普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

主　编　盛海林　蒋秋浩　顾　强
副主编　言方荣　王　菲　李雪玲　徐　畅

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学

主　编　盛海林　蒋秋浩　顾　强
副主编　言方荣　王　菲　李雪玲　徐　畅

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴近实际应用的原则，充分考虑高等数学课程教学时数减少的趋势，着重突出高等数学的基本思想和基本方法，并加入数学实验的基本思想，在每章后配套介绍 Mathematica 数学软件知识和数学实验内容.

本书共 11 章，前 6 章为基础知识和一元函数微积分，第七章是向量代数与空间解析几何，第八、九章是多元函数微积分，第十章为无穷级数，第十一章为微分方程. 书中除每节配有习题外，在每章最后也配有适量的习题. 书末附有习题答案与提示.

本书可作为高等学校工科、农学、医药学、经济、管理等专业的高等数学课程的教材，也可供自学者学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/盛海林，蒋秋浩，顾强主编. —北京：科学出版社，2013
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-03-038383-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①盛… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 189878 号

责任编辑：相　凌　李梦华 / 责任校对：韩　杨
责任印制：肖　兴 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2013 年 8 月第　一　版　开本：787×1092　1/16
2013 年 8 月第一次印刷　印张：25 1/2
字数：669 000

定价：46.00 元

前　　言

教材作为教学内容和教学方法的重要知识载体，它的优劣直接影响学生对知识的了解、掌握、创新的程度. 为了适应我国各行业飞速发展对应用型人才的需求，结合医药等多个专业对高等数学的关联程度，根据教育部《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，我们认真总结了多年的教学实践和教学经验，在认真分析、研究国内外高等数学的优秀教材的基础上精心组织编写了本教材.

在本书编写过程中，考虑到医药专业对数学的要求侧重于方法和应用的特点，在内容上重点放在基本概念、基本方法以及数学的应用上，而不是一味地追求数学原理上的严密性. 每章后面重点介绍高等数学在医药、经济、管理等方面的应用，以利于强化学生对数学的应用意识、兴趣及能力的培养.

为了适应现代教学的需要，每章后编排 Mathematica 软件的应用，希望学生能通过计算机软件掌握高等数学内容和计算方法，可为读者节省大量时间（即只要掌握概念，计算技巧可由计算机完成）.

高等数学是所有学科的基础，分析问题、解决问题的思维和方法是高等数学最主要的知识点. 期望读者通过学习能在较短时间内掌握高等数学精髓，从而为学习其他课程打下必要的基础.

为了教学需要，在每章后都归纳出本章知识结构，将每章的要点和关系清楚地表现出来，并选择多种题型的习题供读者训练，在书后给出习题答案，便于读者自学.

参与本教材编写工作的有蒋秋浩、顾强、盛海林、王菲、徐畅、李雪玲、言方荣、沈俊、郑桂梅、茹原芳和阎航宇等老师. 另外，科学出版社对本教材的编排、出版等提出了建设性意见，在此深表谢意.

由于编者水平有限，书中难免会有疏漏之处，我们真诚地希望得到专家、同行和读者的批评指正，使本教材在教学过程中得到不断完善.

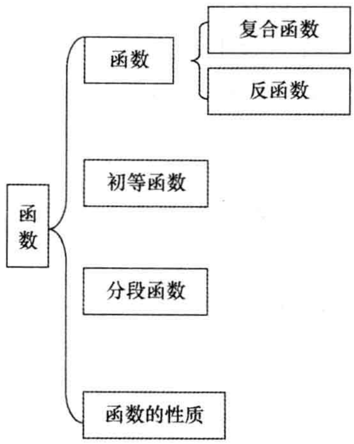
编　者

2013 年 5 月

目　　录

第一章　函　　数

本章知识网络图



函数是高等数学研究的主要对象，本章将初等数学中有关函数的主要知识点概括总结，为以后学习高等数学打下必要的基础.

第一节　函数的概念

一、集合与区间

1. 集合

1）集合的概念

所谓集合，就是指具有某个共同属性的对象的全体. 构成集合的每一个对象称为该集合的“元素”.

下面举几个集合的例子：

（1）某班级的全体同学；

（2）方程 $x^2-5x+6=0$ 的一切根；

（3）全体奇数.

一般地，用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，而用小写字母表示集合中的元素. 若 x 是集合 A 的元素，则记为 $x\in A$，读作“x 属于 A”；若 x 不是集合 A 的元素，则记为 $x\notin A$，读作“x 不属于 A”.

每个元素都是数的集合，称为数集. 例如，全体自然数的集合记为 $\mathbf{N}$，全体整数的集合记为 $\mathbf{Z}$，全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$ 等. 以后用到的集合主要是数集.

不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$.

2）集合的表示法

（1）列举法：是指按任意顺序列出集合中的所有元素，并用{ }括起来.

例如，由 2，4，6，8 所组成的集合，可表示为 $A=\{2,4,6,8\}$ 或 $A=\{4,8,2,6\}$ 等.

（2）描述法：是指把集合中元素所具有的某个共同属性描述出来，用 $A=\{x|x$ 具有的共同属性$\}$表示.

例如，$A=\{x|1\leqslant x<3, x\in\mathbf{R}\}$ 表示所有元素都具有大于或等于 1 且小于 3 的共同属性.

3）子集、集合的相等

设有两个集合 A,B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 称为 B 的子集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

显然，任何一个集合都是它自身的子集，即 $A\subset A$. 空集是任何一个集合的子集，即 $\varnothing\subset A$.

设有两个集合 A,B，如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

4）集合的运算

集合的并：由集合 A 与集合 B 中所有元素汇总构成的集合称为集合 A 与 B 的并，记为$A\cup B$.

例如，$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,7,8\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,4,7,8\}$.

集合的交：由既属于集合 A 又属于集合 B 的共同元素汇总构成的集合称为 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$.

例如，$A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{a,c,e,f\}$，则 $A\cap B=\{a,c,e\}$.

集合的运算可用图 1-1 中的阴影部分表示

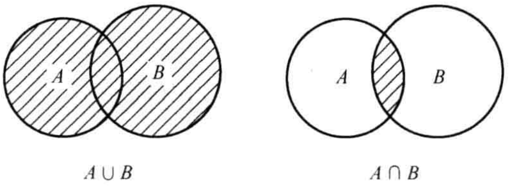


图 1-1

2. 区间、邻域

在实际问题中，一个变量根据所研究问题的条件，一般有着一定的变化范围. 如果超出这个范围，研究的问题就失去意义. 在数学中常用区间表示一个变量的变化范围，下面介绍一些常用的区间记号.

（1）开区间：$(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

（2）闭区间：$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

（3）半开半闭区间：$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

以上区间都称为有限区间，数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 在数轴上表示如图 1-2 所示.

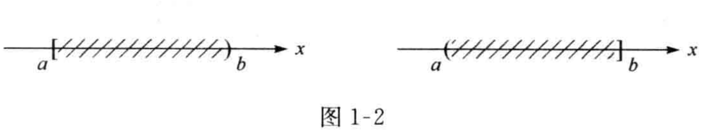


图 1-2

除了上述有限区间外,还有五种无穷区间:

(1) $(a,+\infty)=\{x|x>a\}$;

(2) $[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$;

(3) $(-\infty,a)=\{x|x<a\}$;

(4) $(-\infty,a]=\{x|x\leqslant a\}$;

(5) $(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$.

在数轴上表示如图 1-3 所示.

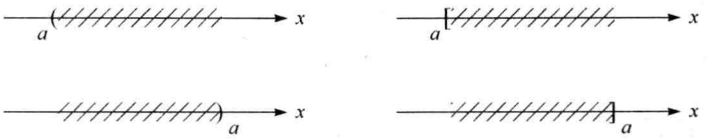


图 1-3

下面引入某点的"邻域"的概念.

所谓点 x_0 的 δ 邻域,是指以 x_0 为中心的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$,其中 $\delta>0$. 即满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的全体实数组成的集合,记为 $U(x_0,\delta)$. 点 x_0 为该邻域的中心,δ 为该邻域的半径. 在数轴上表示如图 1-4 所示.

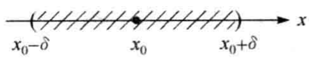


图 1-4

例如,$U\left(4,\frac{1}{4}\right)$表示开区间$\left(4-\frac{1}{4},4+\frac{1}{4}\right)$,即为(3.75,4.25).

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. $U(x_0,\delta)$ 去掉中心 x_0 后,称为点 x_0 的 δ 去心邻域,记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$. 显然 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$,这里 $0<|x-x_0|$ 就表示 $x\neq x_0$.

二、函数的概念

1. 函数的定义

在实际问题中,往往同时有几个变量在变化着,它们通常是相互依赖并遵循着一定的规律而变化. 例如,圆的面积 A 与它的半径 r 之间有如下依赖关系:

$$A=\pi r^2$$

当半径 r 取定某一正数值时,圆面积就有确定的数值和它对应.

一般地,可抽象出函数的定义.

定义　设 x 和 y 是两个变量,D 是给定的一个数集. 如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 函数. 记为 $y=f(x)$. 数集 D 称为这个函数的定义域,x 称为自变量,y 称为因变量.

此处定义的函数由于只有一个自变量对应因变量,通常也称为**一元函数**.

当 x 取某一数值 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值. 记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 任取 D 的各个数值时,对应的函数值全体组成的数集

$$W=\{y|y=f(x_0),x\in D\}$$

称为函数的值域.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应法则的记号"f"也可用其他字母,如 φ,ψ,F 等表示,这时函数就分别记作 $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$, $y=F(x)$ 等.

如果对于定义域中的每一点 x,对应的函数值 y 只有一个,这样的函数称为单值函数,否则称为多值函数.我们通常讨论单值函数.以后,如不作特殊说明,函数都是指单值函数.

2. 函数定义域的确定

在实际问题中,函数的定义域要根据问题的实际意义来确定,如圆面积 $A=\pi r^2$,要求半径 r 应取正数.

在数学中,若只给出函数的表达式,而没有说明函数的实际意义,函数的定义域就是指使得表达式有意义的自变量所能取的一切实数.

例 1　求函数 $y=\ln\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$ 的定义域.

解　要使所给定的函数表达式有意义,必须

$$\frac{1}{1-x}>0 \text{ 且 } x+2\geqslant 0$$

即 $x<1$ 且 $x\geqslant -2$.从而,该函数的定义域为 $[-2,1)$.

注　如果两个函数的对应法则 f 和定义域 D 都相同,则称这两个函数是相同的,否则就是不同的.至于自变量或因变量用什么记号表示,则无关紧要.

例 2　下列各对函数是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$,　$g(x)=1$;

(2) $f(x)=|x|$,　$g(x)=\sqrt{x^2}$.

解　(1) 不相同.因为定义域不同,$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 相同.因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的对应法则相同,且定义域均为 $(-\infty,+\infty)$.

3. 函数的表示法

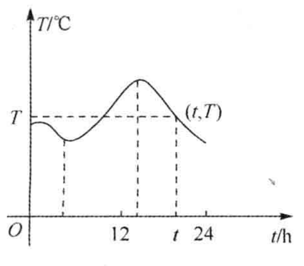


图 1-5

函数通常可用表达式、图像法或列表法等表示出来.

例 3　函数 $y=\log_2(5x-4)$(表达式).

例 4　某气象站用自动温度记录仪记下了一昼夜气温变化如图 1-5 所示.由图可见对于每一时刻 t,都有唯一确定的温度 T 与之对应,因而这种曲线在区间 $0\leqslant t\leqslant 24$ 上确定了一个函数(图像法).

例 5　某水文站统计了某河流在 40 年内的平均月流量 V 如下表:

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平均月流量 V/亿 m^3	0.39	0.30	0.75	0.44	0.35	0.72	4.3	4.4	1.8	1.0	0.72	0.50

由表可看出,在 V 与 t 之间建立了明确的对应关系,即当 t 每取一个值,由表即可得 V 有唯一的一个对应值,因而也确定了一个函数(列表法).

在数学中，函数主要是用表达式来表示的. 下面介绍几种常用函数.

例 6 数 x 的绝对值记为 $|x|$. 如果把 x 看成变量，则有函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

此函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$，它的图形如图 1-6 所示.

例 7 函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1-7 所示.

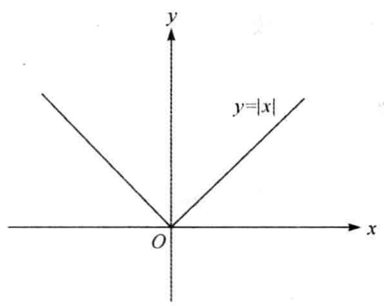


图 1-6

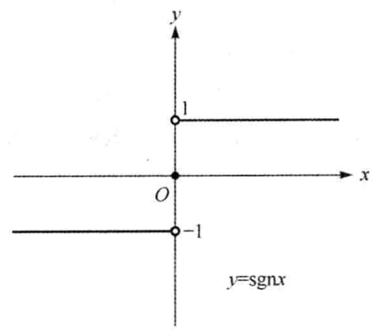


图 1-7

显然，对于任何实数 x，下列关系式成立：

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$$

例如，$\operatorname{sgn}(-3)\cdot|-3|=(-1)\cdot 3=-3$.

例 8 设 x 为任一实数. 取不超过 x 的最大整数称为 x 的取整函数，记作 $[x]$. 例如，$\left[\frac{5}{7}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.5]=-4$.

把 x 看成自变量，则函数

$$f(x)=[x]$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 W 为全体整数. 它的图形如图 1-8 所示，这图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1.

在例 6 和例 7 中看到，有时一个函数是用几个式子来表示的. 这种在不同范围中用不同式子表示的函数，通常称为**分段函数**.

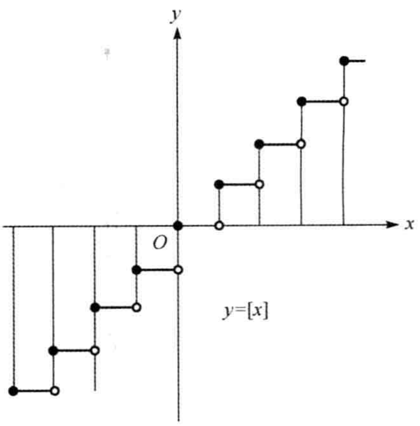


图 1-8

例 9 已知函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x<0\\ 0, & x=0\\ x-1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

求 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$，$f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$.

解　$x=-\frac{1}{2}<0, f\left(-\frac{1}{2}\right)=(x+1)\Big|_{x=-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$；

$x=0, f(0)=0$；

$x=\frac{1}{2}>0, f\left(\frac{1}{2}\right)=(x-1)\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$.

第二节　函数的基本性质

一、单调性

定义 1　设有函数 $y=f(x), x\in D$，若对任意两点 $x_1, x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

(1) $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 内(严格)单调增加.

(2) $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 内(严格)单调减少.

以后，统称这两类函数为单调函数.

在几何上，严格单调增加的函数，它的图形是随着 x 的增加而上升的曲线；严格单调减少的函数，它的图形是随着 x 的增加而下降的曲线.

例 1　函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内是严格单调增加的，因为对 $[0,+\infty)$ 内的任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)=x_1^2<x_2^2=f(x_2)$$

同理，$f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 内是严格单调减少的. 但 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内却不是单调函数(图 1-9).

例 2　证明：函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格单调增加的.

证　设 x_1, x_2 是 $(-\infty,+\infty)$ 内任意两点，当 $x_1<x_2$ 时，根据定义，我们需要证 $f(x_1)=x_1^3<x_2^3=f(x_2)$，即证 $x_1^3-x_2^3<0$.

由于 $x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$，而 $x_1-x_2<0$ 及 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0$，所以 $x_1^3-x_2^3<0$，即 $x_1^3<x_2^3$(图 1-10).

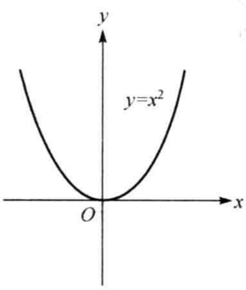


图 1-9

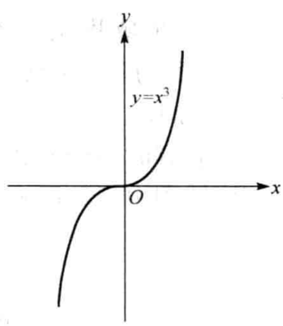


图 1-10

二、有界性

定义 2　设有函数 $y=f(x), x\in D$，若存在一个正数 M，使得对于任意 $x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界. 否则就称它在 D 上无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，可取 $M=1$.

又如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界，因为任取正数 M，总有 $x_0=\dfrac{1}{M+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 内，使得 $y(x_0)=M+1>M$，从而无界.

如果函数 $f(x)$ 在 D 上有界，则在 D 上的函数图形介于两条水平直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

三、奇偶性

定义 3　设有函数 $y=f(x)$，其定义域 D 关于原点 O 对称，那么

(1) 若对任何 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称函数为偶函数.

(2) 若对任何 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数为奇函数.

也就是说，当把自变量 x 换为 $-x$ 时，如果函数值不变，则为偶函数；如果函数值与原来的函数值仅相差一个符号，则为奇函数.

在几何上，对于偶函数，由于在 x 和 $-x$ 处函数值相等，故其函数图形关于 y 轴对称(图 1-11). 对于奇函数，由于在 x 和 $-x$ 处函数值仅差一个符号，其函数图形关于原点对称，即当把右半平面的图形绕原点旋转 180°后恰与左半平面的图形重合(图 1-12).

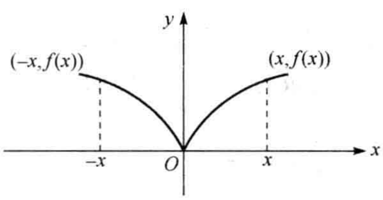


图 1-11

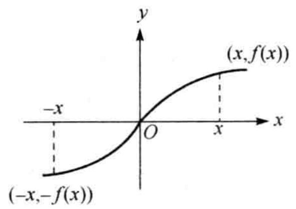


图 1-12

例如，函数 $y=x^2$ 是偶函数；函数 $y=x^3$ 是奇函数，而函数 $y=x^2+x^3$ 是非奇非偶函数.

四、周期性

定义 4　设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 D. 如果存在一个不为零的常数 l，使得一切 $x\in D$，有 $x+l\in D$，且有

$$f(x+l)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为这个函数的周期.

显然，如果函数 $y=f(x)$ 以 l 为周期，则 $kl(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 也是它的周期. 通常，我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

例 3　证明函数 $y=\sin pt$ 是以 $\dfrac{2\pi}{p}$ 为周期的函数.

证　由周期函数的定义，要找 l 使得 $f(t+l)=f(t)$，即

$$\sin p(t+l)=\sin(pt+pl)=\sin pt$$

即要 $pl=2\pi$,从而 $l=\dfrac{2\pi}{p}$,证毕.

第三节 复合函数与反函数

一、复合函数

先举一个例子. 设 $y=\sqrt{u}$,而 $u=1-x^2$,以 $1-x^2$ 代替第一式的 u,得 $y=\sqrt{1-x^2}$. 这个函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 可看成是由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1-x^2$ 复合而成的复合函数.

一般地,若函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_1;函数 $u=\phi(x)$ 的定义域为 D_2,值域为 W_2,并且 $W_2\subset D_1$. 那么对于每个数值 $x\in D_2$,有确定的数值 $u\in W_2$ 与值 x 对应. 由于 $W_2\subset D_1$,这个值 u 也属于函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_1,因此有确定的值 y 与值 u 对应,这样,对于每个数值 $x\in D_2$,通过 u 有确定的数值 y 与 x 对应,从而得到一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数,这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\phi(x)$ 复合而成的复合函数,记作

$$y=f[\phi(x)] \quad (u\text{ 称为中间变量})$$

例如,函数 $y=\arctan(x^2)$ 可看成由 $y=\arctan u$ 及 $u=x^2$ 复合而成的. 这个函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,它也是 $u=x^2$ 的定义域. 又如,$y=\sqrt{x^2}$ 可看成由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=x^2$ 复合而成的,这个函数实际就是函数 $y=|x|$.

注 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数.

例如,$y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为 $u=2+x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[2,+\infty)$,而 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$,因而不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.

复合函数也可以由两个以上的简单函数经过复合而构成.

例如,设 $y=\sqrt{u}$,$u=\cot v$,$v=\dfrac{x}{2}$,则得复合函数 $y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$,这里 u 及 v 都是中间变量.

一般地,研究复合函数,有两个基本问题:

(1) 由简单函数形成复合函数;

(2) 将复合函数分解成几个简单函数.

例 1 将函数 $y=\ln\sqrt{2+x^2}$ 进行分解.

解 函数 $y=\ln\sqrt{2+x^2}$ 可看成由 $y=\ln u$,$u=\sqrt{\nu}$,$\nu=2+x^2$ 三个简单函数复合而成.

二、反函数

如果函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W. 一方面,对于任一 $x_0\in D$,有确定的函数值 $y_0=f(x_0)$ 与之对应;另一方面,对于任一 $y_0\in W$,也必有 $x_0\in D$,使得 $f(x_0)=y_0$ 成立. 按照函数的定义,把 y 看成自变量,则也形成 x 关于 y 的函数. 即 $x=\phi(y)$. 其定义域为 W,值域为 D. 它是由函数 $y=f(x)$ 产生的,称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

一般地,已知函数 $y=f(x)$,如果由表达式 $y=f(x)$ 中能解出 x 来,则把 x 看成 y 的函数,即 $x=\phi(y)$(或记为 $x=f^{-1}(y)$). 它称为 $y=f(x)$ 的反函数. 相对于反函数 $x=\phi(y)$,原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

例如，函数 $y=2x+1$ 的反函数为 $x=\frac{y-1}{2}$.

值得注意的是，即使函数 $y=f(x)$ 是单值的，其反函数 $x=\phi(y)$ 也不一定是单值的.

例如，函数 $y=x^2$ 的反函数 $x=\phi(y)=\pm\sqrt{y}$，就是多值函数. 为了避免函数的多值性，多值函数常可分为若干个单值分支. 这里，若把 x 限制在 $[0,+\infty)$ 上，则 $y=x^2$ 的反函数是单值的，即 $x=\sqrt{y}$. 它称为函数 $y=x^2$ 的反函数的一个单值分支. 类似地，另一个单值分支为 $x=-\sqrt{y}$.

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 是单值单调函数，那么就能保证存在反函数 $x=\phi(y)$ 是单值单调的.

习惯上，常将函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\phi(y)$ 改记为 $y=\phi(x)$. 例如，上例 $y=2x+1$ 的反函数可记为 $y=\frac{x-1}{2}$.

若把直接函数 $y=f(x)$ 和反函数 $y=\phi(x)$ 的图形画在同一个坐标平面上，那么这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的.

例 2　函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为闭区间 $[-1,1]$. 函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数，它的反函数 $y=\arcsin x$ 是多值的. 但函数 $y=\sin x$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调增加的. 因此，若把 $y=\sin x$ 的自变量 x 限制在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，这时反函数是单值的，记为 $y=\arcsin x$. 函数 $y=\arcsin x$ 的定义域为闭区间 $[-1,1]$，值域为闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. $\arcsin x$ 称为 $\arcsin x$ 的主值函数. 以后称 $y=\arcsin x$ 为反正弦函数(图 1-13).

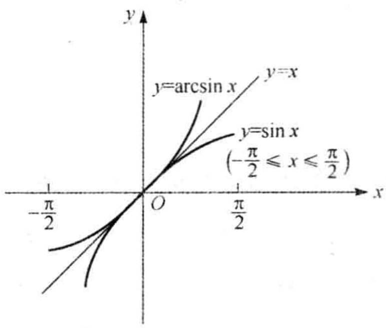


图 1-13

类似地，可对三角函数 $y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 进行讨论而得相应的反三角主值函数

$$y=\arccos x,\quad y=\arctan x,\quad y=\operatorname{arccot} x.$$

第四节　基本初等函数

一、幂函数 $y=x^a$ (a 为任何实数)

$y=x^a$ (a 为任何实数)，当 a 为不同实数时，幂函数的定义域及性质也随之变化，因而情况比较复杂. 但不论 a 为何值，x^a 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，而且图形都经过 $(1,1)$ 点.

当 a 是正整数或零时，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，如 $y=x$，$y=x^2$ 等(图 1-14).

当 a 是负整数时，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 例如，$y=\frac{1}{x}$ 等(图 1-15).

当 a 是有理数 $\frac{q}{p}$ 时，若 $\frac{q}{p}>0$，p 为偶数，则定义域为 $[0,+\infty)$. 例如，$y=x^{\frac{1}{2}}$ (图 1-14). 若 p 为奇数，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，如 $y=x^{\frac{2}{3}}$ (图 1-16)；若 $\frac{q}{p}<0$ 时，则还需要去掉 $x=0$ 的点.

此外，当 a 为偶数时，x^a 为偶函数；当 a 为奇数时，x^a 为奇函数. 在 $[0,+\infty)$ 上，当 $a>0$ 时，

$y=x^a$ 是严格单调增加的；当 $a<0$ 时，$y=x^a$ 是严格单调减少的.

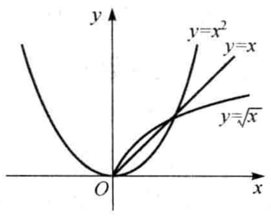


图 1-14

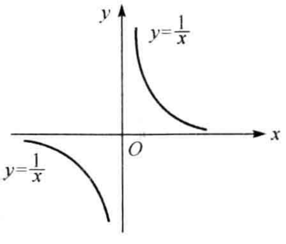


图 1-15

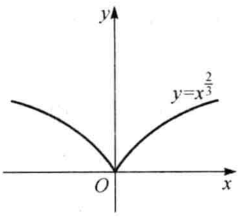


图 1-16

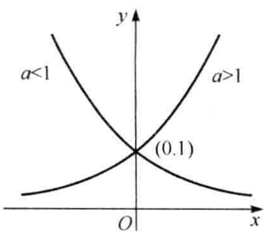


图 1-17

二、指数函数 $y=a^x\,(a>0,a\neq 1)$

指数函数定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$. 无论 a 取何值，函数图形均经过 $(0,1)$ 点. $a>1$ 时，a^x 是严格单调增加函数；$0<a<1$时，a^x 是严格单调减少函数(图 1-17). 指数函数的常用运算性质 $(a>0,b>0)$：

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；　　(2) $a^m\div a^n=a^{m-n}$；

(3) $(a^m)^n=a^{mn}$；　　(4) $(ab)^m=a^mb^m$.

三、对数函数 $y=\log_a x\,(a>0,a\neq 1)$

对数函数是指数函数的反函数，定义域为 $(0,+\infty)$，当 a 取任何不为 1 的正常数时，函数均经过 $(1,0)$ 点. 当 $a>1$ 时，函数严格单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数严格单调减少(图 1-18).

对数函数的常用运算性质 $(a>0,a\neq 1)$：

(1) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$；

(2) $\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$；

(3) $\log_a x^k=k\log_a x\,(x>0)$；

(4) $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$；

(5) $a^{\log_a x}=x$；

(6) $\log_a 1=0$.

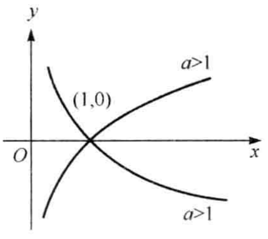


图 1-18

四、三角函数

正弦函数 $y=\sin x$；　　余弦函数 $y=\cos x$；

正切函数 $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$；　　余切函数 $y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$；

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$；　　余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且都是以 2π 为周期的周期函数. $y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数，由 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，它们都是有界函数，图形在直线 $y=\pm 1$之间. 曲线 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上严格单调上升，曲线 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$上严格单调下降