高教版考试用书
www.eduexam.com.cn

2015

全国硕士研究生入学统一考试
数学考试参考书
（数学三适用）

凭书后增值服务卡
享超值服务

➔ 在线课程试听

➔ 优惠订手机报及课程

➔ 最新权威图书资讯

● 全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会

4

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

考试用书
iexam.com.cn

全国硕士研究生入学统一考试
数学考试参考书
（数学三适用）

2015

● 全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会

QUANGUO SHUOSHI YANJIUSHENG RUXUE TONGYI KAOSHI
SHUXUE KAOSHI CANKAOSHU (SHUXUE SAN SHIYONG)

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

在数学考试命题已经规范、成熟和稳定的今天，也是该书出版的第十二年，我们重新启用书名——《数学考试参考书》，这不仅仅是名字的改变，更体现了本书在继续规范引导考生使用《数学考试大纲》的同时，更加注重本书的参考功能——通过对考试内容的详细深入讲解让考生攻克难关、学透数学；通过对大量典型例题的分析让考生对数学产生兴趣并掌握数学的经典思想和方法。

本书的每一章分为三个部分：

第一，是每一章的导语。这里明确指出了《考试大纲》对考生提出的要求，考生需严格按照该要求复习，不遗漏任何知识点，也不要超纲复习。

第二，是考试内容概要。这里对考试大纲的知识点逐一进行了全面、细致、精准的分析，在保证全面阐述所有知识点的同时，对于重点和难点，绝不吝惜笔墨。考生一定要在复习的过程中，多次阅读这一部分，温故知新，熟稔于心。

第三，是典型例题分析。这部分通过大量的典型例题分析，洞悉考试命题规律、考生应对策略，其中包括了考研数学的经典数学思想和方法、考生易错易混知识点的提醒等，让考生知己知彼。

图书在版编目（CIP）数据

全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书/全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会编. --北京：高等教育出版社,2013.7

数学三适用

ISBN 978-7-04-037958-7

Ⅰ.①全… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 156069 号

策划编辑 张耀明　　责任编辑 张耀明　　封面设计 王 洋　　版式设计 余 杨
责任校对 殷 然　　责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　址	北京市西城区德外大街4号	网　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　刷	北京市密东印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　张	22.5	版　次	2013年7月第1版
字　数	710千字	印　次	2013年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　价	45.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　37958-00

前言

呈现在读者面前的这本《全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书》(以下简称《数学考试参考书》),自2002年7月份第一版出版至今,已经是第十二个年头了。

全国硕士研究生入学统一考试是国家选拔硕士研究生的最主要途径。其在教育类大规模、社会化全国统一考试项目中(不含博士生录用考试),就考试水准和层次来说,是我国最高水平的入学考试。从测量学角度来说,全国硕士研究生入学统一考试应是"常模参照"考试,即选拔性考试。命题工作须坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才,又有利于高等学校教学的原则,强调在考查知识的基础上重点考查考生分析问题和解决问题的能力,并且要采用科学的办法,保持考试水平和难度的稳定。

在全国硕士研究生入学统一考试的科目中,数学科目考试一直起着重要的选拔作用,体现在其考试内容较多、考题难度较大、考试分数的方差较大、区分度较高,很多考生因为数学科目考试的不理想而名落孙山。

如何复习好并考好数学,是一届又一届考研学子所面临的共同难题。于是,在2002年7月,高等教育出版社组织了多年负责大纲制订和修订的专家编写了第一版的《数学考试参考书》。

从2002年到2004年,《数学考试参考书》的出版,让社会和考生逐步明确了《数学考试大纲》的内容和要求,增加了考试的透明度,消除了考生对命题的神秘感,缓解了考生的焦虑心理,使得准备充分的考生能够正常发挥水平。《数学考试参考书》让考生能够读懂、学透知识点,非常适合全程自学,充分地体现了《数学考试参考书》的**参考性。**

从2005年到2011年,《数学考试参考书》更名为《数学考试大纲解析》,从该书的参考性功能逐步过渡为**规范性**功能,更加言简意赅地描述知识点、更多地以真题为例来阐述数学命题规律和解题方法,成为了《数学考试大纲》的重要补充和延伸,充分体现了《数学考试大纲解析》对考试的规范引导作用。

在数学考试命题已经规范、成熟和稳定的今天,我们重新启用书名——《数学考试参考书》,体现了本书在**继续规范引导考生使用《数学考试大纲》的同时,更加注重本书的参考功能——通过对考试内容的详细深入讲解让考生攻克难关、学透数学;通过对大量典型例题的分析让考生对数学产生兴趣并掌握数学的经典思想和方法。**

本书的每一章分为三个部分:

第一,是每一章的导语。这里明确指出了《考试大纲》对考生提出的要求,考生需严格按照该要求复习,不遗漏任何知识点,也不要超纲复习。

第二,是考试内容概要。这里对考试大纲的知识点逐一进行了全面、细致、精准的分析,在保证全面阐述所有知识点的同时,对于重点和难点,绝不吝惜笔墨。考生一定要在复习的过程中,多次阅读这一部分,温故知新,熟稔于心。

第三,是典型例题分析。我们常说,数学不是"看"懂、"听"懂,而是"做"懂的,这充分体现了做题对于理解、消化和掌握数学知识的极端重要性。这部分通过大量的典型例题分析,洞悉考试命题规律、考生应对策略,其中包括了考研数学的经典数学思想和方法、考生易错易混知识点的提醒等,让考生知己知彼。

在阅读"考试内容概要"和"典型例题"这两部分时,希望考生经常从三个方面去思考:

第一是知识角度——数学知识,尤其是概念和定理,特别容易因为一些理解上的偏差而产生错误,比如"函数的间断点可能是该函数的极值点吗?""函数在一点可导能否决定其在该点某邻域内的连续性?""如果多元函数在某点沿着任何方向的方向导数都存在,能否说明其在该点可微?"等等,考生需要在复习过程中,"准确无误"地消化和吸收数学知识。

第二是命题角度——要留心分析命题的特点和规律,着重在命题的重点和难点上下工夫。

第三是应试角度——命题专家都是多年从事数学教学工作,有着丰富教学经验的教师,他们对考生感到困难的地方、容易出错的地方,了若指掌。考生一定要在阅读本书时,多多注意命题的"陷阱",多做总结,吃一堑长一智。

本书由多年参加考研命题工作和常年在一线教学的专家学者张宇、蔡燧林、胡金德、谭泽光、张新、李播等同志共同制订写作大纲并编写,是集体智慧的结晶。我们无意使用水平有限这样的遁词,但确实希望同行专家和考生们提出意见和建议。

人们常说:十年磨一剑。这第十二版,理应有着标志性的意义。

编　者

目　录

微　积　分

线 性 代 数

概率论与数理统计

微积分

第1章 函数、极限、连续

在实数范围内，用极限工具研究函数的数学分支就是微积分. 本章内容，尤其是极限部分，是微积分的基础，考生必须熟练掌握. 不计间接命题，这部分直接命题的分值一般是一个小题(4分)和一个大题(10分左右)，足见本章内容的重要性.

按照《考试大纲》，本章要求理解与掌握的是：函数的概念，函数的表示法，复合函数及分段函数的概念，基本初等函数的性质及其图形，极限的四则运算法则，利用两个重要极限求极限的方法，无穷小量的概念和基本性质，无穷小量的比较方法，函数连续性的概念(含左连续与右连续)，闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理).

本章要求会求和了解的是：建立应用问题的函数关系，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，反函数及隐函数的概念，初等函数的概念，数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念，极限的性质与极限存在的两个准则，无穷大量的概念及其与无穷小量的关系，判别函数间断点的类型，连续函数的性质和初等函数的连续性，应用闭区间上连续函数的性质.

考试内容概要

一、函数的概念与性质

1. 函数

设 x 与 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，若对于每个 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则有一个确定的值与之对应，则称 y 为 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 称 x 为自变量，y 为因变量. 称数集 D 为此函数的定义域，定义域一般由实际背景中变量的实际意义或者函数对应法则的要求确定. 称相应的函数值的全体 $R=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 为函数的值域. 称 f 为对应法则.

注1 注意函数定义中 y 的唯一性. 在函数的定义中，对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为单值函数. 如果给定一个对应法则，按这个法则，对每个 $x\in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不是唯一的，于是，这样的对应法则就不符合函数定义了，我们称这种法则确定了一个多值函数. 在考研中所提到的函数是指单值函数，也就是当自变量 x 取一个值时，这个对应法则 f 要保证因变量 y 有唯一的实数值与之对应，否则就得分成若干个单值函数去研究. 比如如下的“隐函数存在问题”.

一般说来，只要在满足定义域的条件下，形如 $y=f(x)$ 的函数称为显函数，例如 $y=\sin x$；由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数称为隐函数，例如由方程 $x+y^3-1=0$ 确定的隐函数(其显式表示为$y=\sqrt[3]{1-x}$).但“隐函数存在”是有前提的. 大多数教材都是这样的提法：“如果 x 与 y 满足方程 $F(x,y)=0$，那么在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这个方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数.”考生是否注意到“在一定条件下”和“唯一的 y 值”这样的语句？请看下面的两个定理.

隐函数存在定理1 设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，$F(x_0,y_0)=0$，$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点(x_0,y_0)的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函

数$y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}$.

这里的 $F'_y(x_0,y_0)\neq0$，也就是$\frac{dy}{dx}$存在(且连续)，是定理的关键. 由此看来，所谓的“隐函数存在”，是要求在一个“指定的位置”，方程 $F(x,y)=0$ 能确定一个“不仅有意义，而且要有可导这种良好性质的函数”，而在一个指定位置处可导的函数必然首先得是单值的.

举个例子供考生理解：给出方程 $x^2+y^2-1=0$，设 $F(x,y)=x^2+y^2-1$，则

$$F'_x=2x,\ F'_y=2y,\ F(0,1)=0,\ F'_y(0,1)=2\neq0,$$

由上述隐函数存在定理 1 可知，方程 $x^2+y^2-1=0$ 在点(0,1)的某一邻域内能确定一个有连续导数的隐函数$y=f(x)$；而在点(−1,0)和点(1,0)就不存在这样一个有着连续导数的隐函数，因为在点(−1,0)和点(1,0)处的切线都是竖直方向的，显然导数不存在，在这两个点的任何去心邻域中，一个 x 对应着两个 y 的值，这就不符合函数定义了(如图 1-1-1 所示).

再看个典型的例子，对于伯努利双纽线(如图 1-1-2 所示)

$$F(x,y)=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0,$$

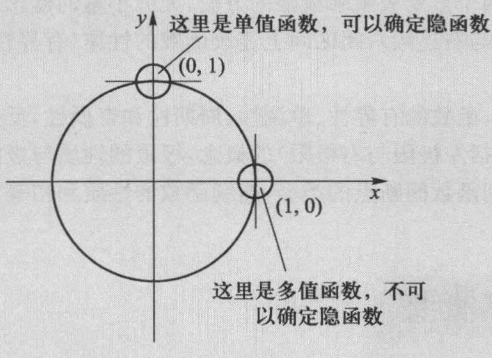

图 1-1-1

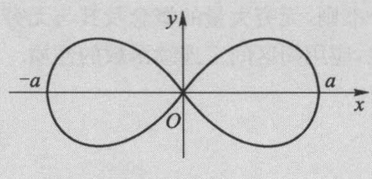

图 1-1-2

在点(0,0)，$(a,0)$，$(-a,0)$处，隐函数不存在；而在其他位置，隐函数都存在，你看出来了么？

这里还要指出的是，定理最后给出的$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}$这个公式就是隐函数求导公式，证明如下：将 $y=f(x)$ 代入 $F(x,y)=0$，得恒等式 $F(x,f(x))\equiv0$，在这个恒等式两边对 x 求导，得$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$，由于 F'_y连续，且$F'_y(x_0,y_0)\neq0$，所以存在(x_0,y_0)的一个邻域，在这个邻域内 $F'_y\neq0$，于是得$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}$.

于是，很自然地，可以把隐函数存在定理推广到多元函数. 既然一个二元方程 $F(x,y)=0$ 有可能确定一个一元隐函数，那么一个三元方程 $F(x,y,z)=0$ 也就有可能确定一个二元隐函数.

隐函数存在定理 2 设函数 $F(x,y,z)$在点 $P(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点(x_0,y_0,z_0)的某一邻域内能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

此公式的证明同样简单，将 $z=f(x,y)$代入 $F(x,y,z)=0$，得 $F(x,y,f(x,y))\equiv0$，将两端分别对 x 和 y 求偏导数，得

$$F'_x+F'_z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ F'_y+F'_z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

因为 F'_z连续，且 $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq0$，所以存在点(x_0,y_0,z_0)的一个邻域，使 $F'_z\neq0$，于是得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

同理，这里的 $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，也就是 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 都存在（且连续），是定理的关键. 请看 2005 年考研数学一的第(10)题：

设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点(0,1,1)的一个邻域，在此邻域内该方程

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$.

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$.

有了以上详尽的解释，再看此题，便十分简单了. 令

$$F(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1,$$

则

$$F'_x=y+e^{xz}z,\ F'_y=x-\frac{z}{y},\ F'_z=-\ln y+e^{xz}x,$$

于是

$$F'_x(0,1,1)=2\neq 0,\ F'_y(0,1,1)=-1\neq 0,\ F'_z(0,1,1)=0,$$

因此，在点(0,1,1)的某一个邻域 U_1 内，存在隐函数 $x=x(y,z)$；在点(0,1,1)的某一个邻域 U_2 内，也存在隐函数 $y=y(x,z)$. 于是，在邻域 $U=U_1\cap U_2$ 内，就存在两个连续可微的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$，故应选(D).

注 2　以下一些重要的函数在考试中出现过：

(1) $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 称为绝对值函数，如图 1-1-3 所示.

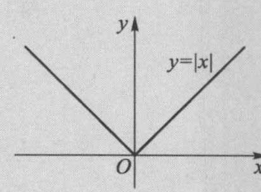

图 1-1-3

首先，该函数在 $x=0$ 处连续（没有间断），但是不可导（有折点，不光滑）. 这个函数虽然看起来不起眼，但在后面解题中会多次在判别似是而非的概念时给我们施以援手.

其次，绝对值函数和最大、最小值函数有着密切的联系，不妨来探究一下. 例如，设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为连续函数，如果令

$$U=\max\{f(x),g(x)\},\ V=\min\{f(x),g(x)\},$$

能否迅速准确地给出 $U+V,U-V,UV$ 的表达式？可能比较棘手.

如果能够发现

$$U=\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant g(x),\\ g(x), & f(x)<g(x);\end{cases}$$

$$V=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]=\begin{cases}g(x), & f(x)\geqslant g(x),\\ f(x), & f(x)<g(x),\end{cases}$$

则

$$U+V=f(x)+g(x),\ U-V=|f(x)-g(x)|,\ UV=f(x)g(x),$$

多么简洁！

姑且不论高等数学试题，就是在概率统计的经典考试题中，比如 2012 年考研数学的第 23 题，便有了重要应用：

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从参数为 1 的指数分布. 记 $U=\max\{X,Y\},V=\min\{X,Y\}$.

(Ⅰ) 求 V 的概率密度 $f_V(v)$；

(Ⅱ) 求 $E(U+V)$.

这个第(Ⅱ)问，由上述结论，直接得到

$$E(U+V)=E(X+Y)=EX+EY=2.$$

(2) $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 称为符号函数，如图 1-1-4 所示. 对于任何实数 x，有 $x=|x|\operatorname{sgn} x$.

有些经典数学试题的研究对象是用符号函数的形式给出的(此题要复习了二重积分的知识后再阅读):求

$$I=\iint\limits_D \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\text{其中 } D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}.$$

解答如下:由于

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

故 x^2-y^2+2 与 0 的大小关系成为关键. 用曲线 $x^2-y^2+2=0$ 将 D 分为 D_1,D_2,D_3,如图 1-1-5 所示.

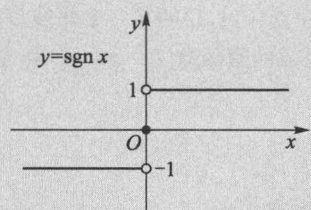

图 1-1-4

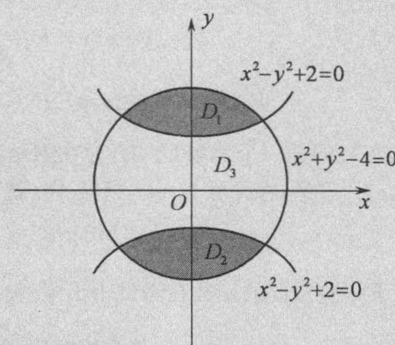

图 1-1-5

$$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D_3,\\ -1, & (x,y)\in D_1\cup D_2,\end{cases}$$

故

$$I=\iint\limits_D \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中

$$\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}y=\frac{2\pi}{3}-2\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

$$\iint\limits_{D_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi-2\left(\frac{2\pi}{3}-2\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right),$$

故

$$I=\iint\limits_D \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi-4\left(\frac{2\pi}{3}-2\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)=\frac{4\pi}{3}+8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

(3) $y=[x]$,称为取整函数. 先给出定义. 设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分,记作$[x]$. 如$[0.99]=0$,$[\pi]=3$,$[-1]=-1$,$[-1.99]=-2$. 因此,取整函数 $y=[x]$的定义域为 **R**,值域为 **Z**. 它的图形如图 1-1-6 所示,在 x 为整数值处图形发生跳跃.

从定义出发,有两点需要考生注意:

① 取整函数 $y=[x]$有如下一些重要性质(其中 n 为正整数):

$[x]\leqslant x<[x]+1$; $[x+n]=[x]+n$;

$n[x]\leqslant nx$; $[x]+[y]\leqslant[x+y]$.

② 考生需理解并记住极限:

$$\lim_{x\to0^+}[x]=0,\ \lim_{x\to0^-}[x]=-1.$$

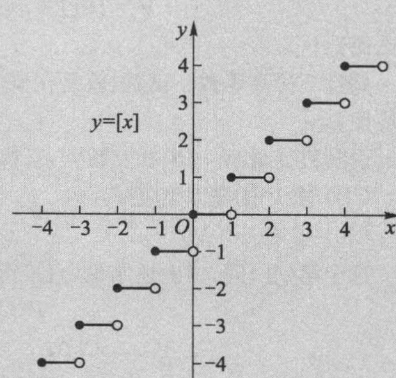

图 1-1-6

从历届考题来看，$x-1<[x]\leqslant x$ 最重要. 不妨举例如下：求 $I=\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{2013}{x}\right]$.

解答如下：当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{2013}{x}\to\infty$，难于理解和得出$[\infty]=$？此时想到极限计算的利器——夹逼准则（当常规求极限的方法，比如等价无穷小量替换、泰勒公式、洛必达法则无法使用时，一定要能够想起这个“两边夹击”的重要思想）.

根据 $x-1<[x]\leqslant x$，立即有

$$\frac{2013}{x}-1<\left[\frac{2013}{x}\right]\leqslant\frac{2013}{x},$$

于是

$$\begin{cases}2013-x<x\cdot\left[\dfrac{2013}{x}\right]\leqslant 2013, & x>0,\\ 2013-x>x\cdot\left[\dfrac{2013}{x}\right]\geqslant 2013, & x<0,\end{cases}$$

可见，无论 $x>0$，还是 $x<0$，不等式两边均可趋于同一极限，故

$$I=\lim_{x\to 0}x\left[\frac{2013}{x}\right]=2013.$$

(4) 分段函数. 在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数称为分段函数. 需要强调一句，分段函数是用几个式子来表示的一个（不是几个）函数. 分段函数的典型形式如下：

$$f(x)=\begin{cases}\varphi_1(x), & x>x_0,\\ a, & x=x_0,\\ \varphi_2(x), & x<x_0,\end{cases}\text{或 } f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\neq x_0,\\ a, & x=x_0.\end{cases}$$

几乎可以肯定地说，分段函数是所有这里提到的函数形式中最为重要的. 由于其形式的复杂性所带来的命题的丰富性，考研试题中，无论是求极限、求导数，还是求积分，出现最多的研究对象便是分段函数.

(5) $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$ 称为狄利克雷函数. 狄利克雷函数是一个有界的偶函数，且任意的有理数都是它的周期，它没有最小的周期.

狄利克雷函数是一个具体函数，但是当它出现在面前时，一切又是那么的抽象和难于理解. 比如，你能画出这个函数的图像吗？

狄利克雷函数的出现，在我们看来，是为了某种特殊目的——事实上，确实有一些“构造特别”的函数，可以在辨析某些似是而非的概念和说法时，起到意想不到的作用. 举下面一个例子供考生学习.

考生都十分熟悉的一个结论是：如果函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点可导，那么 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点必然连续. 这个结论的理解和证明都是轻而易举的. 但是，如果函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点可导，那么是否一定存在点 $x=x_0$ 的某个邻域，使函数在这个邻域内连续呢？很多考生以为：一点光滑，在这个点的“附近”无疑是连续的啊. 错了，这个答案是否定的，狄利克雷函数可以帮助我们给出反例. 设函数 $f(x)=x^2D(x)$，于是，

$$f(x)=x^2D(x)=\begin{cases}x^2, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

① 根据函数在一点连续的定义，下面验证

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(0+\Delta x)-f(0)]\overset{?}{=}0.$$

因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(0+\Delta x)-f(0)]=\lim_{\Delta x\to 0}[(\Delta x)^2D(\Delta x)],$$

由于当 $x\to 0$ 时，Δx 是无穷小量，而 $D(\Delta x)$ 天生就是有界的，根据“无穷小量乘以有界变量仍然是无穷小量”，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[(\Delta x)^2D(\Delta x)]=0$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续.

② 但是，在 $x=0$ 的任何一个邻域内，都有无数个有理数，也有无数个无理数，于是就会出现这样一个现象：不管多小的一个区间内，跳跃间断点多到我们数都数不过来——除了 $x=0$ 点外，处处都间断.

③ 而

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^2D(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to0}x\cdot D(x),$$

由于当 $x\to0$ 时，x 是无穷小量，$D(x)$有界，同样根据“无穷小量乘以有界变量仍然是无穷小量”，$\lim\limits_{x\to0}x\cdot D(x)=0$，也就是 $f'(0)=0$，得出 $f(x)$在 $x=0$ 点处可导.

综上所述，事实摆在面前，这个“长相特殊”的函数除了在 $x=0$ 点可导、在 $x=0$ 点连续外，在 $x=0$ 的任何一个邻域内都不连续.

(6) 幂指函数. 通常把幂指函数$u(x)^{v(x)}$ 转化为复合函数 $e^{v(x)\ln u(x)}$ 来处理，由此可见，幂指函数是初等函数.

一般说来，见到 $u(x)^{v(x)}$，就应该立即做变形：$u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$. 看个例子：求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}$.

有一种解法，根据重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$，于是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1,$$

这种解法犯了大忌：不可以人为制造 x 的趋向的先后顺序. 对于同一个 x，怎么可以先求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$，然后再求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$？

此题的正确做法，就是直接将分母做变形 $u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$，于是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}=e^{\frac{1}{2}}.$$

(7) 反函数. 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 R. 如果对于每一个 $y\in R$，必存在 $x\in D$ 使得 $y=f(x)$成立，则由此定义了一个新的函数 $x=\varphi(y)$. 这个函数就称为函数 $y=f(x)$的反函数，一般记作 $x=f^{-1}(y)$，它的定义域为 R，值域为 D. 相对于反函数来说，原来的函数也称为直接函数. 有两点要说明.

第一，直接函数的单值性无法保证其反函数的单值性. 比如直接函数 $y=x^2$ 的反函数是多值函数 $x=\pm\sqrt{y}$. 但如果直接函数是单值单调函数，就能保证反函数的单值性了. 比如函数 $y=x^2, x\in[0,+\infty)$是单值单调函数，故它有反函数 $x=\sqrt{y}$.

第二，若把 $x=f^{-1}(y)$与 $y=f(x)$的图形画在同一坐标系中，则它们完全重合. 只有把 $y=f(x)$的反函数$x=f^{-1}(y)$写成 $y=f^{-1}(x)$后，它们的图形才关于 $y=x$ 对称，事实上这也是 x 与 y 字母互换的结果.

例如：$y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$的反函数是 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. 因为，由 $y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$得关于 x 的方程 $e^{2x}-2ye^x-1=0$，解出

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1}>0，即\ x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}),$$

所以 $y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$的反函数是 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，定义域是 $\mathbf{R}$.

2. 函数的四种特性

(1) 有界性. 设 $f(x)$的定义域为 D，数集 $I\subset D$. 如果存在某个正数 M，使对任一 $x\in I$，有$|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 I 上有界；如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$在 I 上无界.

注 1 从几何上看，如果在给定的区间，函数 $y=f(x)$的图形能够被直线 $y=-M$ 和 $y=M$“完全包起来”，则为有界；从解析上说，能够找到某个正数 M，使得$|f(x)|\leqslant M$，则为有界.

注 2　有界还是无界的讨论首先得指明区间 I，不指明区间，无法讨论有界性. 比如函数 $y=\frac{1}{x}$，在$(2,+\infty)$内有界，但在$(0,2)$内无界.

注 3　什么是无界函数？事实上，只要在区间 I 上存在点 x_0 使得函数 $f(x)$的值为无穷大，则没有任何两条直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 可以把 I 上的 $f(x)$"包起来"，这就叫无界. 需要指出的是，无界函数并不要求所有定义域上的点都使得函数值为无穷大；只要存在这样的点 x_0 就可以了. 考研中常出与此相关的题目，比如：函数 $f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$在下列哪个区间内有界？

(A) $(-1,0)$.　(B) $(0,1)$.　(C) $(1,2)$.　(D) $(2,3)$.

分析　有如下两个重要结论：

① 若 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上有界.

② 若 $f(x)$在开区间(a,b)内连续，且极限$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在，则函数 $f(x)$在开区间(a,b)内有界.

本题中，当 $x\neq 0,1,2$ 时 $f(x)$连续，而

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=-\frac{\sin 3}{18},\lim_{x\to 0^-}f(x)=-\frac{\sin 2}{4},$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\frac{\sin 2}{4},\lim_{x\to 1}f(x)=\infty,\lim_{x\to 2}f(x)=\infty,$$

所以函数 $f(x)$在$(-1,0)$内有界，故选(A).

(2) 单调性. 设 $y=f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$在区间 I 上单调增加. 同理，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调减少的.

注　后面会看到，在考研试题中常常是用求导来讨论函数在某个区间上的单调性，但是对定义法也不可以忘记. 试题中也会用到如下定义法的判别形式，请考生留意：

对任何 $x_1,x_2\in D,x_1\neq x_2$，有

$f(x)$是增函数$\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\geqslant 0$；

$f(x)$是减函数$\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\leqslant 0$；

$f(x)$是严格增函数$\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$；

$f(x)$是严格减函数$\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$.

(3) 奇偶性. 设 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，则$-x\in D$). 如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数；如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数. 偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

注　设 $f(x)$是定义在$[-l,l]$上的任何函数，则 $F_1(x)=f(x)-f(-x)$必为奇函数；$F_2(x)=f(x)+f(-x)$必为偶函数. 显然 $f(x)$可以表示为一个奇函数和一个偶函数的和，这是因为 $u(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$是偶函数，$v(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$是奇函数，而

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=u(x)+v(x).$$

(4) 周期性. 设 $f(x)$的定义域为 D. 如果存在一个正数 T，使得对于任一 $x\in D$ 有$(x\pm T)\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$为周期函数，T 称为 $f(x)$的周期. 从几何图形上看，在周期函数的定义域内，每个长度为 T 的区间上函数的图形完全一样.

注 ① 奇函数 $y=f(x)$ 的图形关于坐标原点对称，当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义时，必有 $f(0)=0$.

② 偶函数 $y=f(x)$ 的图形关于 y 轴对称，且当 $f'(0)$ 存在时，必有 $f'(0)=0$.

③ 函数 $y=f(x)$ 与 $y=-f(x)$ 的图形关于 x 轴对称；函数 $y=f(x)$ 与 $y=f(-x)$ 的图形关于 y 轴对称.

④ 函数 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $x=T$ 对称的充分必要条件是 $f(x)=f(2T-x)$ 或 $f(x+T)=f(T-x)$.

3. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(D)\subset D_1$，则由下式确定的函数 $y=f[g(x)]$ $(x\in D)$ 称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D，u 称为中间变量. 对于复合函数，重要的是熟练掌握分解与复合的技术，这是考研的一个重要考点.

二、函数极限的概念、性质与定理

1. 邻域

(1) 一维的情形

邻域 以点 x_0 为中心的任何开区间称为点 x_0 的邻域，记作 $U(x_0)$.

δ 邻域 设 δ 是一个正数，则称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x|\ |x-x_0|<\delta\},$$

其中点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

δ 去心邻域 定义去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$：$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\ |0<|x-x_0|<\delta\}$.

左、右 δ 邻域 $\{x|0<x-x_0<\delta\}$ 称为点 x_0 的右 δ 邻域，记作 $U^+(x_0,\delta)$；$\{x|0<x_0-x<\delta\}$ 称为点 x_0 的左 δ 邻域，记作 $U^-(x_0,\delta)$.

(2) 二维的情形

δ 邻域 设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 是某个正数. 与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P|\ |PP_0|<\delta\}\text{或}U(P_0,\delta)=\{(x,y)|\ \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

δ 去心邻域 点 P_0 的 δ 去心邻域，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即 $\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P|\ 0<|P_0P|<\delta\}$. 需要指出的是，如果不需要强调邻域的半径 δ，则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域，点 P_0 的去心邻域记作 $\mathring{U}(P_0)$.

δ 邻域的几何意义 $U(P_0,\delta)$ 表示 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心、$\delta>0$ 为半径的圆的内部的点 $P(x,y)$ 的全体.

邻域与区间(区域) 邻域当然属于区间(区域)的范畴，但事实上，邻域通常表示“一个局部位置”，比如“点 x_0 的 δ 邻域”，就可以称为“点 x_0 的附近”. 于是，函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个 δ 邻域内有定义也就是函数 $f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义，这个“附近”到底有多近？既难以说明，也没有必要说明. 2007 年有一道考研数学题就是这样描述的：设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定，试判断曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性.

注 关于邻域的一组概念非常重要，因为我们将要“在一个局部位置”细致地研究问题.

2. 函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 若存在常数 A，对于任意 $\varepsilon>0$（不论它多么小），总存在正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\text{ 或 }f(x)\to A\ (\text{当 }x\to x_0).$$

写出语言是：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

注 (1) 这是用“ε-δ 语言”来描述函数极限. 符号“$\forall$”是英文 Arbitrary(任意的，武断的)的首字母上下方向倒着写出来的；符号“$\exists$”是英文 Exist(存在)的首字母左右方向倒着写出来的.

(2) 这里 x 的趋向方式要比数列问题多得多. 对于 $x\to x_0$，既要考虑 x 从 x_0 的左侧(即小于 x_0)无限接近 x_0:$x\to x_0^-$，也要讨论 x 从 x_0 的右侧(即大于 x_0)无限接近 x_0:$x\to x_0^+$；对于 $x\to\infty$，既包括 $x\to-\infty$，也包括 $x\to+\infty$. 考生应学会写出函数极限的精确定义，提示一下，对于 $x\to\infty$ 时的极限，其语言为：

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\text{当 }|x|>X\text{ 时，有 }|f(x)-A|<\varepsilon.$$

(3) 如何使用"ε-δ 语言"？请看例 1.1.7.

3. 函数的单侧极限

若当 $x\to x_0^-$ 时，$f(x)$ 无限接近于某个常数 A，则常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=A$；

若当 $x\to x_0^+$ 时，$f(x)$ 无限接近于某个常数 A，则常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0^+)=A$.

4. 函数极限存在的充要条件

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\text{ 且 }\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A;$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),\text{其中}\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

5. 函数极限的性质

唯一性 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么这个极限值唯一.

局部有界性 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在正常数 M 和 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

局部保号性 如果 $f(x)\to A\ (x\to x_0)$，而且 $A>0$(或 $A<0$)，那么存在常数 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

注 局部有界性和保号性的证明，见例 1.1.8 和例 1.1.9.

6. 无穷小量与无穷大量

无穷小量的定义 如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时函数 $f(x)$ 的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0\left(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=0\right).$$

特别地，以 0 为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n\to\infty$ 时的无穷小量.

无穷大量的定义 如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时，函数 $|f(x)|$ 无限增大，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大量，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\left(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty\right).$$

无穷小量与无穷大量的关系 在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小量，且 $f(x)\neq0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

无穷小量的比较 设在同一自变量的变化过程中，$\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=0$，且 $\beta(x)\neq0$，则：

(1) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小量，记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

(2) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq0$，则称 $\alpha(x)$ 是与 $\beta(x)$ 同阶的无穷小量.

(3) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 是与 $\beta(x)$ 等价的无穷小量，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

(4) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=C\neq0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小量.

注　并不是任意两个无穷小量都可进行比较的. 比如说，当 $x\to 0$ 时，$x\sin\frac{1}{x}$ 与 x^2 虽然都是无穷小量，但是却不可以比较，也就是说既无高低阶之分，也无同阶可言，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

再比如说，如果当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 0$，是否一定就有 $\sin[f(x)]\sim f(x)$？答案是否定的. 具体说来，当 $x\to 0$ 时，是否就有 $\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\sim x\sin\frac{1}{x}$？我们看到，在 $x=0$ 点的任一小的去心邻域内，总有点 $x=\frac{1}{k\pi}\to 0$（$|k|$ 为充分大的正整数），使 $\frac{\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{x\sin\frac{1}{x}}$ 在该点没有定义，故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{x\sin\frac{1}{x}}$ 不存在.

事实上，这是个极其隐蔽的细节，在考研命题中，命题人会注意不出现这种过于细致的讨论，考生了解上述说法即可.

7. 极限运算法则

若 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，那么：

(1) $\lim[kf(x)\pm lg(x)]=k\lim f(x)\pm l\lim g(x)=kA\pm lB$，其中 k,l 为常数.

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$.

特别地，若 $\lim f(x)$ 存在，n 为正整数，则 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

(3) $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

作为极限运算的特殊情形，我们提出下面关于无穷小量运算的运算法则.

8. 无穷小量运算法则

(1) 有限个无穷小量的和是无穷小量.

(2) 有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量.

(3) 有限个无穷小量的乘积是无穷小量.（注意是有限个，不是无穷个）

例如，
$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{[x]}, & x>1,n=1,\\ 1, & x<n([x]<n),n=2,3,\cdots,\\ \frac{n}{[x]-n+1}, & x\geqslant n([x]\geqslant n),n=2,3,\cdots,\end{cases}$$

对于每一个固定的 n，$\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=0$，且 $f_n(x)\neq 0$，那么，令

$$\begin{aligned}F(x)&=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}f_i(x)=\prod_{i=1}^{[x]}f_i(x)\lim_{n\to\infty}\prod_{i=[x]+1}^{n}f_i(x)=\frac{1}{[x]}\prod_{i=2}^{[x]}f_i(x)\\&=\frac{1}{[x]}\cdot\frac{2}{[x]-1}\cdot\frac{3}{[x]-2}\cdot\cdots\cdot\frac{[x]-2}{3}\cdot\frac{[x]-1}{2}\cdot[x]=1\neq 0,\end{aligned}$$

即，无穷多个无穷小量的乘积不一定再是无穷小量了. 怎么理解呢？这个结论是一个抽象的极限理论，可以这样说，数学上的很多事情并不都是能够被人们直观理解并接受的，这不能不说是一种“遗憾”.

(4) 高阶无穷小量的运算.

设 m,n 为正整数，则：

① $o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^l),l=\min\{m,n\}$.（加减法时低阶“吸收”高阶）

② $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n}),x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$.（乘除法时阶数“累加”）

③ $o(x^m)=o(kx^m)=k\cdot o(x^m),k\neq 0,k$ 为常数.（非零常数不影响阶数）

注　在后面的泰勒公式中，会对上述高阶无穷小量的运算提出要求，请考生学会正确书写.

9. 常用的等价无穷小量

当 $x\to 0$ 时，常用的等价无穷小量有：

$$\sin x \sim x,\ \tan x \sim x,\ \arcsin x \sim x,\ \arctan x \sim x,\ \ln(1+x) \sim x,\ \mathrm{e}^x - 1 \sim x,$$

$$a^x - 1 \sim x\ln a,\ 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,\ (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

注 使用等价无穷小量时一般都要做广义化：$x \to u$，请灵活使用. 不过要注意上述6中的"注".

10. 函数极限存在准则——夹逼准则

如果函数 $f(x)$，$g(x)$ 及 $h(x)$ 满足下列条件：

(1) $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$；

(2) $\lim g(x)=A$，$\lim h(x)=A$，

则 $\lim f(x)$ 存在，且 $\lim f(x)=A$.

注 (1) 若上述极限过程是 $x \to x_0$，则要求函数在 x_0 的某一去心邻域内有定义；若上述极限过程是 $x \to \infty$，则要求函数当 $|x|>X$（X 为充分大的正数）时有定义.

(2) 常见的一个问题是：若对任意的 x，总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 是否一定存在？答案是否定的. $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]$ 的存在并不能说明 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$，$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$ 都存在，从而也不能保证 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在. 例如，当 $x>0$ 时，取

$$\varphi(x)=x+\frac{1}{x+1},\ f(x)=x+\frac{2}{x+1},\ g(x)=x+\frac{3}{x+1},$$

则 $\varphi(x)<f(x)<g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在.

(3) 夹逼准则在考研中极其重要，无论大题或小题都经常用到这个工具，请大家给予足够的重视.

11. 洛必达法则

法则1 设：

(1) 当 $x \to a$（或 $x \to \infty$）时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零；

(2) $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 在点 a 的某去心邻域内（或者当 $|x|>X$（X 为充分大的正数）时）存在，且 $F'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\text{或}x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或为无穷大），则

$$\lim_{\substack{x\to a\\(\text{或}x\to\infty)}}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\(\text{或}x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

法则2 设：

(1) 当 $x \to a$（或 $x \to \infty$）时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于无穷大；

(2) $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 在点 a 的某去心邻域内（或者当 $|x|>X$（X 为充分大的正数）时）存在，且 $F'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\text{或}x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或为无穷大），则

$$\lim_{\substack{x\to a\\(\text{或}x\to\infty)}}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\(\text{或}x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

注 (1) 洛必达法则是用来计算"$\frac{0}{0}$"型或者"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式的极限的，不是或不确定是"$\frac{0}{0}$"型或者"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式，就不能用洛必达法则.

(2) 如果极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属于"$\frac{0}{0}$"型或者"$\frac{\infty}{\infty}$"型，且 $f'(x)$，$F'(x)$ 继续满足洛必达法则的条件，则可以继续使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{F''(x)}.$$

(3) 如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在也不为 ∞，不能推出 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 不存在也不为 ∞，简单一点说就是：对于 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$，"右存在，则左存在；但左存在，并不意味着右一定存在". 比如说，极限