例2】 设函数 $y=f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，已知 $f(1)=a$，又对 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x+2)=f(x)+f(2)$. (1) 求 $f(5)$；(2) 如果 $y=f(x)$ 是以 $T=2$ 为周期，试求常数 a.

【分析】 本题主要考查对函数的奇偶性、周期性等初等性质的理解和运用，$f(5)$ 可以通过利用已知条件"凑"的方法得到，已知等式表达了函数的线性运算关系.

【解】 (1) 由 $f(x+2)=f(x)+f(2)$，令 $x=-1$，得 $f(1)=f(-1)+f(2)$，又函数 f 是奇函数，得 $f(2)=2f(1)=2a$，再令 $x=3$，则有 $f(5)=f(3)+f(2)$，而 $f(3)=f(1)+f(2)\Rightarrow f(3)=3a\Rightarrow f(5)=5a$.

(2) 如果 $y=f(x)$ 是以 $T=2$ 为周期，则有 $f(x+2)=f(x)+f(2)=f(x)$，因此 $f(2)=0\Rightarrow a=0$.

【例3】 若函数 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $x=a$ 及 $x=b(b>a)$ 对称，试证 $y=f(x)$ 为周期函数，并求出周期 T.

【分析】 函数的对称轴及对称中心等问题可以考虑利用函数的奇偶性.

【解】 由于函数 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $x=a$ 及 $x=b$ 对称，于是有

$$f(a-x)=f(a+x),\quad f(b-x)=f(b+x),$$

进一步有 $f(x)=f(2a-x)$ 及 $f(x)=f(2b-x)$，所以 $f(2b-x)=f(2a-x)$. 令 $t=2a-x$，则 $x=2a-t$，于是

$$f(t)=f(t-2a+2b)=f[t+2(b-a)].$$

根据周期函数的定义，函数 $y=f(x)$ 是周期函数，周期是 $T=2(b-a)$.

【例4】 讨论下列函数在定义区间上是否有界：

(1) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2},\quad x\in(-\infty,+\infty)$；　(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x},\quad x\in(0,1)$.

【分析】 一般验证函数在定义区间上有界可以用不等式放大的方法，找出函数在该区间上的界；而验证函数在定义区间上无界，则可以采用选择特殊点的方法，使得函数在这些点上的值充分大.

【解】 (1) 由于

$$x^2+1\geqslant 2|x|\Rightarrow\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2},\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

所以函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

(2) $\forall M>0$，取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\in(0,1)$，使得 $2n\pi+\dfrac{\pi}{2}>M$，即取正整数 $n>$