普通高等教育"十一五"国家级规划教材

大学数学教程/韩旭里 主编

线性代数

（第三版）

杨文胜 刘伟俊 韩旭里 编

科学出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材
大学数学教程/韩旭里　主编

线性代数

（第三版）

杨文胜　刘伟俊　韩旭里　编

科学出版社

内 容 简 介

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材"大学数学教程"系列教材的线性代数部分.

全书包括矩阵与行列式、矩阵的初等变换与线性方程组、向量的线性相关性与向量空间、特征值与矩阵对角化、二次型、线性空间与线性变换、应用数学模型等7章内容. 本书体系新颖，结构严谨，内容翔实，叙述清晰，重点突出，难点分散，例题典型，习题丰富，重视对学生分析、推理、计算和应用数学能力的培养.

本书可作为高等学校理工科非数学类专业本科生的教材或教学参考书，也可供科学研究与工程技术人员学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程. 线性代数/韩旭里主编;杨文胜，刘伟俊，韩旭里编. —3版. —北京:科学出版社，2013
普通高等教育"十一五"国家级规划教材

ISBN 978-7-03-038308-2

Ⅰ.①大… Ⅱ.①韩…②杨…③刘…④韩… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O13②O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第185090号

责任编辑:李鹏奇 王 静 / 责任校对:韩 杨
责任印制:阎 磊 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004年8月第 一 版 开本:720×1000 B5
2008年7月第 二 版 印张:11
2013年8月第 三 版 字数:222 000
2013年8月第十二次印刷

定价: 18.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第三版前言

大学数学课程是大学高等教育中最基础和最重要的课程之一，各高等院校都十分重视大学数学基础课程的教学.为了适应科学技术进步的要求，培养高素质的人才，我们在各级教育主管部门的领导和支持下，进行了多年的大学数学教学改革实践.我们进行教学改革的重点工作之一是注重吸取国内外高等学校在基础数学教学改革方面的进展，不断总结教学实践的经验，努力编写一套高质量的数学基础课教材.本套教材是在对原《大学数学教程》系列教材使用多年的基础上，进一步修订，出版的第三版.

本系列教材，在数学观点和思想方法上，贯穿集合、向量及映射的概念，体现局部线性化、离散化、逼近、最优化等思想.在内容体系上，淡化单纯面向专业的观念，理顺课程内容之间的关系，加强对应该普遍具备的数学基础知识的阐述，注重有利于学生对知识的理解与深化.在知识巩固和应用数学能力的培养上，除了精心选取例题和练习外，每册单独给出了与本册内容相关的应用数学模型一章，内容原则上只用到前面所学的知识，可以供相关章节中选讲，以培养学生的应用意识和提高学习兴趣，提高学生融会贯通的分析问题和解决问题的能力.

第一版教材侧重于将微积分、线性代数、概率论与数理统计的数学基础课内容统一安排教学，侧重适合于统一开设为大学数学一门课程使用.这样，对大学数学的基本内容，便于学生学习、教师教学和教学管理上的统一安排，有利于使这些基本内容保持同等重要和重视的地位.第二版教材，在保持原有指导思想的前提下，力求做到既适合于统一开设一门课程使用，也适合于分别开设多门课程使用.因而，实现了本系列教材的目标定位是作为非数学类理工科大部分本科专业的数学基础课教材，内容经选择适用于对数学要求差别不是很大的其他各类有关专业数学课程的教学.

为了更新教学内容和加强数学思维的训练，本次修订对部分内容进行了调整和补充，进一步精选了例题，补充了部分习题.每本书修订的其他情况如下：

《高等数学(上册)》是对第二版的《微积分(上册)》的修改，将函数、极限与连续两章进行了一定的调整，删除了一些不常用的内容和与中学有重叠的内容，增加了一些着重应用的数学内容，比如，介绍了一些经济管理领域内的数学概念等，并合并成了一章.适当引进了一些近似计算方法与实际应用的数学问题.第 1 章至第 3 章由刘碧玉编写，第 4 章至第 6 章由李军英编写，第 7 章由韩旭里编写.

《高等数学(下册)》是对第二版的《微积分(下册)》的修改，对内容力求简明直

观地描述，着重训练、应用和运算，注重增强理性思维培养的要求. 第 1 章、第 4 章和第 5 章由刘旺梅编写，第 2 章和第 3 章由秦宣云编写，第 6 章由周英告编写，第 7 章由韩旭里编写.

《线性代数》在第二版的基础上，除了精心编写了基于线性映射定义行列式的内容，以加强培养学生的抽象思维能力，还补充了基于排列求和定义行列式的内容，便于读者参考其他教科书，更好地理解行列式的内容. 将逆矩阵内容后移，与初等矩阵合并在一节，使逆矩阵内容的介绍更为紧凑. 第 1 章至第 3 章由刘伟俊编写，第 4 章至第 6 章由杨文胜编写，第 7 章由韩旭里编写.

《概率论与数理统计》的内容在第二版的基础上，对随机事件的概率、多维随机变量的函数及假设检验进行了适当的修正，并将原来的随机变量的数字特征与极限定理一章调整为随机变量的数字特征一章和大数定律与中心极限定理一章，同时对部分章节的例题和习题作了一些增减，使其层次更加清楚，内容更加丰富和完善，适应多种课时安排的教学. 第 1 章至第 3 章由裘亚峥编写，第 4 章至第 6 章由刘诚编写，第 7 章至第 10 章由陈亚力编写，第 11 章由韩旭里编写.

这套教材既是一个统一的整体，可以作为大学数学课程统一开课使用，进行一体化教学. 各部分之间又有相对独立性，可以按四本教材分别开设课程，独立讲授. 讲完全部内容大约需要 290 学时. 如果减少一些内容，安排 240 学时左右讲授是可以的.《高等数学(上册)》可以考虑安排 80～90 学时，《高等数学(下册)》可以考虑安排 90～106 学时，《线性代数》可以考虑安排 32～40 学时，《概率论与数理统计》可以考虑安排 40～54 学时，教师可以根据教学计划灵活安排.

课程教学体系和教学内容的改革不是一朝一夕就能完成的，需要不断完善、不断适应时代发展的需要. 本套教材前后版本的使用、修订和出版，得到很多教师和教育主管部门领导的帮助和支持，得到科学出版社的热情支持，在此表示衷心感谢. 同时，本教材若有不妥与错误之处，恳请专家、同行和读者不吝指正.

编　者

2013 年 5 月

第一版前言

大学数学课程是高等教育中最重要和最基础的课程之一，各高等院校都十分重视大学数学基础课程的教学. 为了适应科学技术进步的要求，培养高素质的人才，我们在各级教育主管部门的领导和支持下，进行了多年的大学数学教学改革实践. 我们进行教学改革的特点是，根据大学数学基础课程的内在联系，突破原有课程的界限，将微积分、线性代数、空间解析几何、概率论、数理统计、应用数学模型的内容有机结合，加强相互渗透，加强数学思想方法的教学，加强应用数学能力的培养，统一开设大学数学课程. 按照这种教学改革的思想，我们组织编写了一体化教学教材，并经过多年的教学实践，效果是令人满意的. 现在，我们在原教材的基础上，广泛吸取国内外知名大学的教学经验，并进一步改进，出版了这套系列教材.

本系列教材的目标定位是作为非数学类理工科大部分本科专业的数学基础课的教材，内容经选择也适用于对数学要求较高的其他各类有关专业的数学课程的教学. 本系列教材全部内容按大约 260 学时的教学计划编写. 对于学时安排较少的专业，可根据要求选择使用. 对全部教学内容，建议按三个学期整体安排.

本系列教材，在数学观点和思想方法上，全书贯穿集合、向量及映射的概念，体现局部线性化、离散化、逼近、最优化等思想. 在内容体系上，进一步理顺了内容之间的关系，整体优化，强调分析、代数、几何的有机结合. 对大学数学基础内容统一安排教学，既有利于学生对知识的理解与深化，又能使大学数学的基本内容在教学管理、教师选课和学生选课上，保持同等重要的地位. 在知识巩固和应用数学能力的培养上，除了精心选取例题和练习外，每册单独给出了与本册内容相关的应用数学模型一章，内容原则上只用到前面所学的知识，可以供相关章节中选讲，以培养学生的应用意识和提高学习兴趣，提高学生分析问题和解决问题的能力.

本系列教材是“湖南省普通高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”重点资助项目的研究成果的延续，得到了“湖南省高等教育 21 世纪课程教材”立项资助和“中南大学教育教改研究项目”的立项资助. 在此，向对本系列教材的编写与出版给予帮助和支持的同志表示衷心感谢.

由于编者水平有限，若有不妥与错误之处，恳请专家、同行和读者不吝指正.

编　者

2004 年 3 月

目　　录

第三版前言
第一版前言
第 1 章　矩阵与行列式 …… 1
1.1　矩阵及其运算 …… 1
1.2　行列式 …… 14
1.3　克拉默法则 …… 41
习题 1 …… 43
第 2 章　矩阵的初等变换与线性方程组 …… 45
2.1　初等变换与矩阵等价 …… 45
2.2　矩阵的标准形 …… 46
2.3　初等矩阵与逆矩阵 …… 48
2.4　矩阵的秩 …… 56
2.5　线性方程组有解的判定定理 …… 59
习题 2 …… 64
第 3 章　向量的线性相关性与向量空间 …… 66
3.1　n 维向量 …… 66
3.2　n 维向量空间 …… 73
3.3　线性方程组的解 …… 78
习题 3 …… 89
第 4 章　特征值与矩阵对角化 …… 91
4.1　正交矩阵与正交变换 …… 91
4.2　方阵的特征值与特征向量 …… 94
4.3　相似矩阵与矩阵可对角化的条件 …… 100
4.4　实对称矩阵的对角化 …… 105
习题 4 …… 111
第 5 章　二次型 …… 114
5.1　二次型的概念 …… 114
5.2　化二次型为标准形 …… 117
5.3　正定二次型 …… 122
习题 5 …… 125
第 6 章　线性空间与线性变换 …… 127
6.1　线性空间的定义与性质 …… 127

6.2　线性空间的维数、基与坐标 …… 131
6.3　线性变换 …… 135
习题 6 …… 141
第 7 章　应用数学模型 …… 143
7.1　基因间“距离”的表示 …… 143
7.2　Euler 的四面体问题 …… 144
7.3　动物数量的按年龄段预测问题 …… 146
7.4　企业投入产出分析模型 …… 149
7.5　交通流量的计算模型 …… 151
7.6　小行星的轨道模型 …… 153
7.7　人口迁移的动态分析 …… 155
7.8　常染色体遗传模型 …… 156
部分习题参考答案 …… 159

第 1 章　矩阵与行列式

矩阵与行列式是线性代数的一个最基本的内容，它是高等数学各个分支必不可少的工具，在其他学科分支（如物理学、力学、经济学等）也有广泛的应用. 本章主要介绍矩阵与行列式的定义、性质及其运算，为线性代数的学习提供必要的基础知识.

1.1　矩阵及其运算

1.1.1　矩阵的定义

在许多实际问题中，常常会遇到一些变量要用另外一些变量线性地表示. 设变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 能用变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性地表示，即

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，a_{ij} 为常数（$i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$）. 这种从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的变换称为线性变换. 线性变换式（1.1）中的系数可以排成一个 m 行 n 列（横排叫行，纵排叫列）的数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

同样，含有 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 m 个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的系数 a_{ij} 也可以排成这样的数表. 这种形式的数表就称为矩阵.

定义 1.1　由 $m \times n$ 个数 a_{ij}（$i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$）排成的 m 行 n 列的数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵. 这 $m\times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素. 元素都是实数的矩阵叫实矩阵；元素是复数的矩阵叫复矩阵. 除特别声明外，本书中的矩阵均指实矩阵. 式(1.2)也可简记为

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n} \quad 或 \quad \boldsymbol{A}=(a_{ij}),$$

这里，下标 i 指明行序号，下标 j 指明列序号. 矩阵通常用大写英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等表示，$m\times n$ 矩阵也记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$. 只由一行元素组成的 $1\times n$ 矩阵称为行矩阵，形如

$$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

只由一列元素组成的 $m\times 1$ 矩阵称为列矩阵，形如

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

行矩阵和列矩阵又通常分别称为行向量和列向量. 如果 $m=n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵或 n 阶矩阵. 例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ 是 4×3 矩阵，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 是 3 阶方阵，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是列向量，$(1,0,1,1)$ 是行向量.

如果两个矩阵的行数相等，列数也相等，则称它们是同型矩阵. 如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵，并且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

那么称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

元素都是零的矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}$. 注意不同型的零矩阵是不同的.

对方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

而言，元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 组成主对角线，而元素 $a_{1n},a_{2,n-1},\cdots,a_{n1}$ 组成次对角线. 除了主对角线元素外，其他元素全为零的方阵，即形如

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

的方阵称为对角阵，并且记作 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 如果 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$，那么矩阵就称为纯量矩阵. 当 $\lambda=1$，纯量矩阵就称为单位阵或单位矩阵，并且记作

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & 0 & \cdots & 0\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$$

的方阵，分别称为上三角形矩阵与下三角形矩阵，简称上三角阵与下三角阵.

矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

称为阶梯形矩阵. 确切地说，阶梯形矩阵的每行形成一级"阶梯"，满足下列两个条件：

(1) $\boldsymbol{A}$ 中若有零行（元素全为零的行），那么说明以下的行（如果有的话）全是零行；

(2) 非零行中左起第一个不为零的元素的位置按行从上到下往右移动，例如，

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & -5 & 4 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 2 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

都是阶梯形矩阵，而

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

均不是阶梯形矩阵.

特别地,如果阶梯形矩阵还满足下列两个条件,则称这个矩阵为规范阶梯形矩阵,即行最简形矩阵.

(1) 每个非零行的第一个非零元为 1;

(2) 每个非零行的第一个非零元所在的列的其他元素都为零.

例如,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

都是规范阶梯形矩阵.

1.1.2　矩阵的运算

1. 矩阵的加(减)法

定义 1.2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵. 它们的和指的是矩阵 $(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$,记为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

此运算称为矩阵的加法.

应该注意,只有当两个矩阵是同型矩阵时,它们才能进行加法运算.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵,则矩阵加法满足以下运算规律:

(i) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(ii) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(iii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,记

$$-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}.$$

$-\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵,这里有

(iv) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

由此,矩阵的减法定义为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

2. 数与矩阵相乘

定义 1.3 数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的乘积记为 $\boldsymbol{A}\lambda$ 或 $\lambda\boldsymbol{A}$，规定为

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=(\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

此运算称为矩阵的数量乘积，简称数乘.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵，λ,μ 为数，则数乘运算满足下列运算规律：

(i) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$；

(ii) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$；

(iii) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

矩阵的加法与数乘，统称为矩阵的线性运算.

例 1.1 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&2&-1\\3&0&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&4&0\\2&8&1\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{A}+(-2\boldsymbol{B})&=\begin{pmatrix}3\times5&3\times2&3\times(-1)\\3\times3&3\times0&3\times2\end{pmatrix}\\&\quad+\begin{pmatrix}(-2)\times(-1)&(-2)\times4&(-2)\times0\\(-2)\times2&(-2)\times8&(-2)\times1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}15&6&-3\\9&0&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-8&0\\-4&-16&-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}17&-2&-3\\5&-16&4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

1.1.3 矩阵的乘法

矩阵的数乘和加法的定义比较自然，它们的运算规律和数的运算规律类似，因而容易接受. 下面引入矩阵的乘法，这种运算起初看起来会显得有些不自然，不易接受，但以后就会看到这种定义的内在背景，它正是某类事物规律的反映.

定义 1.4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，则规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

并将此乘积记为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$.

注意，只有当左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

由定义 1.4 可知，行矩阵 $\boldsymbol{A}_{1\times s}$ 与列矩阵 $\boldsymbol{B}_{s\times 1}$ 的乘积是一个 1 阶方阵，即一个数，

$$(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{is})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} = c_{ij}.$$

这表明，乘积 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 就是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列相应元素乘积之和.

例 1.2　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=(b_1\ b_2 \cdots\ b_n),$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=(b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n)_{1\times 1}.$$

例 1.3　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{AC}$ 及 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

从上面例题中可以看出，矩阵乘法和我们熟悉的数的乘法运算规律有许多不同之处：

(1) 矩阵乘法交换律不成立，即不是对所有矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；

(2) 存在矩阵 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，这表明若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则不一定能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；

(3) 消去律不成立,即使 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,也不一定能导出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$(例 1.3).

例 1.4 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

试确定所有与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换的矩阵,即求满足条件 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$ 的矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 由题设 $\boldsymbol{AX},\boldsymbol{XA}$ 均有意义,但 $\boldsymbol{X}$ 应是 2×2 矩阵. 设

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$ 得

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ -x_{11} & -x_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}-x_{12} & 0\\ x_{21}-x_{22} & 0\end{pmatrix}.$$

由矩阵相等的定义知

$$\begin{cases}x_{11}=x_{11}-x_{22},\\ x_{12}=0,\\ -x_{11}=x_{21}-x_{22},\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x_{12}=x_{22}=0,\\ x_{11}=-x_{21}.\end{cases}$$

于是所有与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换的矩阵为

$$\begin{pmatrix}x_{11} & 0\\ -x_{11} & 0\end{pmatrix},$$

其中 x_{11} 为任意常数.

虽然矩阵乘法与数的乘法有不同的地方,不过,矩阵乘法仍满足下列运算规律(假设运算都是可行的):

(i) $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{O}$;

(ii) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

(iii) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC},(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$;

(iv) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$($\lambda$ 是数).

有了矩阵的乘法,我们可以定义方阵的幂.

定义 1.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,则规定

$$\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\cdot\boldsymbol{A},$$

其中 k 为正整数,即 $\boldsymbol{A}^k$ 是 k 个 $\boldsymbol{A}$ 的连乘,称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂.

容易看出,方阵的幂满足以下运算规律:

$$\boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}, \quad (\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl},$$

其中 k,l 为正整数. 因为矩阵乘法不满足交换律,所以,一般地,$(\boldsymbol{AB})^k \neq \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

设 $f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0$,系数 $a_0,a_1,\cdots,a_m$ 均为常数,$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,那么

$$a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$$

有意义,它仍为 n 阶方阵,记为 $f(\boldsymbol{A})$,即

$$f(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E},$$

称它为 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵多项式.

例 1.5　求证

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}.$$

证　用数学归纳法,当 $n=1$ 时,等式显然成立. 设 $n=k$ 时等式成立,即

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta\\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}.$$

要证 $n=k+1$ 时,等式也成立. 因为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{k+1}&=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^k\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos k\theta\cdot\cos\theta-\sin k\theta\cdot\sin\theta & -\cos k\theta\cdot\sin\theta-\sin k\theta\cdot\cos\theta\\ \sin k\theta\cdot\cos\theta+\cos k\theta\cdot\sin\theta & -\sin k\theta\cdot\sin\theta+\cos k\theta\cdot\cos\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta\\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta\end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以等式成立.

例 1.6　设 $f(x)=x^2-2x-3$,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}$,求 $f(\boldsymbol{A})$.

解

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 8 & 9\end{pmatrix},$$

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 8 & 9\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

1.1.4　矩阵的转置

定义 1.6　把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序号的列所得到的矩阵,称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$,即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n},$$

则

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ji})_{n\times m}.$$

矩阵的转置也是矩阵的一种运算,满足下列运算规则:

(i) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$;

(ii) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$;

(iii) $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$;

(iv) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

(i),(ii),(iii)显然成立,下面证明(iv).

设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$,$B=(b_{ij})_{s\times n}$,记 $AB=C=(c_{ij})_{m\times n}$,$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=D=(d_{ij})_{n\times m}$,于是有$(AB)^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}=(c_{ij})_{n\times m}$,其中

$$c_{ij}=a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{js}b_{si}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}.$$

B^{T} 的第 i 行为$(b_{1i},b_{2i},\cdots,b_{si})$,$A^{\mathrm{T}}$ 的第 j 列为$(a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{js})^{\mathrm{T}}$. 故

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{s}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}=c_{ij}.$$

所以 $D=C^{\mathrm{T}}$,即 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=(AB)^{\mathrm{T}}$.

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$为 n 阶方阵. 如果 $A=A^{\mathrm{T}}$,即 $a_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$,则 A 称为对称(矩)阵;如果 $A^{\mathrm{T}}=-A$,即 $a_{ji}=-a_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$,则 A 称为反对称(矩)阵.

例 1.7 证明任何 n 阶方阵均能表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和.

证 注意到 $A+A^{\mathrm{T}}$ 是对称矩阵,$A-A^{\mathrm{T}}$ 是反对称矩阵,而 $A=\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})$. 因此结论成立.

1.1.5 共轭矩阵

设 a_{ij} 为复数,$\overline{a_{ij}}$ 为 a_{ij} 的共轭复数,则 $A=(a_{ij})$ 和 $\overline{A}=(\overline{a_{ij}})$ 为复矩阵,称 $\overline{A}$ 为 A 的共轭矩阵. 对复矩阵 A,B 及复数 λ,共轭运算满足(假设运算都是可行的):