



全国高校教材学术著作出版基金资助  
国家自然科学基金项目资助 (No: 41273190)  
湖南科技大学学术出版基金资助

# 非线性模型空间测量数据 处理理论及其应用

李朝奎 著 ▶▶▶

THEORY AND APPLICATION  
OF DATA PROCESSING IN SPACE  
OF NONLINEAR MODELS



化学工业出版社



全国高校教材学术著作出版基  
国家自然科学基金项目资助 (No: 4  
湖南科技大学学术出版基

# 非线性模型空间测量数据 处理理论及其应用

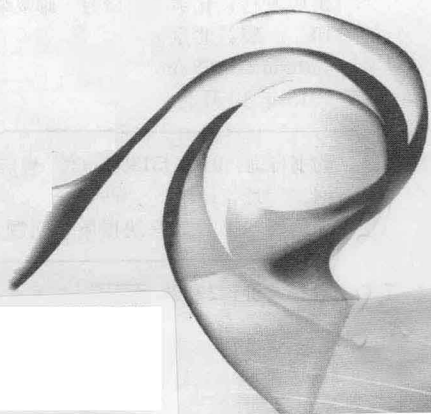
李朝奎 著 ►►►

THEORY AND APPLICATION  
OF DATA PROCESSING IN SPACE  
OF NONLINEAR MODELS



化学工业出版社

· 北京 ·



非线性模型在几何大地测量数据处理中是一种常见的平差模型。目前对非线性模型的处理均是先将其用泰勒公式转化为线性模型,然后在线性空间进行处理。转化过程中的截断误差受未知参数先验初始值的影响很大,从而影响线性模型空间测量误差处理的精度。本书试图探索非线性模型空间的测量数据处理方法,该方法回避了非线性模型线性化过程中的截断误差。借助迭代法在非线性模型空间求解未知参数,从而提高测量平差与数据误差处理精度。

#### 图书在版编目(CIP)数据

非线性模型空间测量数据处理理论及其应用/李朝奎著.  
北京:化学工业出版社,2013.7  
ISBN 978-7-122-17409-3

I. ①非… II. ①李… III. ①非线性-线性模型-空间测量-数据处理 IV. ①P236

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 104528 号

---

责任编辑:刘亚军

责任校对:边涛

装帧设计:张辉

---

出版发行:化学工业出版社(北京市东城区青年湖南街13号 邮政编码 100011)

印装:北京云浩印刷有限责任公司

850mm×1168mm 1/32 印张 5¼ 字数 139 千字

2013年10月北京第1版第1次印刷

---

购书咨询:010-64518888 (传真:010-64519686) 售后服务:010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书,如有缺损质量问题,本社销售中心负责调换。

---

定 价:29.00 元

版权所有 违者必究

# 前 言

随着测绘科学技术发展,线性模型空间测量平差与数据处理方法已成为制约测量数据处理精度进一步提高的瓶颈。二十多年来,非线性平差、变点分析、神经网络方法、非线性回归分析等领域的研究取得重大进展,为非线性模型空间测量数据处理理论的研究奠定了数学基础。但仍有很多应用理论问题需要进一步研究。本书围绕非线性模型空间测量平差与变形数据分析的有关问题,用综合的、联系的、系统的方式进行研究,得出了一些阶段性成果或层次性结论,无疑会对现有非线性测量数据处理理论的发展起到积极的促进作用。

本书首先对误差和精度的定义与分类进行研究,其特点是把粗差归入随机误差类,同时提出以广义精度作为参数质量的评价标准;其次研究了非线性模型的数学特征,从理论上提出了基于 Cook 距离的强、弱非线性模型的可区分性推断新标准;提出基于真误差定义的  $SMSE = \min E(x - \bar{x})^2$  融合抗差参数估计准则,采用 AR(1) 部分延续模型对真误差进行描述,对 SMSE 准则约束下的平差模型,借助迭代技术在非线性模型空间进行解算,运用 Monte-Carlo 方法对非线性模型空间函数方差进行估计;以 MLE 为背景,推导了基于非线性方差分量模型的随机参数估计方法,给出了融合抗差理论背景下测量平差(广义)精度的评定公式;给出了非线性时序分析中因素、指标、模型的分解与综合的多种方法,对非参数型非线性时序模型的估计方法作了详细推证,给出了非线性时序分析中高维数

据的降维方法。

将上述部分理论与方法运用于非线性 GPS 基线解算、GPS 水准高程的非线性高斯函数拟合及桥塔位移的非线性时序分析等应用问题，得出许多有意义的结论和满意结果。这从实践上对本书提出的理论与方法进行了验证。

本书的出版可能激励业内人士对非线性测量数据处理理论做更为深入的研究。果如是，作者甚是欣慰。

本书在编撰过程中得到湖南科技大学研究生冯志元、殷智慧、张强、严雯英、陈果等的大力支持，他们在本书图表绘制与书稿校对过程中做了大量工作，在此深表感谢。

本书可作为地学类研究生、高年级本科学生及研究技术人员的参考教材。限于作者水平，书中错误在所难免，恳请读者批评指正。

作者

2013 年 7 月 2 日

# 目 录

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| <b>1 非线性测量误差处理理论概论</b> .....        | 1   |
| 1.1 线性模型空间测量误差处理理论进展 .....          | 1   |
| 1.2 非线性测量数据处理理论研究现状 .....           | 10  |
| 1.3 本章小结及研究内容安排 .....               | 20  |
| <b>2 非线性模型的可区分性及其处理方法</b> .....     | 23  |
| 2.1 问题的提出 .....                     | 23  |
| 2.2 非线性模型的可区分性研究 .....              | 24  |
| 2.3 非线性模型的处理方法 .....                | 31  |
| 2.4 非线性模型的综合处理方法与计算实例 .....         | 41  |
| 本章小结 .....                          | 43  |
| <b>3 非线性模型空间平差参数的估计理论</b> .....     | 44  |
| 3.1 非线性模型空间参数估计与算法概述 .....          | 44  |
| 3.2 非线性最小二乘估计理论及其算法 .....           | 45  |
| 3.3 非线性多源抗差估计理论 .....               | 53  |
| 3.4 非线性模型空间平差函数精度的估计方法 .....        | 66  |
| 本章小结 .....                          | 75  |
| <b>4 非线性模型空间随机参数的估计理论及其算法</b> ..... | 76  |
| 4.1 非线性随机参数估计概述 .....               | 76  |
| 4.2 非相关权阵的获取方法 .....                | 78  |
| 4.3 非线性模型空间随机参数的估计理论及其算法 .....      | 80  |
| 4.4 非线性模型空间测量平差精度的评定方法 .....        | 90  |
| 4.5 非线性估计量的统计特性 .....               | 95  |
| 本章小结 .....                          | 96  |
| <b>5 非线性模型空间时序模型的统计推断</b> .....     | 97  |
| 5.1 概述 .....                        | 97  |
| 5.2 非线性时序数据结构的分解 .....              | 99  |
| 5.3 非线性时序数据结构的综合 .....              | 102 |

|          |                               |            |
|----------|-------------------------------|------------|
| 5.4      | NLAR (P) 模型非参数估计的降维技术 .....   | 108        |
| 5.5      | 非线性时序模型的非参数估计 .....           | 111        |
| 5.6      | 非线性时间序列的假设检验 .....            | 116        |
|          | 本章小结 .....                    | 123        |
| <b>6</b> | <b>非线性测量数据处理理论的几点应用 .....</b> | <b>124</b> |
| 6.1      | 参数估计理论在 GPS 基线解算中的应用 .....    | 124        |
| 6.2      | 基于模型变点理论的桥塔位移非线性时序分析 .....    | 132        |
| 6.3      | 参数估计理论在 GPS 水准高程测量中的应用 .....  | 140        |
|          | 本章小结 .....                    | 149        |
| <b>7</b> | <b>主要结论 .....</b>             | <b>150</b> |
|          | <b>参考文献 .....</b>             | <b>153</b> |

# 1 非线性测量误差处理理论概论

目前尚未形成可普适化的非线性模型空间测量数据处理理论。从科学的观点看,非线性模型空间测量数据处理理论必将成为测量理论界的研究重点。线性模型空间的测量数据处理理论经过二百多年的发展,已形成完整的理论体系,是非线性模型空间数据处理理论的特殊矛盾,从矛盾的特殊性到矛盾的普遍性不失为研究问题的有效方法。这里先简要介绍线性模型空间测量数据处理理论的进展。

## 1.1 线性模型空间测量误差处理理论进展

### 1.1.1 测量误差的基本概念及其分类

测量误差是测量学的全部含义,误差处理理论与方法的进展体现了整体测量数据处理理论的发展。因此,首先讨论测量误差的基本概念很具必要性。

**定义** 测量误差是指被测对象的观测值与其真值之间的差异量。用数学式表达为:

$$\epsilon = x - x_0 \quad (1.1)$$

这里,  $\epsilon$  表示测量(真)误差,包括系统误差  $\epsilon_s$ 、随机误差  $\epsilon_r$  及粗差  $\epsilon_g$ ;  $x$  表示实际观测值;  $x_0$  表示  $x$  的客观真值。由于  $x_0$  是一个动态的变化量,很难精确获得,但(1.1)式具有重要的理论意义。实际应用式为:

$$\delta = x - \hat{x} \quad (1.2)$$

式中,  $x$  含义同上;  $\delta$  表示测量误差;  $\hat{x}$  表示  $x$  的期望,可操作性强。误差的处理总体上分为直接补偿和间接补偿。不同类型的误



差，其处理数学工具与方法不尽一致。这里涉及一个误差的分类问题，实质是分类的标准问题。下面简述有代表性的三种分类标准：

(1) 从误差的数学处理角度，将误差分为三类<sup>[1~3]</sup>：系统误差、随机误差和粗差。

(2) 从误差产生的原因、特点和规律、误差对测量结果的影响性质，把误差分为两类<sup>[4]</sup>：随机误差和系统误差。这里已经将粗差归入随机误差，其理由是粗差是一种大量级误差，其大小、位置及产生无法事前预计与控制，具有随机性。大量实践表明：粗差出现的概率为 5% 左右。

(3) 从统计学的角度，将系统误差、随机误差、粗差均视为模型误差<sup>[5]</sup>。

显然，对误差作上述分类的最终目的是为了有效地控制与处理测量误差。但必须指出：上述分类不具有绝对的意义。其理由是：①各种误差的影响因素及表现形式复杂，且在一定的条件下相互转化；②随着测绘领域的拓展，测绘手段的更新，测量误差的积累规律与统计规律有新的特点。

### 1.1.2 精度的内涵与分类

精度是误差的统计特征。不少文献将精度定义为：误差分布的密集与离散程度。这是一个狭义的精密度概念。把精度等同于精密度是不严密的。对于精密度、准确度与（广义）精度三者，王志忠<sup>[6]</sup>，李朝奎<sup>[4]</sup>最新的研究指出：①精密度主要是随机误差的统计特征，是观测值相对其期望而言；②准确度主要是系统误差的统计特征，是观测值的期望相对其真值而言；③（广义）精度主要是真误差的统计特征，是观测值相对其真值而言。

误差与精度的关系如图 1.1 所示，对精度分类的目的是解释数据质量，充分利用有效信息、排除有害信息。

### 1.1.3 线性模型空间测量数据处理理论进展

测量数据处理理论的进展始终伴随着人们对测量误差认识的深化与数学理论工具的进展。自 1806 年勒让德尔（A. M. Legendre）

首次明确提出最小二乘法原理，测量学进入了理论发展时期。二百多年来，随着人们对误差源认识的深化与误差处理数学工具不断发展，线性模型空间测量平差与数据处理理论的发展大致经历了四个阶段。

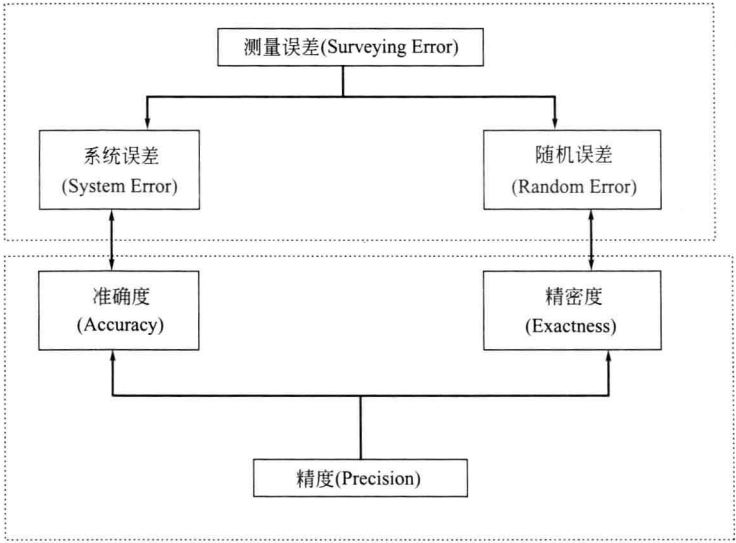


图 1.1 误差与精度对应关系

### 1.1.3.1 随机误差 $\epsilon_r \neq 0$ ，粗差 $\epsilon_g = 0$ ，系统误差 $\epsilon_s = 0$

起初人们把  $\epsilon_g$  定义为：由于操作者粗心或对仪器操作不熟练引起的误差； $\epsilon_s$  由仪器结构不完善产生。因此  $\epsilon_g$  主要通过加强作业员的责任感及提高其操作技能得到控制； $\epsilon_s$  通过预先检校仪器实现对观测值的补偿。所以经典平差理论主要的二个研究重点放在：①消除随机误差的影响；②法方程的优化算法。

1912 年，马尔柯夫 (Markov) 提出著名的 Gauss-Markov 模型：

$$E(L) = AX \tag{1.3}$$

$$\Sigma = \sigma^2 Q = \sigma^2 P^{-1} \tag{1.4}$$

式(1.3) 为函数模型，式(1.4) 为随机模型。式中， $E(\cdot)$  表示

数学期望； $L$  为观测向量； $X$  为未知参数向量； $A$  为  $X$  的系数矩阵； $\Sigma$  表示方差； $\sigma^2$  为单位权方差； $Q$  表示对角权逆矩阵； $P$  为对角权阵。Gauss-Markov 模型适用于随机独立误差的情形。

1947 年，田斯特拉 (T. M. Tienstra) 从测量平差之观点扩展了 Gauss-Markov 模型，将式中的由对角阵扩展为满秩非对角方阵，提出了相关平差法，即：

$$E(L) = AX \quad (1.5)$$

$$\Sigma = \sigma^2 Q = \sigma^2 P^{-1} \quad (1.6)$$

$$\text{Dim}(Q) = n \quad (1.7)$$

$$R(Q) = R(P) = n \quad (1.8)$$

这里  $P$ 、 $Q$  为非对角阵。相关平差将观测误差随机独立的要求推广到随机相关的情形，从而扩展了平差对象并形成统一的平差模型：

$$BV + A\hat{X} = f; \quad C\hat{X} = W_C; \quad E(\Delta) = 0; \quad \Sigma = \sigma^2 Q = \sigma^2 P^{-1} \quad (1.9)$$

在法方程解算方面，1876 年史赖伯 (O. Schreiber) 提出所谓史赖伯法则；1905 年克里格尔 (L. Krueger) 提出分组平差；1923 年博尔兹 (H. Boltz) 提出了扩展法及用大地线代替三角锁部的赫尔默特 (F. R. Helmert) 平差法。这些方法都不同程度地缓解了当时计算手段落后的矛盾。

### 1.1.3.2 随机误差 $\varepsilon_r \neq 0$ ，粗差 $\varepsilon_g \neq 0$ ，系统误差 $\varepsilon_s = 0$

实验统计表明<sup>[7,8]</sup>，随着观测次数的无限增多，一般有 5‰～10‰ 的异常值。异常值的大小、位置、符号都表现出强的随机性。朱建军<sup>[9]</sup>，於宗俦<sup>[10]</sup> 把粗差定义为“大量级测量误差”，周江文<sup>[11]</sup> 定义粗差为“离群的误差”，从而把粗差从纯粹起因于主观原因或客观原因的定義模式中分离出来。实际中粗差的界定标准具有模糊性，用残差定义粗差属于一种循环定义模式，因为残差中有粗差之贡献。因此，不能采用一些简单的方法如增加多余观测等来进行粗差控制，而应在平差中同时考虑  $\varepsilon_r$  和  $\varepsilon_g$  的处理问题。这方面

的研究主要在两个方向展开：①研究平差系统的可靠性——系统发现粗差的能力（称内可靠性）和不可发现的粗差对平差结果的影响（称外可靠性）；②寻找自动进行粗差定位的方法。

1968年 W. Baarda<sup>[12,13]</sup>；教授首先从理论上阐述了测量系统的 Data-Snooping 方法和 Reliability 理论，并从单个一维备选假设提出在已知单位权中误差时，以服从正态分布的标准化残差作为统计检验量的 Data-Snooping 方法。随后 Forstner<sup>[14]</sup>、Heck<sup>[15]</sup>等导出了方差未知时的  $\tau$  检验统计量；Pope<sup>[16]</sup>和 Koch<sup>[17]</sup>等推出了方差未知时的  $\tau$  检验统计量。Forstner<sup>[14]</sup>和 Koch<sup>[17]</sup>等将 Data-Snooping 理论推广至单个多维备选假设，在此基础上提出多维粗差探测的  $F$  检验量。Benciolini<sup>[18]</sup>等采用组合向后一向前选择法识别粗差；李朝奎等<sup>[48]</sup>提出了粗差的随机模糊处理方法（RFP 法）；欧吉坤<sup>[49]</sup>提出粗差的拟准检定法（QUAD 法）；欧自强<sup>[19]</sup>依据该法提出多个粗差的序贯检验法，顾孝烈等<sup>[20]</sup>提出了多个粗差定位的矢量分析法；於宗传等<sup>[50]</sup>提出多维粗差的同时定位定值（LEGE）；Carosio<sup>[21]</sup>则通过对  $Q_{vv}$  进行谱分解进行主分量检验；Sarjakoski<sup>[22]</sup>和李德仁<sup>[23]</sup>则建立用人工智能启发式搜索技术在状态空间发现和改正粗差。1983年 Forstner<sup>[14]</sup>首次提出模型误差的可区分性，并从两个一维备选假设出发导出了可区分性本质上取决于统计检验量之间的相关性的结论。李德仁<sup>[5]</sup>从 Gauss-Markov 模型含两个多维备选假设出发提出平差系统的可区分性及可靠性理论，该理论可研究系统发现并区分不同模型误差的能力以及不可能与其他模型误差相区分的模型误差对平差结果的影响，从而为模型误差的区分与定位提供研究的基本理论和定位尺度。在实用上主要有三个研究途径：①粗差归入函数模型的粗差探测法；②粗差归入随机模型的稳健估计法；③污染分布下的抗差估计方法。

（1）粗差探测方面 粗差探测主要是利用传统的统计理论去检验、探测粗差的存在，然后剔除粗差，再用经典的数据处理理论进行数据处理。当视含有粗差的观测值为与同类观测值有相同的方

差、不同的期望的一个子样时，即：

$$L_i \sim N(E(L), \sigma^2) \quad (1.10)$$

$$L_j \sim N(E(L) + \Delta L_j, \sigma^2) (j \neq i) \quad (1.11)$$

这意味着粗差被视为模型误差的一部分，对应着所谓的均值漂移模型。对此，统计学家提出了一系列粗差检验的统计量。其中主要有：①单位权方差已知时，以服从正态分布的标准化残差作为统计检验量的单个粗差的检验方法（W. Baarda, 1968）；②单位权方差未知时，以服从  $t$  分布的残差作为检验量的单个粗差的检验方法（Forstner 等）；③单位权方差估值已知时，以服从  $\tau$  分布的残差作为统计检验量的单个粗差的检验方法（Pope, 等）；④单位权方差已知时，以服从  $\chi^2$  分布的 T 统计检验量进行多维粗差的检验方法（Koch 等）；⑤单位权方差未知时，以服从  $F$  分布的 T 统计检验量进行多维粗差的检验方法（Koch 等）。

(2) 在抗差估计理论方面 抗差估计的思想始于 19 世纪初。1953 年 G. E. P. Box 首先提出 Robustness 概念，随后 Tukey、Hubber 等对此进行了卓有成效的研究。20 世纪 80 年代以来，Hubber、Hampel 和 Roussoeuw 等先后发表论著<sup>[24~26]</sup>，从此奠定抗差估计理论基础。抗差估计方法常见的有三种：①极大似然型估计（M 估计）；②顺序统计量线性组合估计（L 估计）；③秩检验型估计（R 估计）。其中以 Hubber 提出的 M 估计（包括选权迭代法和 P 范数极小法）较有实用价值且易于实施。当视含有粗差的观测值与其他观测值有相同的期望、不同的方差的一个子样时即：

$$L_i \sim N(E(L), \sigma^2) \quad (1.12)$$

$$L_j \sim N(E(L), \sigma^2 + \Delta L_j) (j \neq i) \quad (1.13)$$

这意味着粗差被视为随机模型的一部分，对应着所谓的方差扩大模型。对此 Hubber 等提出了平差系统中削弱粗差对平差结果影

响的选权迭代法。文献[5,8,27,29]列出了几种较有影响的权函数：文献[29,30]提出几种等价权的具体形式。

对于 P 范数估计方法的研究，目前主要集中在目标函数  $\rho(\cdot)$  的选择上。 $\rho(\cdot)$  对于粗差的敏感程度可由影响函数进行度量：

$$IC(X; T, F) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T[(1-\epsilon)F + \epsilon\Delta x] - T(F)}{\epsilon} \quad (1.14)$$

式中，令  $F_s = (1-\epsilon)F + \epsilon\Delta x$ ，称  $F_s$  为污染分布； $\epsilon$  为污染率， $\Delta x$  为  $x$  处的点分布。式 (1.14) 表示观测值  $x$  对估计量的影响。

(3) 污染分布下的抗差估计理论 污染分布下的抗差估计理论的研究实际背景有二：①没有严格服从某一特定分布的观测序列，当实际分布与理论分布不符时会降低参数估值的可靠性及估计效率；②均值漂移模型、方差扩大模型都是污染误差模型的特殊情形，且各自有其局限性<sup>[5,9,11]</sup>。

1960 年 J. W. Tukey 提出了一种接近实际的分布模式：

$$G = (1-\epsilon)F + \epsilon H \quad (1.15)$$

上式称为污染分布，其中  $\epsilon$  为污染率，其理论取值范围为  $[0, 1]$ ，实际中  $\epsilon \in (0, 1)$ ； $F$  为主体分布； $H$  为污染分布，基于污染分布的抗差估计有两个难点：① $\epsilon$ 、 $H$  难以准确确定；②依据  $\epsilon$  对  $F$ 、 $H$  各自的估计进行组合困难。

对此 Hampel<sup>[25]</sup>等给出了  $\epsilon$  的上界即崩溃污染率的计算方法：

$$\epsilon = \frac{\eta}{1+\eta}, \text{ 其中 } \eta = \min \left[ -\frac{\varphi(-\infty)}{\varphi(+\infty)}, -\frac{\varphi(+\infty)}{\varphi(-\infty)} \right] \quad (1.16)$$

它表示假设分布与实际分布偏差的允许性度量即分布被污染的程度，朱建军<sup>[9]</sup>，王志忠<sup>[6]</sup>详细研究了基于污染分布的抗差估计方法，并给出了参数估计偏差的度量指标：

$$D_A(M, C) = \frac{(\beta - \beta_A)^T M (\beta - \beta_A)}{C} \quad (1.17)$$

这里  $D_A$  表示 Cook 距离,  $\beta_A$ 、 $\beta$  分别为污染与非污染分布下的参数估计。

### 1.1.3.3 随机误差 $\varepsilon_r \neq 0$ , 粗差 $\varepsilon_g = 0$ , 系统误差 $\varepsilon_s \neq 0$

这一阶段是在平差中同时处理偶然误差和系统误差。传统的数据处理方法中对系统误差的处理主要是以控制 (又称直接补偿) 为主, 文献 [4,5] 介绍了两种常用的方法。系统误差的规律及表现很复杂, 直接补偿难以很好地消除其影响。为此, 人们引入了系统误差的间接补偿法, 包括自检校法和验后补偿法。

自检校法又称附加参数的整体平差法。其要旨是: 在偶然误差模型的基础上加入一些附加参数用以抵偿观测数据中存在的系统误差对平差结果的影响, 其数学模型为:

$$\begin{aligned} L &= AX + BS + \Delta_n \\ \Delta &= BS + \Delta_n \\ E(\Delta) &= BS \\ \Sigma_{\Delta} &= \sigma_0^2 Q_{\Delta} = \sigma_0^2 P^{-1} \end{aligned} \quad (1.18)$$

式中,  $\Delta$  为误差向量;  $\Delta_n$  为随机误差向量;  $\Sigma_{\Delta}$  为  $L$  或  $\Delta_n$  的协方差阵;  $Q_{\Delta}$  为  $L$  或  $\Delta_n$  的权逆阵;  $BS = \Delta_s$ ,  $S$  为附加参数向量,  $B$  为其系数阵。

附加参数的选择方法有二: ①顾及系统误差特点的附加参数; ②多项式型的附加参数。

对于所选择的附加参数应作如下检验: 附加参数的统计检验、附加参数的必要性检验和附加参数的优化检验。

验后补偿法又称加修正值法, 它是由 Masson D'Autume 提出。该法是基于对非附加参数平差之残差进行分析处理, 其关键是确定修正值或修正值函数的规律。例如根据地面控制点在平差后的坐标残差进行最小二乘滤波与推估<sup>[31]</sup>。文献 [5,32] 详细介绍了大地测量与摄影测量平差中克服过度参数化及保持解的稳定性的具体方法:

- ①改善平差的几何条件；②将附加参数视为随机量按参数加权平差；③用最小二乘配置法估计基本参数和附加参数；④有偏估计。

#### 1.1.3.4 随机误差 $\varepsilon_r \neq 0$ ，粗差 $\varepsilon_g \neq 0$ ，系统误差 $\varepsilon_s \neq 0$

事实上，系统误差、粗差同样具有随机性<sup>[4,33]</sup>，二百多年来发展起来的粗差及系统误差的多种处理方法各有其特点，也都有其局限性。目前尚不具有绝对权威的理论能很好地解决“三差”的同时处理问题。然而现实的情况是：误差的随机分量，系统分量及异常分量同时并存于同一观测子样。20世纪80年代以来，人们一直在研究在平差系统中同时处理“三差”的问题。李德仁<sup>[5]</sup>教授主张从两个方面着手研究这一问题：①在理论上研究不同模型误差的可区分性；②在实践上寻找同时处理不同模型误差的方法。

刘文宝等<sup>[34]</sup>建议首先寻找“三差”的统一分布模式，然后发展“三差”的统一平差方法。可见，“三差”的同时处理不仅具有现实性，而且有其必要性，是误差处理理论的最终发展方向。国内学者於宗俦、孙海燕、陶华学、王新洲等为推动这一研究领域的发展做出了不少贡献。

#### 1.1.4 误差处理的衍生问题——方差的验后估计

误差的处理引出了方差分量的验后估计问题。这问题的提出有两个实践背景：①观测值由同类发展到不同类即由等精度观测发展到不等精度观测；②观测值由独立发展到相关。

普遍认为：先验权方差的不确定性对参数估计值的影响不明显，而对单位权估计有较大影响。因此方差的估计仍然作为一个误差处理的实际问题加以研究。文献[27]介绍了观测值的验前方差的常见获取方法。由此确定的平差中权阵是个满秩对角方阵。验前方差确定方法都有一定的局限性<sup>[27]</sup>，随着观测值的扩展，人们提出在平差过程中同时估计方差-协方差分量的验后估计方法。1924年，F. R. Helmert 首次提出方差分量的验后估计方法<sup>[35]</sup>，1967年和1970年，K. Kubik<sup>[36,37]</sup>从极大似然估计理论出发导出了验后方



差估计公式。随后, H. Ebner<sup>[38]</sup>、W. Forstner<sup>[39]</sup>和 W. Welsch<sup>[40]</sup>等进一步扩展和简化了 Helmert 估计方法。Rao<sup>[41]</sup>提出了方差分量估计的最小范数二次无偏估计法 (MINQUE), Kelm<sup>[42]</sup>论证了该法与 Helmert 方法的相互关系。1979 年以来, E. W. Grafarend<sup>[43]</sup>和 K. R. Koch<sup>[44]</sup>等将验后方差估计进一步扩展为验后方差——协方差分量估计。我国学者周江文教授<sup>[45]</sup>、李德仁教授<sup>[5]</sup>、陈永奇教授<sup>[46]</sup>、于正林教授<sup>[47]</sup>等为这一理论的完善与应用做了大量工作。目前这方面研究仍然存在两个难题: ①如何保证方差分量估计的非负性; ②非线性协方差矩阵中方差——协方差分量估计。

## 1.2 非线性测量数据处理理论研究现状

### 1.2.1 国内外非线性理论的研究现状

非线性理论是对非线性科学的定性、定量描述。20 世纪 60 年代, 在各门以非线性为特征的分支学科如耗散结构理论、分形 (Fractal) 理论、混沌 (Chaos) 理论、突变 (Mutation) 论、协同学 (Synergetics) 等的基础上综合、交叉形成非线性科学<sup>[103]</sup>。非线性科学的形成极大地改变了人们观察世界的方法和思考问题的方式, 在哲学与方法论上引起了一场深刻的革命。例如, 传统的科学方法是通过把复杂的研究对象不断细化进行研究, 因此方法对于局部研究能取得相当深入的认识。传统的科学方法对于诸如生态系统受损、自然灾害频发、环境污染等问题却无能为力。要对这些问题做出回答, 必须建立描述系统整体行为的理论体系, 该体系绝不是各专门学科知识的简单组合或对接, 而必须用非线性理论建立起它们之间的联系, 揭示其中的规律。因此, 非线性科学的形成被誉为 20 世纪自然科学的“第三次革命”。非线性科学的主体<sup>[139]</sup>包括孤子 (Soliton) 理论、分形 (Fractal) 理论、混沌 (Chaos) 理论。小波 (Wavelet) 理论是揭示分形局域标度性质的工具。三十多年来, 自然科学、工程技术和社会科学各领域广泛深入地开展了