徐 兵 编著

高等数学大讲堂

焦点运算与典型错误分析

（修订增补版）

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

開天

高等数学大讲堂

焦点运算与典型错误分析

（修订增补版）

徐 兵 编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学大讲堂·焦点运算与典型错误分析 / 徐兵编著 .—2 版.
大连 ：大连理工大学出版社，2005.5
ISBN 7-5611-2644-1

Ⅰ. 高… Ⅱ. 徐… Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 086919 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84707961
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:9.75 字数:358 千字
印数:8 001～14 000
2004 年 9 月第 1 版 2005 年 5 月第 2 版
2005 年 5 月第 2 次印刷

责任编辑:吴孝东 责任校对:高继巍
封面设计:佟涤非

定 价:18.00 元

向读者推荐本书的可读特点

——重印的前言

本书的编写思想已在前言中作了介绍。自2004年9月出版以来，受到考生的普遍欢迎。本书不仅对高等数学基本运算方法进行了归纳，且对试题进行了解析，能使考生对研究生入学数学考试的高等数学有个全面了解。作者独特的立意使本书具有特殊的亮点，构成本书鲜明的特色，为此向读者推荐本书的可读特点如下。

为了能简明地说明问题，这里以书中的例题来解说。

1 对考生的常犯典型错误进行了分析，有利后来者防范

【例1】 本书P35“例8(980205)求函数 $f(x)=(1+x)^{x/\tan(x-\frac{\pi}{4})}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点，并判断其类型。”

说明 1° 本题难度值为0.50。

2° 考生的典型问题为：有些考生将 $f(x)$ 写为

$$f(x)=(1+x)^{x/\tan(x-\frac{\pi}{4})}=(1+x)^{x\cot(x-\frac{\pi}{4})}$$

这样则使 $x=\frac{3}{4}\pi, x=\frac{5}{4}\pi$ 成为 $f(x)$ 的连续点，导致了错误。事实上 $\frac{1}{\tan x}=\cot x$ 仅在 $x\neq n\pi, x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$($n$ 为整数)时成立。

上述说明中既指出了考生常犯的典型错误，也指出了错误产生的原因。了解解题时易产生错误的因素、环境、原因，是提高自己运算技能的重要途径。

【例2】 本书P189“例22(030308,030408)计算二重积分

$$I=\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中积分区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\pi\}$。”

说明 1° 本题难度值数学(三)为0.551，数学(四)为0.509。

2° 本题中考生的典型错误是将二重积分化为二次积分时，将里层积分限选错，误将上限定为 π；而在令 $t=r^2$ 时，在定积分的变量替换中又忘记了定积分限随之相应变化。因此出现两次错误，但解答却正确的现象。这种情形基本没得分。

上述运算中引入了变换 $t=r^2$，能简化运算，是值得学习的技巧。

上述例题的说明中指出了考生常犯的典型错误，也解说了在错误的基础上

再次出现错误时的评分原则。本说明还指明了运算中能简化运算的技巧，应注意学习。

【例3】 本书P203“例5(970105)计算曲线积分$\oint_C (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中$C$是曲线

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$$

从z轴正向往z轴负向看C的方向是顺时针的。”

说明 1° 本题难度值为0.44。

2° 考生中的典型问题为：在上述运算(＊)处，将曲线积分化为定积分时，化为

$$\int_0^{2\pi}[-2(\cos\theta+\sin\theta)+3\cos^2\theta-\sin^2\theta]\mathrm{d}\theta$$

定错了积分限，而导致错误。如果明确将对坐标的曲线积分化为定积分时，积分曲线弧始点对应的参数值总是对应定积分的下限，则上述错误不难避免。

在上述例题说明中不但指出了考生的典型错误，还指出了避免犯错误的方法。

【例4】 本书P207“例10(000106)计算曲线积分$I=\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中$L$是以点$(1,0)$为中心，$R$为半径的圆周$(R>1)$，取逆时针方向。”

说明 1° 本题难度值为0.57。

2° 考生中的典型错误为：

① 验算出$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$之后，直接由格林公式得出$I=0$。这是由于忘掉了格林公式的条件：$P,Q$在区域$D$内有连续偏导数所导致。

② 在区域D内作小封闭曲线C：$x=\delta\cos\theta, y=\delta\sin\theta(\theta\in[0,2\pi]$，$C$取逆时针方向)，使其包含于已知圆内，从而

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+3\cos^2\theta}$$

而不能再作下去。这是由于不明白引入小封闭曲线C的目的：是想使分母的值化为常数，从而能简化运算而造成的。实际上可以设C为

$$4x^2+y^2=\delta^2$$

从而取 $C:\begin{cases} x=\dfrac{\delta}{2}\cos\theta \\ y=\delta\sin\theta \end{cases}, \theta\in[0,2\pi]$。

3° 如果在上题中条件不变，$I=\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{a^2x^2+b^2y^2}$，解题的思想不变，只需作足

够小的椭圆 $C: a^2x^2+b^2y^2=\delta^2$，从而设

$$\begin{cases} x=\dfrac{\delta}{a}\cos\theta \\ y=\dfrac{\delta}{b}\sin\theta \end{cases} \quad (\theta\in[0,2\pi], C \text{ 取为逆时针方向})$$

使其包含于已知圆内。利用格林公式，仿上述可解

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{a^2x^2+b^2y^2}=\frac{2\pi}{ab}$$

所给说明既指出了考生的典型错误，出现错误的原因，还指明了特定问题解题的思想方法，并将问题推广到更一般的情形，使考生在解题中能得到多重收获。

2 对一些试题的研制过程以例题的“变式”为简介，引导学生深入复习

【例 5】 本书 P22“例 30(910505) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$。”

说明 考虑以下两种变式：

变式 1 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$。

此时为 $(\infty-\infty)^0$，不是标准形式，需作变换。令 $x=-t$，则 $x\to-\infty$ 时，$t\to+\infty$，则

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+\infty}(\sqrt{1+t^2}-t)^{-\frac{1}{t}}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}-t}\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to+\infty}(\sqrt{1+t^2}+t)^{\frac{1}{t}}$$

化为例 30 的形式。

变式 2 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$。

需要分别考查 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 两种情形，并利用 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

以上两种变式都比例 30 难度大。

上述两种变式都是试题研制时的参选题目，考虑它们的难度不同，取其简单的作为试题。这种变式可以使读者扩大解题思路，提高运算技能。

3 对一些试题的条件，从考核的知识点进行了解说

【例 6】 本书 P24“例 32(900403) 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数，$f(0)=0$ 且 $f'(0)=b$。若函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=$ ________。

说明 1° 解法 1 利用洛必达法则求导，需要 $f(x)$ 有连续的导数。解法 2 利用导数定义，只需要 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导。这表明题目中的条件"$f(x)$ 有连续的导函数"可以减弱为"$f(x)$ 可导"。

2° 事实上，题目中的条件 $f(0)=0$ 也可以去掉。因为当 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处连续时，可知 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}$ 必定存在。由于 $F(x)$ 在 $x\neq 0$ 时的表达式为分式，且分母的极限为零，因此分子的极限必定为零，从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，必定连续，从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，可知 $f(0)=0$，这表明题目中的条件"$f(0)=0$"也可以去掉。

事实上，1° 和 2° 所分析的问题在试题命制中都曾考虑，但是为了使这道填空题中的知识点不过多，以降低题目难度，将题目的考核知识点定为：极限运算、重要极限、函数连续性。另一方面条件放宽之后，题目的解法也增多，从而又降低了题目难度。

4 对 1997 年起始的试题给出了难度值，这有利于考生对试题有完整的了解

这些难度值都是由教育部考试中心每年经统计后发布的准确信息。这些信息有助于考生了解考试层面的高度，了解自己所处的高度，减少盲动性。

上述的 4 个特点是一般书少见的。本书所涉猎的只是运算部分。对于概念，性质已有专门研究：《硕士研究生入学考试数学焦点概念·性质·百题百分》，北京航空航天大学出版社，徐兵编著。这两本书是配套的辅导书，值得一读。相信这两本书必定能助你走上成功之路。

本次重印又加上了"2005 年全国硕士研究生入学数学考试高等数学试题分析"，对数学四份试卷高等数学试题作了解析，对部分试题给出了考生的典型错误分析，对部分试题作了抽样难度值统计。并对高等数学试题作了整体评价。

徐兵
于北京航空航天大学
2005 年 3 月

前　言

提高考试成绩是考生的普遍愿望，正确地把握复习方向是提高考试成绩的重要环节。关键在哪里呢？硕士研究生入学全国统一考试大纲清楚地解说了考试性质、命题的指导思想、命题的基本原则及数学试卷设计的基本要求。由此可以清楚地看到基本概念、基本性质、基本运算的掌握程度是考试成败的关键。

从历年对研究生入学考试试卷的分析可以看出，许多考生对数学“三基”的掌握还有较大的差距。考试大纲命题的基本原则中指出：试题以考查数学的基本概念、基本方法和基本原理为主，在此基础上加强对考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想像能力和综合运用所学知识解决实际问题能力的考查。因此对于考生来说，理解概念要求明确概念的要素，认清其实质。理解性质要求明确性质的基本特征。要尽力做到了解性质、概念的内涵与外延。内涵是指它的本质属性，外延是适用范围的拓展等。掌握基本方法要尽力做到明确方法的前提条件、适用范围、相关知识纵向、横向运算方法的共同点与不同之处及与概念、性质的结合运用等。

研究生考试大纲的“命题指导思想是有利于国家对高层次人才的选拔，又有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高。要求数学考试试题编制能结合高等学校的教学实际。试题水平能反映教学实际水平，也能起到指挥棒的引导作用。”命题的指导思想中又强调“考查的内容不超过考试大纲的规定，试卷的难易度与样卷的难易度基本一致，试卷不出现超纲题，偏题和怪题。”本书的编写是基于上述思想，定位于研究生入学数学考试高等数学的基本运算。对焦点运算方法进行归纳、分析；指出其特点；考试中常见的错误分析。本书每个单元都分为两个部分：一是基本运算方法，二是范例解析。给出题目的求解思路分析。多数题后又加说明：或为解题过程的相关解说，或为考生的典型错误分析，或试题的难度值等。意在能引导考生复习时开拓思路，提高运算能力。

笔者在北京航空航天大学出版社从2001年出版《硕士研究生入学考试焦点概念·性质·百题百分》，到2004年3月已修订为第3版。而本书是为考生备考研究生复习数学所编写的专门针对提高运算能力的辅导书。经过三年研究生考前辅导班的运用，证明对于提高考生复习效率，提高运算能力有实效。因此将其推荐给考生，以与本书配合使用。

本书例题中的(010203)，(040310)等分别表示2001年数学(二)中分值为3分的试题，2004年数学(三)中分值为10分的试题。

本书也可以作为本科学生学习高等数学，提高运算能力的学习辅导书。

作者

于北京航空航天大学

2004年5月

目　　录

第一章 函数、极限与连续性

1.1 函数

函数的基本运算有：

函数符号的运用问题，包括分段函数、反函数、可变上(下)限积分形式的函数、可变限二(三)重积分、可变限线(面)积分等形式的函数。

讨论函数的基本性质。

基本运算方法

1. 函数符号的运用。

2. (1) 判定函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的有界性，常利用连续函数在闭区间上的最大(小)值定理。

(2) 判定函数 $f(x)$ 在开区间(a,b)内的有界性，常利用连续函数在闭区间上的最大(小)值定理，并判定 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$。

(3) 求函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的值域，常常可以利用求 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最大值与最小值来确定。

3. 判定函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的单调性，常利用 $f'(x)$ 的符号来确定。

4. 判定函数 $f(x)$ 的奇偶性常利用定义与性质来确定。

范例解析

1 函数符号的运用

【例 1】 (040210) 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有定义，在区间$[0,2]$上，$f(x)=x(x^2-4)$，若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为常数。

(Ⅰ) 写出 $f(x)$ 在$[-2,0]$上的表达式；

(Ⅱ) 问 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

解析　所给问题(Ⅰ)为函数符号运算问题。

由于题设中只给出了在$[0,2]$上 $f(x)$ 的解析表达式，欲求 $f(x)$ 在$[-2,0]$

上的表达式，可以考虑变换，将 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 时变到 $[0,2]$ 中的新变量。

当 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 时，可得 $0\leqslant x+2\leqslant 2$。因此当 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 时，设 $y=x+2$，此时 $0\leqslant y\leqslant 2$，从而

$$\begin{aligned}f(x)&=kf(x+2)=kf(y)=ky(y^2-4)\\&=k(x+2)[(x+2)^2-4]=kx(x+2)(x+4)\end{aligned}$$

此处不再给出(Ⅱ)的解答。

说明 本题难度值为 0.691。函数符号的运用问题在导数、积分等综合试题中多次出现。如3.1 节例 13，例 14 等。

2 判定函数的有界性

【例 2】 (040404) 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界。( )

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

解析 所给问题为判定函数在区间 (a,b) 内有界性。依本节“基本运算方法”中的 2 可知，若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界。

由于 $f(x)$ 为分段函数，分段点为 $x=0$。$f(x)$ 在点 $x=0$，$x=1$，$x=2$ 处无定义。在 $(-\infty,0)$，$(0,1)$，$(1,2)$，$(2,+\infty)$ 内 $f(x)$ 为初等函数，且在上述区间内 $f(x)$ 为连续函数。

$x=-1$，$x=3$ 属于 $f(x)$ 的定义区间，可知 $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)$ 存在。

依题意可知只需考察

$$\lim_{x\to 0^-}f(x),\ \lim_{x\to 0^+}f(x),\ \lim_{x\to 1^-}f(x),\ \lim_{x\to 1^+}f(x),\ \lim_{x\to 2^-}f(x),\ \lim_{x\to 2^+}f(x)$$

由于

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=-\frac{\sin 2}{4},\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\frac{\sin 2}{4}$$
$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to 1^+}f(x)=\infty,$$
$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to 2^+}f(x)=\infty$$

可知 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有界。因此应选 A。

说明 本题难度值为 0.461。

3 判定函数的单调性

【例 3】 (970407) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $F(x)=\int_0^x(x-$

$2t)f(t)\mathrm{d}t$，试证：

(1) 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数；

(2) 若 $f(x)$ 单调不增，则 $F(x)$ 单调不减。

解析 所给 $F(x)$ 为可变上限积分形式的函数。问题(1) 为判定函数 $F(x)$ 的奇偶性，应利用奇偶函数的定义。问题(2) 为判定函数 $F(x)$ 的单调性，应利用导数符号判定。

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数，则有 $f(-x)=f(x)$，

$$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\mathrm{d}t$$

令 $t=-u$，于是

$$F(-x)=-\int_0^{x}(-x+2u)f(-u)\mathrm{d}u=\int_0^{x}(x-2u)f(u)\mathrm{d}u$$
$$=\int_0^{x}(x-2t)f(t)\mathrm{d}t=F(x)$$

可知 $F(x)$ 为偶函数。

$$(2)F'(x)=\left[x\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^{x}tf(t)\mathrm{d}t\right]'$$
$$=\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-2xf(x)$$
$$=\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t-xf(x)\qquad(*)$$
$$=x[f(\xi)-f(x)]$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间。由已知 $f(x)$ 单调不增，

当 $x>0$ 时，$f(\xi)-f(x)\geqslant 0$，可知 $F'(x)\geqslant 0$；

当 $x<0$ 时，$f(\xi)-f(x)\leqslant 0$，可知 $F'(x)\geqslant 0$；

当 $x=0$ 时，由式(*)可知 $F'(0)=0$

因此对 $x\in(-\infty,+\infty)$，总有 $F'(x)\geqslant 0$，从而知当 $f(x)$ 单调不增，必有 $F(x)$ 单调不减。

说明 本题难度值为 0.37。

4 判定函数的周期性

【例 4】 (040211) 设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t$，

(Ⅰ) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数；

(Ⅱ) 求 $f(x)$ 的值域。

解析 所给函数是由可变上(下)限积分形式表示的函数。问题(Ⅰ) 是判定 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数，只需依周期的定义来判定。问题(Ⅱ) 为求 $f(x)$ 的值域，由于 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数，只需在一个周期上(如$[0,\pi]$)，求出

$f(x)$ 的最大值与最小值,则可得 $f(x)$ 的值域。

（Ⅰ）依题设可知

$$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t$$

$t=u+\pi$,则当 $t=x+\pi$ 时,$u=x$;当 $t=x+\frac{3}{2}\pi$ 时,$u=x+\frac{\pi}{2}$;$\mathrm{d}t=\mathrm{d}u$,因此

$$f(x+\pi)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|\,\mathrm{d}u=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u=f(x)$$

故 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数。

（Ⅱ）因为 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数,只需讨论 $f(x)$ 在一个周期 $[0,\pi]$ 上的值域。

由于 $|\sin u|$ 为连续函数,因此

$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|$$

令 $f'(x)=0$,可得 $f(x)$ 的驻点 $x_1=\frac{\pi}{4}$,$x_2=\frac{3}{4}\pi$,由于

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\sin t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\sin t\mathrm{d}t=2-\sqrt{2}$$

$$f(0)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t=1$$

$$f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=-\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\sin t\mathrm{d}t=1$$

可知 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最小值为 $2-\sqrt{2}$,最大值为 $\sqrt{2}$。因此 $f(x)$ 的值域为 $[2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$。

说明 本题难度值为 0.424。

1.2 极限

极限是高等数学的基本概念。极限运算是高等数学的基本运算,也是历年来研究生数学入学考试的基本考核知识点。极限运算的基本问题为:

(1) 求极限;

(2) 无穷小量阶的比较。

基本运算方法

极限的定义指明了概念，也指明了极限值是个固定常数，它并没有提供求极限的方法，利用极限的定义验证了 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}c=c$。并得到了下列方法：

1. 利用连续函数性质求极限。

(1) 若 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$f(u)$ 在点 u_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0}g(x))$。

2. 利用极限的四则运算法则求极限。

3. 利用两个重要极限公式求极限。

4. 利用等价无穷小量代换简化运算。

常见的等价无穷小量代换：当 $x\to 0$ 时

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，

$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$

5. 利用无穷小量性质求极限。

6. 利用极限的概念与性质求极限。

7. 求分段函数在分段点处的极限时，当函数在分段点两侧表达式不同时，需利用左极限与右极限。

8. 利用极限存在的准则求极限。

9. 利用洛必达法则求极限。

10. 利用导数定义求极限。

11. 利用定积分的定义求极限。

12. 利用极限运算进行无穷小量阶的比较。

范例解析

1 利用连续函数性质求极限

【例 1】 (020303) 设常数 $a\neq\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$ ________。

解析 根据连续函数的性质。

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}$$

$$=\ln\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}$$

$$= \ln e^{\frac{1}{1-2a}} = \frac{1}{1-2a}(a \neq \frac{1}{2})$$

说明 本题难度值为 0.61。

2 利用极限的四则运算法则求极限

【例 2】 (010203) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2} =$ ________。

解析 所给极限为$\frac{0}{0}$型,不能直接利用极限四则运算法则。

本例求极限的函数分子中含有根式,且在 $x \to 1$ 时,带有根式的分子表达式极限为零。对于含有根式的函数的求极限问题,通常可以先进行有理化,使恒等变形以后的表达式中带有根式的因子的极限不为零,能对其单独求极限。

若变形后问题化为分母极限不为零的分式极限,则可以利用极限四则运算法则求之。

若变形后问题仍为$\frac{0}{0}$型极限,则可以考虑利用洛必达法则等方法解之。

将求极限的函数恒等变形,可得

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2} &= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{(x^2+x-2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{(3-x)-(1+x)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{-2(x-1)}{(x+2)(x-1)} \cdot \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}} \\
&= \frac{-\sqrt{2}}{6}
\end{aligned}$$

说明 1° 本例也可以利用洛必达法则计算。

2° 本题难度值为 0.79。

【例 3】 (990205) 求$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$。

解析 所给极限为$\frac{0}{0}$型,求极限的函数表达式中含有根式,依例 2 的解析,先将分子有理化。

$$\text{原式} = \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{\tan x - \sin x}{x[\ln(1+x)-x]} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}} \right\} \quad (*)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\ln(1+x)-x} \right] \quad (**)$$